

## 1

## Die grundlegenden Prinzipien

Die Bewegung fester Körper war eines der frühesten Gebiete, dem sich die Pioniere der Physik widmeten. Aus ihren Untersuchungen entwickelte sich ein weites Feld, das heute als analytische Mechanik oder Dynamik oder einfach als Mechanik bekannt ist. Im zwanzigsten Jahrhundert entstand die Bezeichnung „klassische Mechanik“ in Abgrenzung zu neueren physikalischen Theorien, insbesondere der Quantenmechanik. Wir werden diesem Gebrauch folgen, werden dabei aber den Teil der Mechanik, der aus der speziellen Relativitätstheorie folgt, mit einschließen. Die Absicht dieses Buches ist, die Struktur der klassischen Mechanik zu entwickeln und einige ihrer Anwendungen vorzustellen, die in der modernen Physik von Interesse sind.

Grundlage jeder Darstellung der Mechanik sind physikalische Konzepte wie Raum, Zeit, Gleichzeitigkeit, Masse und Kraft. Im überwiegenden Teil des Buches werden diese Begriffe nicht kritisch hinterfragt, sondern vielmehr als undefinierte, aber dem Leser vertraute Begriffe vorausgesetzt.

### 1.1

#### Die Mechanik von Massenpunkten

Mit  $\mathbf{r}$  wollen wir den Vektor eines Massenpunkts vom Koordinatenursprung aus gerechnet bezeichnen, mit  $\mathbf{v}$  entsprechend seine vektorielle Geschwindigkeit, die als

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.1)$$

definiert ist. Der *lineare Impuls* (oder einfach *Impuls*)  $\mathbf{p}$  ist als Produkt der Masse und der Geschwindigkeit des Massenpunkts definiert,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} . \quad (1.2)$$

Durch Wechselwirkungen mit anderen Objekten oder Feldern können verschiedene Kräfte auf einen Massenpunkt einwirken, beispielsweise Gravitationskräfte oder elektromagnetische Kräfte. Die Vektorsumme aller Kräfte auf den Massenpunkt ergibt die Gesamtkraft  $\mathbf{F}$ .

Die Mechanik eines solchen Massenpunkts wird durch das *zweite Newtonsche Axiom* beschrieben, wonach die Bewegung des Massenpunkts in einem geeigneten Be-

zugssystem durch die Differentialgleichung

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}} \quad (1.3)$$

oder

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (1.4)$$

beschrieben wird.

In den meisten Fällen ist die Masse des Massenpunkts konstant, sodass sich Gl. (1.1) auf

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (1.5)$$

reduziert, wobei  $\mathbf{a}$  die Beschleunigung des Massenpunkts ist, die durch

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.6)$$

definiert ist. Die Bewegungsgleichung ist somit eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn wir annehmen, dass  $\mathbf{F}$  nicht von höheren Ableitungen abhängt.

Ein Bezugssystem, in welchem Gl. (1.3) gilt, heißt *Inertialsystem* oder *Galileisches System*. Selbst innerhalb der klassischen Mechanik ist das Konzept eines Inertialsystems eine Idealisierung. Meist ist es aber möglich, ein Koordinatensystem zu wählen, das dieser Idealisierung hinreichend nahe kommt. In vielen Fällen ist ein mit der Erde verbundenes Bezugssystem (*Laborsystem*) bereits eine hinreichende Annäherung an ein Inertialsystem; in der Astronomie ist es jedoch gelegentlich nötig, ein Inertialsystem durch Bezug auf entfernte Galaxien zu konstruieren.

Viele der wichtigen Ergebnisse der Mechanik können in Form von Erhaltungssätzen ausgedrückt werden, die angeben, unter welchen Bedingungen bestimmte mechanische Größen zeitlich unveränderlich sind. Gleichung (1.3) liefert direkt den ersten solchen Erhaltungssatz, den

*Impulserhaltungssatz: Wenn die Gesamtkraft  $\mathbf{F}$  verschwindet, ist  $\dot{\mathbf{p}} = 0$  und der lineare Impuls  $\mathbf{p}$  bleibt erhalten.*

Der *Drehimpuls* eines Massenpunkts um einen Punkt O wird mit  $\mathbf{L}$  bezeichnet; er ist durch

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.7)$$

definiert, wobei  $\mathbf{r}$  der Radiusvektor von O zu dem Massenpunkt ist; dabei ist die Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukt von Bedeutung. Das *Drehmoment* um O ist als

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.8)$$

definiert. Die zu Gl. (1.3) analoge Gleichung für  $\mathbf{N}$  erhalten wir, indem wir das Vektorprodukt von  $\mathbf{r}$  mit Gl. (1.4) bilden,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1.9)$$

Mithilfe der Vektoridentität

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1.10)$$

in welcher der erste Term auf der rechten Seite offensichtlich verschwindet, kann Gl. (1.9) als

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{L}} \quad (1.11)$$

geschrieben werden. Dabei hängen sowohl  $\mathbf{N}$  als auch  $\mathbf{L}$  von dem Punkt  $O$  ab, auf den sie bezogen sind.

Genau wie Gl. (1.1) liefert auch die Drehimpulsgleichung (1.11) einen Erhaltungssatz, und zwar den

*Drehimpulserhaltungssatz: Wenn das Gesamt-Drehmoment  $\mathbf{N}$  null ist, dann gilt  $\dot{\mathbf{L}} = 0$  und der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  bleibt erhalten.*

Als nächstes betrachten wir die Arbeit, die eine äußere Kraft  $\mathbf{F}$  bei der Bewegung von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 an einem Massenpunkt leistet. Sie ist definitionsgemäß gleich

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1.12)$$

Für konstante Masse (was wir im Folgenden stets annehmen werden, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird) reduziert sich das Integral in Gl. (1.12) auf

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(v^2) dt,$$

und damit wird

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (1.13)$$

Die skalare Größe  $mv^2/2$  nennt man die *kinetische Energie* des Massenpunkts und bezeichnet sie mit  $T$ , sodass die geleistete Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie ist,

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1.14)$$

Wenn das Kraftfeld so beschaffen ist, dass die Arbeit  $W_{12}$  für jeden physikalisch möglichen Weg zwischen 1 und 2 identisch ist, so bezeichnet man die Kraft (und das

System) als *konservativ*. Eine alternative Beschreibung eines solchen Systems erhält man, wenn man sich vorstellt, dass der Massenpunkt auf einem beliebigen Weg von Punkt 1 nach Punkt 2 gelangt und danach auf einem anderen Weg wieder zu Punkt 1 zurückkehrt. Wegen der Wegunabhängigkeit von  $W_{12}$  folgt sofort, dass die Arbeit, die entlang eines solchen geschlossenen Weges geleistet wird, null sein muss,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1.15)$$

Offensichtlich kann ein System nicht konservativ sein, wenn Reibungs- oder andere Dissipationskräfte vorhanden sind, denn  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  ist für Reibungskräfte stets positiv, und das Integral kann daher nicht verschwinden.

Nach einem Theorem aus der Vektoranalysis ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Arbeit  $W_{12}$  unabhängig vom Weg ist, den der Massenpunkt nimmt, wenn  $\mathbf{F}$  als Gradient einer skalaren Funktion des Ortes geschrieben werden kann,

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

wobei  $V$  *Potential* oder *potentielle Energie* genannt wird. Die Existenz von  $V$  kann intuitiv begründet werden. Wenn  $W_{12}$  unabhängig vom Integrationsweg zwischen den Punkten 1 und 2 sein soll, dann sollte es möglich sein,  $W_{12}$  als Änderung einer Größe auszudrücken, die alleine von den beiden Endpunkten abhängt. Diese Größe soll mit  $-V$  bezeichnet werden, sodass für ein differentielles Wegstück die Beziehungen

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

oder

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

gelten, die äquivalent zu Gl. (1.16) sind. Dabei kann man in Gl. (1.16) zu  $V$  noch eine beliebige räumlich konstante Größe addieren, ohne die Ergebnisse zu beeinflussen. Die Wahl des *Nullpunkts von  $V$*  ist folglich beliebig.

Die durch die Kräfte in einem konservativen System geleistete Arbeit ist

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1.17)$$

Durch Kombination der Gln. (1.17) und (1.14) ergibt sich

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \quad (1.18)$$

Das ist – in der Sprache der Mathematik ausgedrückt – der

*Energieerhaltungssatz für einen Massenpunkt: Wenn auf einen Massenpunkt nur konservative Kräfte wirken, dann bleibt seine Gesamtenergie  $T + V$  erhalten.*

Die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft kann manchmal durch den Gradienten einer skalaren Funktion gegeben sein, die explizit sowohl von der Position des Massenpunkts als auch von der Zeit abhängt. Die Arbeit

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial V}{\partial s} ds,$$

die in diesem Fall an dem Massenpunkt verrichtet wird, wenn er die Strecke  $ds$  zurücklegt, ist dann nicht mehr durch die Änderung  $-V$  zwischen Anfangs- und Endpunkt gegeben, da sich  $V$  während der Bewegung des Massenpunkts verändert. Somit kann die verrichtete Arbeit nicht mehr als Differenz der Funktion  $V$  an diesen Punkten ausgedrückt werden. Obwohl eine Gesamtenergie  $T + V$  immer noch definiert sein kann, bleibt sie während der Bewegung des Massenpunkts nicht erhalten.

## 1.2

### Die Mechanik eines Systems von Massenpunkten

Wenn wir die Gedanken aus dem vorigen Abschnitt auf ein System aus vielen Massenpunkten verallgemeinern wollen, so müssen wir zwischen *äußeren Kräften* unterscheiden, die außerhalb des Systems entstehen und von außen auf die Massenpunkte wirken, und *inneren Kräften*, die die Wirkung aller anderen Massenpunkte im System auf (beispielsweise) den  $i$ -ten Massenpunkt beschreiben. Somit ist die Bewegungsgleichung (zweites Newtonsches Axiom) für den  $i$ -ten Massenpunkt

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (1.19)$$

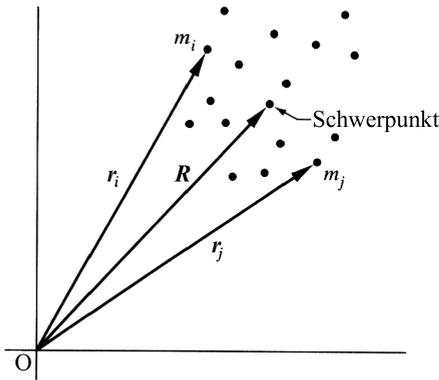
wobei  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  für eine äußere Kraft steht und  $\mathbf{F}_{ji}$  die innere Kraft des  $j$ -ten auf den  $i$ -ten Massenpunkt ist ( $\mathbf{F}_{ii}$  ist offensichtlich null). Wir nehmen an, dass die  $\mathbf{F}_{ji}$  (ebenso wie die  $\mathbf{F}_i^{(e)}$ ) Newtons drittem Axiom in seiner ursprünglichen Fassung gehorchen, dass die Kräfte, die zwei Teilchen aufeinander ausüben, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Annahme (die im übrigen nicht für alle Arten von Kräften gilt) wird manchmal das *schwache Wechselwirkungsprinzip* genannt.

Wenn wir über alle Massenpunkte summieren, so erhalten wir aus Gl. (1.18)

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ji}. \quad (1.20)$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist gerade die gesamte äußere Kraft  $\mathbf{F}^{(e)}$ . Der zweite Term verschwindet, da das Wechselwirkungsprinzip besagt, dass jedes Paarsumme  $\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}$  null ist. Um die linke Seite zu vereinfachen, definieren wir einen Vektor  $\mathbf{R}$  als Mittelwert der mit ihren jeweiligen Massen gewichteten Ortsvektoren der Massenpunkte,

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (1.21)$$



**Abbildung 1.1** Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten.

Der Vektor  $\mathbf{R}$  definiert den *Schwerpunkt* des Systems (Abb. 1.1). Mit dieser Definition reduziert sich Gl. (1.19) auf

$$M \frac{d^2}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)} \quad (1.22)$$

Diese Gleichung besagt, dass sich der Schwerpunkt bewegt, als ob die gesamte äußere Kraft auf die gesamte Masse des Systems wirkt, die im Schwerpunkt konzentriert ist. Innere Kräfte haben deshalb – sofern sie das dritte Newtonsche Axiom befolgen – keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts. Ein oft verwendetes Beispiel ist die Bewegung einer explodierenden Granate; der Schwerpunkt ihrer Bruchstücke bewegt sich so, als wäre die Granate noch ein einziges Stück (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands). Dasselbe Prinzip kommt auch bei Düsen- oder Raketenantrieben ins Spiel. Damit die Bewegung des Schwerpunkts konstant bleibt, muss der mit hoher Geschwindigkeit erfolgende Ausstoß der Abgase durch die Vorwärtsbewegung des Flugkörpers ausgeglichen werden.

Nach Gl. (1.20) ist der gesamte Impuls des Systems

$$\mathbf{P} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (1.23)$$

gleich der Gesamtmasse des Systems multipliziert mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts. Für die Bewegung des Schwerpunkts, Gl. (1.22), gilt folglich die

*Impulserhaltung für ein System von Massenpunkten: Wenn keine resultierende äußere Kraft auf ein System wirkt, so bleibt der Impuls erhalten.*

Um den Gesamtdrehimpuls des Systems zu berechnen, müssen wir das Vektorprodukt  $\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i$  bilden und über  $i$  summieren. Wenn wir das für Gl. (1.19) tun, dann erhalten wir mithilfe der Identität aus Gl. (1.10)

$$\sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} \quad (1.24)$$

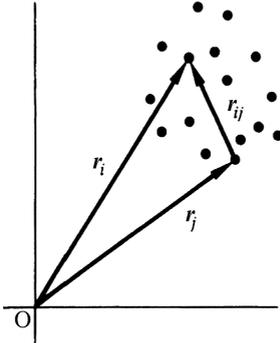


Abbildung 1.2 Der Vektor  $\mathbf{r}_{ij}$  zwischen zwei Massenpunkten  $i$  und  $j$ .

Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass Aktion gleich Reaktion ist (Wechselwirkungsprinzip), können wir den letzten Term auf der rechten Seite von Gl. (1.24) als Summe von Paaren der Form

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{ji} \quad (1.25)$$

auffassen. Da  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  der Vektor  $\mathbf{r}_{ij}$  von  $j$  nach  $i$  ist (vgl. Abb. 1.2), können wir die rechte Seite von Gl. (1.25) auch als

$$\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}$$

schreiben. Wenn die (entgegengesetzt gleichen) Kräfte zwischen zwei Teilchen entlang der Verbindungslinie der beiden Teilchen wirken – eine Bedingung, die unter der Bezeichnung *starkes Wechselwirkungsprinzip* bekannt ist – dann verschwinden alle diese Vektorprodukte. Die Summe über die Paare ist dann null und wir können Gl. (1.24) in der Form

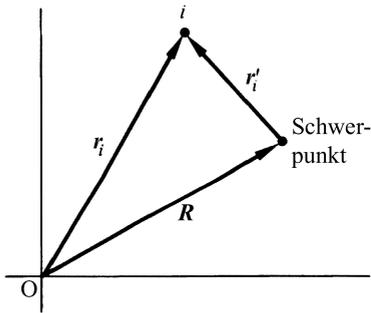
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^{(e)} \quad (1.26)$$

schreiben: Die zeitliche Ableitung des Gesamtdrehimpulses ist gleich dem Moment der äußeren Kraft an dem betrachteten Drehpunkt. In Worten ergibt sich aus Gl. (1.26) die

*Erhaltung des Gesamtdrehimpulses:  $\mathbf{L}$  ist zeitlich konstant, wenn das angewendete (äußere) Drehmoment null ist.*

(Es ist wichtig, zu betonen, dass dies ein *Vektortheorem* ist, d.h.  $\mathbf{L}_z$  bleibt erhalten, wenn  $N_z^{(e)}$  null ist, selbst wenn  $N_x^{(e)}$  und/oder  $N_y^{(e)}$  von null verschieden sind.)

Die Drehimpulserhaltung in Abwesenheit äußerer Kräfte gilt nur, wenn das schwache Wechselwirkungsprinzip erfüllt ist. Die Drehimpulserhaltung in Abwesenheit äußerer Drehmomente gilt, wenn das starke Wechselwirkungsprinzip erfüllt ist – wenn



**Abbildung 1.3** Die bei der Verschiebung des Bezugspunktes für den Drehimpuls auftretenden Vektoren.

die auftretenden Kräfte also alle *Zentralkräfte* sind. Viele der üblicherweise vorkommenden physikalischen Kräfte, beispielsweise die Gravitation, erfüllen diese letzte Bedingung. Es gibt aber auch Kräfte, für die zwar Aktion gleich Reaktion gilt, die aber trotzdem keine Zentralkräfte sind. In einem System, das bewegte Ladungen enthält, verletzen die durch das Gesetz von Biot–Savart berechneten Kräfte beide Varianten des Wechselwirkungsprinzips<sup>1</sup>. Die Gln. (1.22) und (1.26) sowie die entsprechenden Erhaltungssätze sind dann nicht anwendbar, jedenfalls nicht in der hier angegebenen Form. In der Regel ist es in diesen Fällen aber möglich, eine geeignete Verallgemeinerung von  $\mathbf{P}$  bzw.  $\mathbf{L}$  zu definieren, die erhalten bleibt. So bleibt in einem isolierten System aus bewegten Ladungen die Summe des mechanischen und des elektromagnetischen „Drehimpulses“ des Feldes erhalten.

Gleichung (1.23) besagt, dass der Gesamtimpuls eines Systems gleich dem Impuls ist, den man erhält, wenn die gesamte Masse im Schwerpunkt konzentriert ist und sich mit diesem bewegt. Der entsprechende Satz für den Drehimpuls ist komplizierter. Der Gesamtdrehimpuls des Systems bezogen auf den Koordinatenursprung  $O$  ist

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i .$$

Wir bezeichnen den Vektor vom Punkt  $O$  zum Schwerpunkt des Systems mit  $\mathbf{R}$  und den Vektor vom Schwerpunkt zum  $i$ -ten Massenpunkt mit  $\mathbf{r}'_i$ . Dann ist (siehe Abb. 1.3)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (1.27)$$

und

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v} ,$$

1) Wenn sich zwei Ladungen gleichförmig bewegen und ihre Geschwindigkeitsvektoren parallel, aber nicht senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Ladungen sind, so sind die Kräfte zwischen ihnen entgegengesetzt gleich, zeigen aber nicht entlang ihrer Verbindungslinie.

Wenn sich zwei Ladungen entlang der Linien in einem „T“ bewegen, also in zueinander senkrechten Richtungen und so, dass Teilchen 2 gerade auf Teilchen 1 zufliegt, dann übt Teilchen 2 eine magnetische Kraft auf Teilchen 1 aus, nicht aber umgekehrt.

wobei

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

die Geschwindigkeit des Schwerpunkts relativ zum Ursprung ist und

$$\mathbf{v}'_i = \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt}$$

die Geschwindigkeit des  $i$ -ten Massenpunkts relativ zum Schwerpunkt des Systems. Mit Gl. (1.27) nimmt der Gesamtdrehimpuls dann die Form

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i .$$

an. Die beiden letzten Terme in diesem Ausdruck verschwinden, da beide den Faktor  $\sum m_i \mathbf{r}'_i$  enthalten. Dies ist die Definition des Schwerpunkts in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt liegt; folglich ist dieser Term gleich null. Damit erhalten wir für den Gesamtdrehimpuls um O

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i . \quad (1.28)$$

In Worten besagt Gl. (1.28), dass der Gesamtdrehimpuls eines Systems um einen Punkt O gleich dem Drehimpuls des im Schwerpunkt konzentrierten Systems plus dem Drehimpuls der Bewegung um den Schwerpunkt ist. Die Form von Gl. (1.28) zeigt, dass  $\mathbf{L}$  im Allgemeinen wegen des Vektors  $\mathbf{R}$  von der Wahl des Ursprungs O abhängt. Nur wenn der Schwerpunkt bezüglich O ruht, ist der Drehimpuls unabhängig vom Bezugspunkt. In diesem Fall verschwindet der erste Term in Gl. (1.28) und  $\mathbf{L}$  reduziert sich auf den Drehimpuls um den Schwerpunkt.

Zuletzt wollen wir noch die Energiegleichung betrachten. Wie im Fall eines einzelnen Massenpunkts berechnen wir die durch alle Kräfte geleistete Arbeit, wenn das System aus einem Anfangszustand 1 in einen Endzustand 2 gebracht wird:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + = \sum_{i \neq j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i . \quad (1.29)$$

Auch hier können wir die Integrale unter Benutzung der Bewegungsgleichungen auf

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

reduzieren. Demnach kann die geleistete Arbeit wieder als Differenz der kinetischen Energien am Ende und am Anfang geschrieben werden:

$$W_{12} = T_2 - T_1 ,$$

wobei  $T$  die gesamte kinetische Energie des Systems ist,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1.30)$$

Wenn wir gemäß Gl. (1.27) auf Schwerpunktskoordinaten transformieren, dann erhalten wir für  $T$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right). \end{aligned}$$

Aus denselben Gründen wie bei der Berechnung des Drehimpulses verschwindet der letzte Term und wir erhalten

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \quad (1.31)$$

Wie der Drehimpuls besteht also die kinetische Energie aus zwei Anteilen: die kinetische Energie, die man erhält, wenn die gesamte Masse des Systems im Schwerpunkt konzentriert ist, plus die kinetische Energie der Bewegung um den Schwerpunkt.

Wir betrachten nun die rechte Seite von Gl. (1.29). In dem Spezialfall, dass die äußeren Kräfte als Gradienten eines Potentials geschrieben werden können, kann der erste Term in der Form

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2,$$

wobei der Index  $i$  am Nabla-Operator bedeutet, dass nach den Komponenten von  $\mathbf{r}_i$  abzuleiten ist. Wenn die inneren Kräfte ebenfalls konservativ sind, dann können die Kräfte  $\mathbf{F}_{ij}$  und  $\mathbf{F}_{ji}$  zwischen dem  $i$ -ten und dem  $j$ -ten Massenpunkt aus einer Potentialfunktion  $V_{ij}$  berechnet werden. Damit das starke Wechselwirkungsprinzip erfüllt ist, kann  $V_{ij}$  nur eine Funktion der Abstände zwischen den Massenpunkten sein,

$$V_{ij} = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (1.32)$$

Die beiden Kräfte sind dann automatisch entgegengesetzt gleich,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \quad (1.33)$$

und sind entlang der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte gerichtet,

$$\nabla V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) f, \quad (1.34)$$

wobei  $f$  eine skalare Funktion ist. Wäre  $V_{ij}$  auch eine Funktion der Differenz anderer Vektoren, die mit den Massenpunkten verbunden sind, etwa ihrer Geschwindigkeiten oder (um einen Schritt in die moderne Physik zu wagen) ihrer intrinsischen

„Spin“drehimpulse, dann wären zwar die Kräfte noch entgegengesetzt gleich, aber nicht mehr entlang der Verbindungslinie beider Massenpunkte gerichtet.

Wenn alle Kräfte konservativ sind, kann der zweite Term in Gl. (1.29) als Summe über *Paare* von Massenpunkten geschrieben werden. Die Terme für jedes Paar haben die Form

$$- \int_1^2 (\nabla_i V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_i + \nabla_j V_{ij} \cdot d\mathbf{s}_j) .$$

Wenn wir den Differenzvektor  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  mit  $\mathbf{r}_{ij}$  und den Gradienten bezüglich  $\mathbf{r}_{ij}$  mit  $\nabla_{ij}$  bezeichnen, dann ist

$$\nabla_i V_{ij} = \nabla_{ij} V_{ij} = -\nabla_j V_{ij}$$

und

$$d\mathbf{s}_i - d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij} ,$$

sodass der Term für das Paar  $ij$  nun die Form

$$- \int \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

annimmt. Die gesamte Arbeit aufgrund der inneren Kräfte ist dann

$$-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_1^2 . \quad (1.35)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  tritt in Gl. (1.35) auf, weil in der unabhängigen Summation über  $i$  und  $j$  jedes Mitglied eines Paares zweimal enthalten ist, einmal in der Summation über  $i$  und noch einmal in der Summation über  $j$ .

Aus diesen Überlegungen wird deutlich, dass in dem Fall, dass sowohl die äußeren als auch die inneren Kräfte aus Potentialen hergeleitet werden können, eine gesamte potentielle Energie

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} , \quad (1.36)$$

des Systems definiert werden kann, die die Eigenschaft besitzt, dass die Gesamtenergie  $T + V$  erhalten bleibt – das Analogon des Erhaltungssatzes (1.18) für einen einzelnen Massenpunkt.

Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (1.36) wird *innere potentielle Energie* des Systems genannt. Sie ist im Allgemeinen nicht null, und – noch wichtiger – sie kann sich im Laufe der Zeit ändern. Nur für eine besondere Klasse von Systemen, die man *starre Körper* nennt, bleibt das innere Potential immer konstant. Formal kann ein starrer Körper als ein System von Massenpunkten definiert werden, in dem die Abstände  $\mathbf{r}_{ij}$  fest und zeitlich konstant sind. In diesem Fall können die Vektoren

$d\mathbf{r}_{ij}$  nur senkrecht auf den  $\mathbf{r}_{ij}$  und damit zu den  $\mathbf{F}_{ij}$  stehen. Deshalb *leisten die inneren Kräfte in einem starren Körper keine Arbeit*, und das innere Potential muss konstant bleiben. Da das Gesamtpotential ohnehin nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, kann ein unveränderliches inneres Potential bei der Diskussion der Bewegung eines Systems vollständig außer acht gelassen werden.

### 1.3

#### Randbedingungen

Aus den vorangegangenen Abschnitten könnte man den Eindruck gewinnen, dass sich alle Probleme der Mechanik auf die Lösung der Differentialgleichungen (1.18),

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji},$$

zurückführen lassen. Wir müssen nur die Kräfte einsetzen, die auf die Massenpunkte des Systems wirken, die mathematische Zaubermühle anwerfen und bekommen die Lösungen fix und fertig auf's Tablett! Selbst von einem physikalischen Standpunkt aus betrachtet ist diese Annahme aber zu sehr vereinfacht. Zum Beispiel kann es notwendig sein, *Randbedingungen* zu berücksichtigen, die die Bewegung des Systems einschränken. Wir haben bereits eine Art von Systemen angetroffen, die Randbedingungen erfüllen muss: In starren Körpern müssen die Abstände  $\mathbf{r}_{ij}$  der Massenpunkte immer konstant bleiben. Auch viele andere Systeme müssen Randbedingungen erfüllen. Die Kugeln in einem Abakus sind durch die Stützdrähte, auf denen sie aufgezogen sind, auf eine eindimensionale Bewegung eingeschränkt. Gasmoleküle in einem Behälter sind durch die Gefäßwände gezwungen, sich nur *innerhalb* des Behälters zu bewegen. Ein Massenpunkt, der auf die Oberfläche einer harten Kugel gesetzt wird, kann sich nur auf der Oberfläche (oder ganz außerhalb) der Kugel bewegen.

Randbedingungen können auf verschiedene Art klassifiziert werden; die im Folgenden verwendete Variante soll nun kurz vorgestellt werden. Wenn die Randbedingungen durch Gleichungen dargestellt werden können, die Beziehungen zwischen den Koordinaten der Massenpunkte (und möglicherweise der Zeit) ausdrücken und die die Form haben

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, t) = 0, \quad (1.37)$$

dann sprechen wir von *holonomen* Randbedingungen. Das einfachste Beispiel für holonome Randbedingungen liefert der starre Körper, dessen Randbedingungen durch Gleichungen der Form

$$(\mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_j^2) - c_{ij}^2 = 0$$

beschrieben werden. Ein Massenpunkt, der gezwungen ist, sich längs einer Kurve oder einer Fläche zu bewegen, ist ein anderes leicht überschaubares Beispiel für holonome

Randbedingungen, wobei die Gleichung der Kurve oder Fläche gleichzeitig die Randbedingung angibt.

Randbedingungen, die nicht auf diese Weise ausgedrückt werden können, heißen *nichtholonome*. Die Wände eines Behälters bewirken eine nichtholonome Randbedingung auf die darin enthaltenen Gasmoleküle. Die Randbedingung für einen Massenpunkt auf der Oberfläche einer Kugel ist auch nichtholonome, denn sie kann als Ungleichung

$$r^2 - a^2 \geq 0$$

geschrieben werden (wobei  $a$  der Radius der Kugel ist), die nicht die Form von Gl. (1.37) hat. Daher wird ein Massenpunkt, der in einem Gravitationsfeld auf die oberste Stelle der Kugel gelegt wird, ein Stück die Oberfläche herunterrollen und dann herunterfallen.

Randbedingungen werden weiterhin danach eingeteilt, ob die zugehörigen Gleichungen die Zeit explizit enthalten (*rheonome* Randbedingungen) oder zeitunabhängig sind (*skleronome* Randbedingungen). Wenn eine Perle sich auf einem ruhenden Draht entlang bewegt, handelt es sich um eine skleronome Randbedingung; bewegt sich der Draht dabei selbst auf definierte Weise fort, so handelt es sich um eine rheonome Randbedingung. Wenn sich der Draht aber nur als Reaktion auf die Bewegung der Perle bewegt, so geht die Zeitabhängigkeit der Randbedingung nur indirekt durch die Koordinaten des Drahtes (die Teil der Systemkoordinaten sind) in die Gleichung für die Randbedingung ein; insgesamt ist die Randbedingung dann skleronom.

Randbedingungen führen zu zwei Komplikationen bei der Lösung mechanischer Probleme. Erstens sind die Koordinaten  $r_i$  nicht länger alle unabhängig, da sie durch die Gleichungen der Randbedingungen miteinander verknüpft sind. Folglich sind die Bewegungsgleichungen (1.19) nicht mehr unabhängig voneinander. Zweitens sind die Zwangskräfte (z.B. die Kraft, die der Draht auf die Perle oder die Wandung auf die Gasteilchen ausübt) nicht *a priori* bekannt. Sie gehören zu den Unbekannten des Problems und müssen als Teil der gesuchten Lösung bestimmt werden. Die Angabe von Randbedingungen für ein System bedeutet letztlich nichts anderes als die Aussage, dass Kräfte im System vorhanden sind, die nicht im einzelnen angegeben werden können, deren Wirkung auf die Bewegung des Systems aber bekannt sind.

Für holonome Randbedingungen kann die erste Schwierigkeit durch die Einführung *verallgemeinerter Koordinaten* überwunden werden. Bisher haben wir stillschweigend in kartesischen Koordinaten gedacht. Ein System aus  $N$  Massenpunkten ohne Randbedingungen besitzt  $3N$  unabhängige Koordinaten oder *Freiheitsgrade*. Wenn holonome Randbedingungen in Form von  $k$  Gleichungen der Form von Gl. (1.37) existieren, so können wir mit ihrer Hilfe  $k$  der  $3N$  Koordinaten eliminieren, sodass  $3N - k$  unabhängige Koordinaten übrig bleiben. Man spricht dann von  $3N - k$  Freiheitsgraden. Die Eliminierung der abhängigen Variablen kann auch ausgedrückt werden, indem man  $3N - k$  neue, unabhängige Variablen  $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$  einführt. Mit

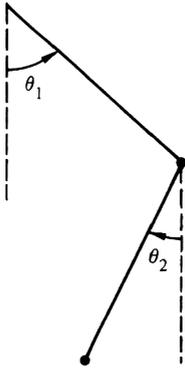


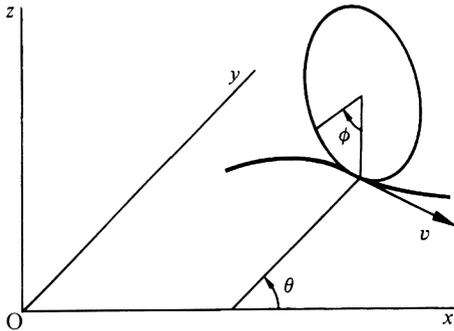
Abbildung 1.4 Ebenes Doppelpendel.

ihrer Hilfe können die alten Koordinaten  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \quad (1.38)$$

ausgedrückt werden, die die Randbedingungen bereits implizit enthalten. Diese Gleichungen können entweder als Transformationsgleichungen zwischen den Variablen  $\mathbf{r}_l$  und den  $q_i$  oder aber als Parameterdarstellungen der  $\mathbf{r}_l$  aufgefasst werden. Dabei wird stets angenommen, dass wir von den  $q_i$  wieder auf die  $\mathbf{r}_l$  zurück transformieren können, d.h., dass wir die Gln. (1.38) zusammen mit den  $k$  Gleichungen für die Randbedingungen invertieren können, um die  $q_i$  als Funktion der  $\mathbf{r}_l$  sowie der Zeit zu erhalten.

Im Allgemeinen lassen sich die verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  nicht wie die kartesischen Koordinaten zu Vektoren zusammenfassen. Für den Fall eines Massenpunkts auf einer Kugeloberfläche sind sinnvolle verallgemeinerte Koordinaten offensichtlich zwei Winkel, die die Lage auf der Kugel beschreiben (z.B. Breite und Länge). Für ein Doppelpendel, das sich in einer Ebene bewegt (zwei Massenpunkte, die durch einen starren, leichten Stab miteinander verbunden sind und die durch einen weiteren Stab an einem der Massenpunkte aufgehängt sind), sind die verallgemeinerten Koordinaten die beiden Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  (Abb. 1.4). Verallgemeinerte (nicht-kartesische) Koordinaten sind oft auch in Systemen ohne Randbedingungen nützlich. Beispielsweise enthält das System eines Massenpunkts in einem äußeren Zentralkraftfeld  $V = V(r)$  keine Randbedingungen, aber es ist offensichtlich vorteilhaft, sphärische Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) anstelle von kartesischen Koordinaten zu verwenden. Wir dürfen bei verallgemeinerte Koordinaten aber nicht nur an die herkömmlichen orthogonalen Ortskoordinaten denken. Als verallgemeinerte Koordinaten eignen sich die unterschiedlichsten Größen. So können die Amplituden in einer Fourierentwicklung von  $\mathbf{r}_j$  als verallgemeinerte Koordinaten verwendet werden, während es in anderen Fällen zweckmäßig sein kann, Größen mit der Dimension einer Energie oder eines Drehimpulses zu verwenden.



**Abbildung 1.5** Eine vertikale Scheibe, die auf einer horizontalen Ebene rollt.

Wenn die Randbedingung nichtholonom ist, so können wir die Gleichungen für die Randbedingungen nicht verwenden, um die abhängigen Variablen zu eliminieren. Ein häufiges Beispiel für ein System mit einer nichtholonomen Randbedingung ist ein Körper, der auf einer rauen Fläche rollt, ohne zu rutschen. Die zur Beschreibung des Systems benutzten Koordinaten werden im Allgemeinen Winkelkoordinaten enthalten, um die Orientierung des Körpers anzugeben, und Koordinaten, die den Ort des Körpers auf der Fläche beschreiben. Die Randbedingung „Rollen“ verbindet diese zwei Sätze von Koordinaten; sie sind nicht unabhängig. Eine Änderung der Orientierung des Körpers bedeutet unvermeidlich eine Änderung seiner Lage. Trotzdem können wir die Anzahl der Koordinaten nicht verringern, denn die Bedingung „Rollen“ kann nicht durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten im Sinne von Gl. (1.37) beschrieben werden. Es handelt sich hier um eine Bedingung für die *Geschwindigkeiten* (d.h. der Berührungspunkt ist stationär), also um eine Differentialbedingung, die erst nach der Lösung des Problems in integrierter Form angegeben werden kann.

Ein einfaches Beispiel soll diesen Punkt illustrieren. Wir betrachten eine Scheibe, die auf der horizontalen  $xy$ -Ebene rollt, wobei die Ebene der Scheibe stets vertikal sein soll. Um ihre Bewegung zu beschreiben, können wir die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Scheibenzentrums verwenden, einen Drehwinkel  $\phi$  um die Scheibenachse und einen Winkel  $\theta$  zwischen Scheibenachse und  $x$ -Achse (Abb. 1.5). Die Randbedingung bewirkt, dass der Betrag der Geschwindigkeit  $v$  des Scheibenzentrums proportional zu  $\dot{\phi}$  ist,

$$v = a\dot{\phi},$$

wobei  $a$  der Radius der Scheibe ist. Ihre Geschwindigkeit steht senkrecht zur Scheibenachse,

$$\dot{x} = v \sin \theta,$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta.$$

Wenn wir diese Bedingungen kombinieren, so erhalten wir zwei *Differentialgleichungen* für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} dx - a \sin \theta d\phi &= 0, \\ dy + a \cos \theta d\phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Diese Gleichungen können nicht integriert werden, bevor das vollständige Problem gelöst ist, d.h. wir können keinen integrierenden Faktor  $f(x, y, \theta, \phi)$  finden, der eine der Gleichungen in ein exaktes Differential überführt (vgl. Aufgabe 4)<sup>2</sup>. Folglich können die Randbedingungen nicht in der Form von Gl. (1.37) geschrieben werden; sie sind also nichtholonom. Physikalisch betrachtet sehen wir, dass es keinen direkten Zusammenhang zwischen  $\phi$  und den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $\theta$  geben kann, da die Scheibe an jedem Punkt ihrer Bahn in einem tangential zu ihrer momentanen Bahn liegenden Kreis mit beliebigen Radius rollen kann. Am Ende eines solchen Prozesses besitzen die Variablen  $x$ ,  $y$  und  $\theta$  wieder ihre ursprünglichen Werte, während  $\phi$  sich um einen Betrag verändert hat, der vom Radius des durchlaufenen Kreises abhängt.

Natürlich stellen nichtintegrierte Differentialgleichungen wie Gl. (1.39) nicht die einzige Art nichtholonomer Randbedingungen dar. Ebenso können Randbedingungen in Form von höheren Ableitungen oder – wie wir bereits gesehen haben – von Ungleichungen auftreten.

Probleme mit holonomen Randbedingungen sind immer formal lösbar, teilweise deshalb, weil die abhängigen Koordinaten eliminiert werden können. Es gibt aber kein allgemeines Verfahren zur Lösung von nichtholonomen Fällen. Wenn es sich um nichtintegrierte Randbedingungen handelt, können die Differentialgleichungen der Randbedingungen mit den Differentialgleichungen der Bewegung kombiniert und die abhängigen Gleichungen mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren eliminiert werden.

Wir werden auf diese Methode später zurückkommen. Die gemeineren Fälle mit nichtholonomen Randbedingungen müssen individuell behandelt werden, und folglich muss bei der Entwicklung der formalen klassischen Mechanik fast immer angenommen werden, dass jede eventuell vorliegende Randbedingung holonom ist. Diese Einschränkung beschränkt die Anwendbarkeit der Theorie nicht sehr, obwohl viele der Randbedingungen, die uns in der Wirklichkeit begegnen, nichtholonom sind. Der Grund dafür ist, dass das gesamte Konzept der Randbedingungen, denen ein System durch das Vorhandensein von Drähten, Flächen oder Wänden unterworfen ist, nur für makroskopische oder räumlich sehr ausgedehnte Probleme geeignet ist. Physiker sind aber vorwiegend an atomaren oder subatomaren Problemen interessiert. Hier bestehen alle Objekte, egal ob innerhalb oder außerhalb des Systems, aus Molekülen, Atomen oder kleineren Massenpunkten, die definierte Kräfte aufeinander ausüben, und der Begriff der Randbedingung wird willkürlich und taucht selten auf. Randbedin-

2) In Systemen mit nur zwei Koordinaten kann für eine Differentialgleichung erster Ordnung als Randbedingung stets ein integrierender Faktor gefunden werden; daher sind derartige Randbedingungen automatisch holonom. Ein bekanntes Beispiel ist die zweidimensionale Bewegung eines Kreises, der auf einer geneigten Ebene rollt.

gungen werden dann nur als mathematische Idealisierungen der realen physikalischen Situation oder als klassische Näherungen für eine quantenmechanische Eigenschaft eingesetzt – z.B. die Rotation eines starren Körpers anstelle des „Spins“. Derartige Randbedingungen sind stets holonom und fügen sich ohne Schwierigkeit in die Theorie ein.

Um die zweite Komplikation zu überwinden, dass nämlich die Zwangskräfte *a priori* unbekannt sind, formulieren wir die Mechanik so, dass die Zwangskräfte verschwinden. Wir brauchen uns dann nur mit den bekannten Kräften im System zu befassen. Einen Hinweis auf ein geeignetes Vorgehen gibt die Tatsache, dass in einem speziellen System mit Randbedingungen, nämlich einem starren Körper, die von den inneren Kräften (die hier die Zwangskräfte sind) geleistete Arbeit verschwindet. Wir werden diesen Anhaltspunkt in den nachfolgenden Abschnitten verfolgen und die darin enthaltenen Ideen verallgemeinern.

## 1.4

### Das Prinzip von d'Alembert und die Lagrange-Gleichungen

Unter einer virtuellen (infinitesimalen) Verrückung eines Systems versteht man eine Veränderung der Konfiguration des Systems als Ergebnis beliebiger infinitesimaler Koordinatenänderungen  $\delta \mathbf{r}_i$ , die mit den Randbedingungen im Einklang stehen, denen das System zu einem Zeitpunkt  $t$  unterliegt. Die Verrückung wird virtuell genannt, um sie von einer realen Verrückung des Systems zu unterscheiden, die während eines Zeitintervalls  $dt$  stattfindet, in dem sich die Kräfte und Randbedingungen ändern können. Wir setzen voraus, dass das System im Gleichgewicht ist, dass also die an jedem Massenpunkt angreifende Gesamtkraft verschwindet:  $\mathbf{F}_i = 0$ . Dann muss offensichtlich auch das Skalarprodukt  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$  verschwinden, also die virtuelle Arbeit der Kraft  $\mathbf{F}$  entlang der Verrückung  $\delta \mathbf{r}_i$ . Die Summe dieser verschwindenden Skalarprodukte über alle Massenpunkt muss folglich ebenfalls null sein:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.40)$$

So weit sind wir auf nichts physikalisch Neues gestoßen. Nun teilen wir die  $\mathbf{F}_i$  in die ausgeübte Kraft  $\mathbf{F}_i^{(a)}$  und die Zwangskraft  $\mathbf{f}_i$  auf,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (1.41)$$

und erhalten so aus Gl. (1.40)

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.42)$$

Wir beschränken uns nun auf Systeme, für die *die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich null ist*. Wir haben bereits gesehen, dass diese Bedingung beispielsweise für starre Körper erfüllt ist; dasselbe trifft aber auch auf eine große Zahl anderer

Randbedingungen zu. Wenn sich ein Massenpunkt auf einer Fläche bewegen muss, so steht die Zwangskraft senkrecht auf der Fläche, während die virtuelle Verrückung tangential zu ihr erfolgt, also im rechten Winkel zur Zwangskraft; die virtuelle Arbeit verschwindet folglich. Wenn Gleitreibung vorliegt, gilt das jedoch nicht mehr; solche Systeme werden wir daher vermeiden. Diese Einschränkung ist glücklicherweise nicht so gravierend, wie es zunächst den Anschein haben mag, denn die Reibung ist im wesentlichen eine makroskopische Erscheinung. Rollreibungskräfte verletzen die angegebene Bedingung nicht, da hier die Kräfte an einem ruhenden Punkt angreifen und daher bei einer mit den Randbedingungen im Einklang stehenden infinitesimalen Verrückung keine Arbeit leisten können. Wenn sich ein Massenpunkt auf einer ihrerseits bewegten Fläche fortbewegt, so ist die Zwangskraft in jedem Augenblick senkrecht zur Oberfläche, und die Arbeit entlang einer virtuellen Verrückung ist immer noch null, obwohl die Arbeit entlang einer realen Verrückung in der Zeit  $dt$  nicht unbedingt verschwinden muss.

Für das Gleichgewicht des Systems erhalten wir somit die Bedingung, dass die virtuelle Arbeit der ausgeübten Kräfte verschwinden muss,

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.43)$$

Gleichung (1.43) wird oft *Prinzip der virtuellen Arbeit* genannt. Die Koeffizienten der  $\delta \mathbf{r}_i$  dürfen hier nicht einfach gleich null gesetzt werden, d.h. im Allgemeinen ist  $\mathbf{F}_i^{(a)} \neq 0$ . Der Grund dafür ist einfach, dass die  $\delta \mathbf{r}_i$  nicht unabhängig sind, sondern über die Randbedingungen miteinander zusammenhängen. Um die Koeffizienten zum Verschwinden zu bringen, muss man das Prinzip in eine Form überführen, die die voneinander unabhängigen virtuellen Verrückungen der  $q_i$  enthält. Genau dies erreicht Gl. (1.41), da sie die  $\mathbf{f}_i$  nicht enthält; sie gilt aber nur für den statischen Fall, während wir eine Bedingung benötigen, die die allgemeine Bewegung des Systems beschreibt. Um zu einem solchen Prinzip zu gelangen, machen wir von einem Kunstgriff Gebrauch, der zuerst von Jacob Bernoulli eingeführt und später von d'Alembert weiterentwickelt wurde. Die Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$$

können in der Form

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$$

geschrieben werden. Diese Beziehung besagt, dass sich die Massenpunkte eines Systems im Gleichgewicht befinden, wenn die auf sie einwirkende Kraft gleich der Summe aus der tatsächlich ausgeübten Kraft plus einer „entgegengesetzt wirkenden effektiven Kraft“  $-\dot{\mathbf{p}}_i$  ist. Anstelle von Gl. (1.40) können wir sofort schreiben

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (1.44)$$

und wenn wir wieder wie oben die Aufteilung in ausgeübte Kräfte und Zwangskräfte vornehmen, erhalten wir

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Wir beschränken uns wieder auf Systeme, für die die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, und erhalten daher

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.45)$$

Diese Beziehung wird oft als *Prinzip von d'Alembert* bezeichnet. Wir haben damit unser Ziel erreicht: Die Zwangskräfte tauchen nicht mehr in der Gleichung auf, sodass wir den Index <sup>(a)</sup> nun weglassen können, ohne Unklarheiten zu riskieren. Die Beziehung ist aber noch nicht geeignet, um daraus Bewegungsgleichungen für das System ableiten zu können. Dazu müssen wir das Prinzip so umformulieren, dass es die virtuellen Verrückungen der verallgemeinerten Koordinaten enthält, die (für holonome Randbedingungen) voneinander unabhängig sind, sodass die Koeffizienten der  $\delta q_i$  einzeln null gesetzt werden können.

Die Transformation von den  $\mathbf{r}_i$  zu den  $q_i$  erfolgt auf der Grundlage der Transformationsgleichungen (1.38),

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.45')$$

(für  $n$  unabhängige Koordinaten) und der üblichen Rechenregeln für die partielle Differentiation. So sind die  $\mathbf{v}_i$  über die Beziehung

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.46)$$

mit den  $\dot{q}_k$  verknüpft. Entsprechend hängen die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  mit den virtuellen Verrückungen  $\delta q_i$  durch

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.47)$$

zusammen. Hier taucht keine Variation  $\delta t$  der Zeit auf, da sich die virtuellen Verrückungen definitionsgemäß nur auf Auslenkungen der Koordinaten beziehen. (Nur dann ist die virtuelle Verrückung immer senkrecht zur Zwangskraft, auch wenn sich die Randbedingung selbst im Laufe der Zeit ändert.)

Mithilfe verallgemeinerter Koordinaten lässt sich die virtuelle Arbeit der Kräfte  $\mathbf{F}_i$  als

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j \end{aligned} \quad (1.48)$$

schreiben, wobei die  $Q_j$  die Komponenten der *verallgemeinerten Kraft* sind, die durch

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.49)$$

definiert sind. Dabei müssen die  $Q_j$  nicht unbedingt die Dimension einer Kraft besitzen, genau wie die  $q_j$  auch nicht die Dimension einer Länge besitzen müssen; das Produkt  $Q_j q_j$  muss aber stets die Dimension einer Arbeit haben. Beispielsweise kann  $Q_j$  ein Drehmoment  $N_j$  und  $dq_j$  ein differentieller Winkel  $d\theta_j$  sein; das Produkt  $Q_j dq_j$  entspricht dann wie verlangt einer differentiellen Arbeit.

Wir wenden uns jetzt dem anderen Term in Gl. (1.45) zu, der in der Form

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

geschrieben werden kann. Nun drücken wir die  $\delta \mathbf{r}_i$  durch Gl. (1.47) aus und erhalten

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Betrachten wir nun die Beziehung

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (1.50)$$

Im letzten Term von Gl. (1.50) können wir die Reihenfolge der Differentiation nach  $t$  und  $q_j$  vertauschen, denn in Analogie zu Gl. (1.46) gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Außerdem sehen wir aus Gl. (1.46), dass

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.51)$$

Wenn wir das in Gl. (1.50) einsetzen, so erhalten wir

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right],$$

und der zweite Term auf der linken Seite von Gl. (1.45) wird zu

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$  ist gerade die kinetische Energie  $T$  des Systems; damit erhalten wir das Prinzip von d'Alembert [Gl. (1.45)] in der Form

$$\sum_j \left\{ \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (1.52)$$

In einem kartesischen Koordinatensystem verschwinden die partiellen Ableitungen von  $T$  nach den  $q_j$  und folglich auch die nach  $dq/dt$ . In der Sprache der Differentialgeometrie heißt das, dass dieser Term aufgrund der Krümmung der Koordinaten  $q_j$  entsteht. In Polarkoordinaten taucht die Zentripetalbeschleunigung in der partiellen Ableitung von  $T$  nach der Winkelkoordinate auf. Dabei ist zu beachten, dass  $T$  nur für Inertialsysteme eine Bedeutung besitzt.

Bis jetzt haben wir keinerlei Bedingung an die Randbedingungen gestellt außer dass die von ihnen verursachte Arbeit bei virtuellen Verrückungen null sein soll. Die Variablen  $q_j$  können beliebige Koordinaten sein, mit denen die Bewegung des Systems beschrieben werden kann. Wenn die Randbedingungen jedoch holonom sind, dann können wir unabhängige Koordinaten  $q_j$  finden, die die Randbedingungen implizit in den Transformationsgleichungen (1.38) enthalten. Eine beliebige virtuelle Verrückung  $\delta q_j$  ist dann unabhängig von  $\delta q_k$ , und Gl. (1.52) kann nur dann erfüllt sein, wenn alle einzelnen Koeffizienten verschwinden,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1.53)$$

Insgesamt gibt es  $n$  solcher Gleichungen.

Wenn die Kräfte aus einer skalaren Potentialfunktion  $V$  hergeleitet werden können, dann ist

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

In diesem Fall können wir die verallgemeinerten Kräfte als

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

schreiben. Das ist genau der Ausdruck für die partielle Ableitung einer Funktion  $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  nach  $q_j$ ,

$$Q_j \equiv - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (1.54)$$

Damit wird aus Gl. (1.53)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (1.55)$$

In dieser Form sind die Bewegungsgleichungen nicht auf konservative Systeme beschränkt; das System ist nur dann konservativ, wenn  $V$  nicht explizit von der Zeit

abhängt (vgl. S. 5). So wie wir es hier definiert haben, hängt das Potential  $V$  nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten ab. Daher können wir einen Term mit  $V$  in die partielle Ableitung von nach den  $\dot{q}_j$  einfügen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0.$$

Wir definieren nun die *Lagrange-Funktion*  $L$  als

$$L = T - V; \quad (1.56)$$

damit werden die Gln. (1.53) zu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (1.57)$$

Diese Beziehungen werden auch als *Lagrange-Gleichungen* bezeichnet.

Für einen gegebenen Satz von Bewegungsgleichungen gibt es keine eindeutige Wahl der Lagrange-Funktion in dem Sinn, dass die Gln. (1.57) auf die Bewegungsgleichungen in dem gewünschten Satz von verallgemeinerten Koordinaten führen. In den *Aufgaben* 8 und 10 wird daher gezeigt, dass wenn  $L(q, \dot{q}, t)$  eine gültige Lagrange-Funktion und  $F(q, t)$  eine *beliebige* differenzierbare Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit sind, die Funktion

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt} \quad (1.57')$$

ebenfalls eine Lagrange-Funktion ist, die zu denselben Bewegungsgleichungen führt. Oft ist es auch möglich, weitere Lagrange-Funktionen zu finden, die nicht aus dieser Vorschrift entstehen (siehe Aufgabe 20). Gleichung (1.56) ergibt stets eine korrekte Lagrange-Funktion für ein konservatives System; sie liefert aber nicht die einzige für dieses System mögliche Lagrange-Funktion.

## 1.5

### Geschwindigkeitsabhängige Potentiale und die Dissipationsfunktion

Die Lagrange-Gleichungen können auch dann in die Form von Gl. (1.57) gebracht werden, wenn keine Potentialfunktion  $V$  im üblichen Sinn existiert, sofern die verallgemeinerten Kräfte von einer Funktion  $U(q_j, \dot{q}_j)$  gemäß

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (1.58)$$

abgeleitet sind. In diesem Fall folgen die Gln. (1.57) aus den Gln. (1.53), sofern die Lagrange-Funktion als

$$L = T - U \quad (1.59)$$

definiert ist.  $U$  kann als „verallgemeinertes“ oder „geschwindigkeitsabhängiges Potential“ bezeichnet werden. Ein solches „Potential“ ist nicht nur von rein akademischem Interesse; es findet Anwendung bei einem sehr wichtigen Typ von Kraftfeldern, nämlich den elektromagnetischen Kräften auf bewegte Ladungen. Mit Blick auf die enorme Bedeutung dieses Gebiets wollen wir hier noch etwas verweilen.

Wir betrachten eine elektrische Ladung  $q$  mit der Masse  $m$ , die sich mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem ansonsten feldfreien Gebiet bewegt, das von einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$  erfüllt wird, die beide vom Ort und von der Zeit abhängen. Die Ladung spürt dann die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] . \quad (1.60)$$

Sowohl  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  als auch  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  sind stetige Funktionen von Ort und Zeit, die aus einem Skalarpotential  $\phi(x, y, z, t)$  und einem Vektorpotential  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  gemäß

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.61a)$$

bzw.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.61b)$$

abgeleitet werden können. Die Kraft auf die Ladung kann aus der folgenden geschwindigkeitsabhängigen potentiellen Energie bestimmt werden:

$$U = q\phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} . \quad (1.62)$$

Die Lagrange-Funktion  $L = T - U$  ist somit

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} . \quad (1.63)$$

Wenn wir nur die  $x$ -Komponente der Lagrange-Gleichungen betrachten, dann erhalten wir

$$m\ddot{x} = q \left( v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - q \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{dA_x}{dt} \right) . \quad (1.64)$$

Das totale Differential von  $A_x$  hängt mit der partiellen Ableitung von  $A_x$  nach der Zeit durch

$$\begin{aligned} \frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A_x \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.65)$$

zusammen. Durch Kombination dieser Gleichungen erhalten wir die Bewegungsgleichungen des Systems für die  $x$ -Richtung,

$$m\ddot{x} = q[E_x + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x] . \quad (1.66)$$

Der komponentenweise Vergleich von Gl. (1.66) mit Gl. (1.60) zeigt, dass die beiden Gleichungen identisch sind, folglich kann die Gleichung für die Lorentz-Kraft aus den Gln. (1.61) und (1.62) abgeleitet werden.

Wenn nicht alle der auf das System wirkenden Kräfte aus einem Potential ableitbar sind, können die Lagrange-Gleichungen stets in der Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

geschrieben werden, wobei  $L$  wie gewohnt das Potential der konservativen Kräfte enthält und  $Q_j$  die Kräfte beschreibt, die nicht von einem Potential herrühren. Eine solche Situation liegt oft vor, wenn Reibungskräfte auftreten. Reibungskräfte sind häufig proportional zur Geschwindigkeit des Massenpunkts, sodass ihre  $x$ -Komponente die Form

$$F_{R,x} = -k_x v_x$$

besitzt. Reibungskräfte dieses Typs können durch eine Funktion  $\mathcal{F}$ , die *Rayleighsche Dissipationsfunktion*, beschrieben werden. Ihre Definition ist

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_{i,x} v_{i,x}^2 + k_{i,y} v_{i,y}^2 + k_{i,z} v_{i,z}^2), \quad (1.67)$$

wobei die Summation über alle Massenpunkte des Systems erfolgt. Aus dieser Definition folgt offensichtlich

$$F_{R,x_i} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{x_i}},$$

oder symbolisch

$$\mathbf{F}_R = -\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F}. \quad (1.68)$$

Man kann die Dissipationsfunktion auch physikalisch interpretieren. Die *vom* System *gegen* die Reibung geleistete Arbeit ist

$$dW_R = -\mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_R \cdot \mathbf{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt.$$

Demnach ist  $2\mathcal{F}$  der Anteil an der Energiedissipation, der von der Reibung herrührt. Die Komponente der verallgemeinerten Kraft, die aus der Reibungskraft resultiert, ist

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \mathbf{F}_{R,i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad [\text{wegen Gl. (1.51)}] \\ &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Ein Beispiel hierfür ist das Stokessche Gesetz für eine Kugel mit Radius  $a$ , die sich mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem Medium der Viskosität  $\eta$  bewegt und dabei eine Reibungskraft  $\mathbf{F}_R = 6\pi\eta a\mathbf{v}$  erfährt.

Die Lagrange-Gleichungen mit Dissipation lauten

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0; \quad (1.70)$$

es sind folglich zwei skalare Funktionen  $L$  und  $\mathcal{F}$  nötig, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

## 1.6

### Einfache Anwendungen der Lagrange-Gleichungen

Die vorigen Abschnitte zeigen, dass uns für Systeme, für die man eine Lagrange-Funktion definieren kann, d.h. für holonome Systeme mit Kräften, die von einem gewöhnlichen oder verallgemeinerten Potential herleitbar sind, eine recht bequeme Methode zur Verfügung steht, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Den Lagrange-Formalismus erhielten wir aus dem Bestreben, die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. Während wir dieses Ziel erreichten, haben wir noch viele weitere Vorteile realisiert. Wenn wir die Bewegungsgleichungen in ihrer ursprünglichen Form aus Gl. (1.19) aufstellen, so müssen wir mit vielen *vektoriellen* Kräften und Beschleunigungen umgehen. Bei dem Verfahren nach Lagrange brauchen wir lediglich zwei *skalare* Funktionen  $T$  und  $V$ , was die Situation erheblich vereinfacht.

Wir können nun ein Standardverfahren für alle Probleme der Mechanik erstellen, auf die der Formalismus von Lagrange anwendbar ist. Dazu müssen wir nur  $T$  und  $V$  in verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken, aus ihnen  $L$  bilden und in Gl. (1.57) einsetzen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten. Die benötigte Transformation von  $T$  und  $V$  von kartesischen auf verallgemeinerte Koordinaten erreichen wir durch Anwendung der Transformationsgleichungen (1.38) und (1.45'). So ist  $T$  im Allgemeinen durch

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

gegeben. Wenn man die Entwicklung durchführt, zeigt sich schnell, dass  $T$  in verallgemeinerten Koordinaten die Form

$$T = M_0 + \sum_j M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (1.71)$$

besitzen muss, wobei  $M_0$ ,  $M_j$  und  $M_{jk}$  Funktionen von  $\mathbf{r}$  und  $t$  und damit von  $q$  und  $t$  sind. Ein Vergleich zeigt, dass

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2, \\ M_j &= \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

und

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}.$$

Die kinetische Energie eines Systems kann daher stets als Summe dreier homogener Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten geschrieben werden,

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1.73)$$

wobei  $T_0$  nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt,  $T_1$  linear und  $T_2$  quadratisch in ihnen ist. Wenn die Transformationsgleichungen die Zeit nicht explizit enthalten, was möglich ist wenn die Randbedingungen unabhängig von der Zeit (skleronom) sind, dann ist nur der letzte Term in Gl. (1.71) von null verschieden und  $T$  ist immer eine homogene quadratische Form in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

Wir wollen nun einige einfache Beispiele für dieses Verfahren betrachten.

1. Ein einzelner Massenpunkt im Raum

- a) Kartesische Koordinaten
- b) Zweidimensionale Polarkoordinaten

2. Die Fallmaschine nach Atwood

3. Zeitabhängige Randbedingungen: eine Perle auf einem rotierenden Draht

1. *Bewegung eines einzelnen Massenpunkts*

a) *Behandlung in kartesischen Koordinaten.*

Die in Gl. (1.53) benötigten verallgemeinerten Kräfte sind offensichtlich  $F_x$ ,  $F_y$  und  $F_z$ . Damit wird

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \end{aligned}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \quad (1.74)$$

Wir sind damit wieder bei den ursprünglichen Newtonschen Bewegungsgleichungen gelandet.

b) *Behandlung in zweidimensionalen Polarkoordinaten.*

Nun müssen wir  $T$  durch  $\dot{r}$  und  $\dot{\theta}$  ausdrücken. Die Transformationsgleichungen (1.38) lauten in diesem Fall einfach

$$x = r \cos \theta \quad \text{und} \quad y = r \sin \theta.$$

In Analogie zu Gl. (1.46) sind die Geschwindigkeiten durch

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad \text{und} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta.$$

Die kinetische Energie  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  lässt sich damit als

$$T = \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] \quad (1.75)$$

schreiben.

Eine alternative Herleitung von Gl. (1.75) ohne Weglassen der  $z$ -Koordinate ist möglich, wenn man beachtet, dass die Komponenten der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten folgendermaßen angegeben werden können:  $\dot{r}$  entlang  $\mathbf{r}$  und  $r\dot{\theta}$  in der Richtung senkrecht zu  $\mathbf{r}$ , die wir durch den Einheitsvektor  $\hat{\theta}$  bezeichnen. Somit ist das Quadrat der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten,  $\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ . Mithilfe der Beziehung

$$d\mathbf{r} = \hat{r} dr + r\hat{\theta} d\theta + \hat{k} dz$$

für den differentiellen Ortsvektor  $d\mathbf{r}$  in Zylinderkoordinaten unter der Einschränkung  $z = 0$  ( $\hat{r}$  und  $\hat{\theta}$  sind die Einheitsvektoren in  $\mathbf{r}$ - und  $\theta$ -Richtung) erhalten wir die Komponenten der verallgemeinerten Kraft aus der Definition Gl. (1.49)

$$Q_r = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \hat{r} = F_r,$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot r\hat{\theta} = rF_\theta,$$

da die Ableitung von  $\mathbf{r}$  bezüglich  $\theta$  (aufgrund der Definition einer Ableitung) ein Vektor in Richtung  $\hat{\theta}$  ist (Abb. 1.6). Es gibt hier zwei verallgemeinerte Koordinaten und deshalb zwei Lagrange-Gleichungen. Die Ableitungen, die in der Gleichung für  $r$  auftreten, sind

$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r},$$

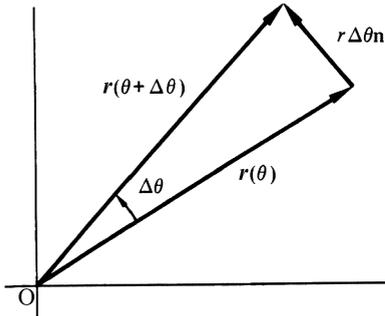


Abbildung 1.6 Die Ableitung von  $r$  nach  $\theta$ .

und die Gleichung selbst lautet

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r,$$

wobei der zweite Term die Zentripetalbeschleunigung beschreibt. Für die Gleichung in  $\theta$  sind die benötigten Ableitungen

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

sodass wir für die Gleichung erhalten

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade die Ableitung des Drehimpulses nach der Zeit und die rechte Seite das angewendete Drehmoment. Somit haben wir wieder die Drehimpuls-Gleichung (1.26) mit  $L = mr^2\dot{\theta}$  und  $N^{(e)} = rF_\theta$  hergeleitet.

2. Die Fallmaschine nach Atwood (Abb. 1.7) ist ein Beispiel für ein konservatives System mit holonomen skleronomen Randbedingungen (die Rolle soll masselos sein und sich ohne Reibung drehen). Offensichtlich gibt es hier nur eine unabhängige Koordinate  $x$ ; die Lage des zweiten Gewichts ist durch die Randbedingung bestimmt, dass die Länge des Seils zwischen den Gewichten gleich  $l$  ist. Die potentielle Energie ist

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x);$$

die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2.$$

Wenn wir beide Gleichungen kombinieren, erhalten wir die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1gx + M_2g(l - x).$$

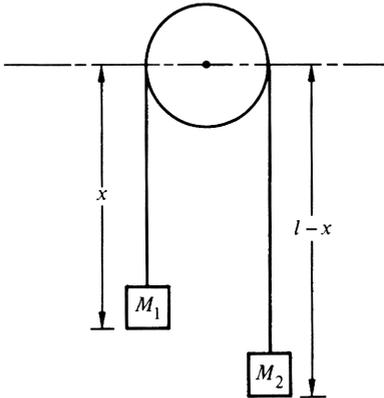


Abbildung 1.7 Die Fallmaschine nach Atwood.

Es gibt hier nur eine Bewegungsgleichung, die die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}$$

enthält. Folglich ist

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g$$

oder

$$\ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g .$$

Das ist das bekannte Ergebnis, das auch auf elementare Weise erhalten werden kann. Dieses triviale Beispiel zeigt besonders deutlich, dass die Zwangskräfte – hier die Seilspannung – nirgends im Lagrange-Formalismus erscheinen.

3. *Eine auf einem rotierenden Draht in einem kräftefreien Raum gleitende Perle.*  
 Der Draht soll in diesem Beispiel gerade sein und in der  $xy$ -Ebene liegen, während er gleichförmig um die  $z$ -Achse rotiert. Dieses System soll als einfaches Beispiel für eine zeitabhängige Randbedingung dienen; die Transformationsgleichungen enthalten hier die Zeit explizit,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t & (\omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Rotation}) , \\ y &= r \sin \omega t & (r = \text{Entfernung von der Rotationsachse auf dem Draht}) . \end{aligned}$$

Obwohl wir  $T$  (hier gleich  $L$ ) auf dem gleichen Wege finden könnten, der uns zu Gl. (1.71) geführt hatte, ist es einfacher, Gl. (1.64) direkt zu verwenden. Wir drücken die Randbedingung durch die Beziehung  $\dot{\theta} = \omega$  aus und erhalten

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) .$$

$T$  ist jetzt keine homogene quadratische Funktion der verallgemeinerten Koordinaten mehr, weil nun ein zusätzlicher Term auftritt, der  $\dot{r}$  nicht enthält. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0$$

oder

$$\ddot{r} = r\omega^2 .$$

Das ist die bekannte Gleichung für einen harmonischen Oszillator, nur mit einem anderen Vorzeichen. Die Lösung  $r = e^{\omega t}$  für eine anfänglich auf dem Draht ruhende Perle zeigt, dass die Perle bei der Rotation exponentiell nach außen beschleunigt wird. Auch hier gibt die Methode keinen Hinweis auf die Zwangskraft, die die Perle auf dem Draht hält. Gleichung (1.26) liefert mithilfe des Drehimpulses  $L = mr^2\omega = mr_0^2 e^{2\omega t}$  die Kraft  $F = N/r$  und somit die Zwangskraft  $F = 2mr_0\omega^2 e^{\omega t}$ , die senkrecht auf dem Draht und der Drehachse steht. Die Lösung kann allgemeiner gefasst werden, indem  $e^{\omega t}$  durch  $r_0 \cosh \omega t$  bzw. eine Summe von sinh- und cosh-Termen, der Exponentialterm im Drehimpuls durch  $\cosh^2 \omega t + \dots$  und  $e^{\omega t}$  in der Kraft durch  $\sinh \omega t$  ersetzt wird.

### Theoretische Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für einen einzelnen Massenpunkt mit konstanter Masse auf folgende Differentialgleichung für die kinetische Energie führt:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ,$$

während die entsprechende Gleichung für eine veränderliche Masse

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

lautet.

2. Zeigen Sie, dass der Betrag  $R$  des Ortsvektors des Schwerpunkts von einem beliebigen Koordinatenursprung aus durch die Beziehung

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_i m_j r_{ij}^2$$

gegeben ist.

3. Ein System aus zwei Massenpunkten soll die Bewegungsgleichungen (1.22) und (1.26) befolgen. Zeigen Sie mithilfe der Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte, dass die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten sowohl das schwache als auch das starke Wechselwirkungsprinzip erfüllen. Der verwendete Gedankengang kann auf ein System aus beliebig vielen Massenpunkten verallgemeinert werden und beweist so die Umkehrung der Schlussfolgerungen, die zu den Gln. (1.22) und (1.26) geführt hatten.
4. Die Gln. (1.39) für die Randbedingungen der rollenden Scheibe sind Spezialfälle allgemeiner linearer Differentialgleichungen für Randbedingungen der Form

$$\sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

Eine Gleichung dieser Form für eine Randbedingung ist nur dann holonom, wenn ein integrierender Faktor  $f(x_1, \dots, x_n)$  existiert, der das Differential exakt macht. Diese Funktion muss offensichtlich die Bedingung

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}$$

für alle  $i \neq j$  erfüllen. Zeigen Sie, dass für keine der Gln. (1.39) ein solcher Faktor existiert.

5. Zwei Räder mit Radius  $a$  sind so auf die Enden einer gemeinsamen Achse der Länge  $b$  montiert, dass sie sich unabhängig voneinander drehen können. Die ganze Anordnung rollt ohne zu rutschen über eine Ebene. Zeigen Sie, dass für die Randbedingungen zwei nichtholonome Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos \theta dx + \sin \theta dy &= 0, \\ \sin \theta dx - \cos \theta dy &= \frac{1}{2}a(d\phi + d\phi') \end{aligned}$$

(wobei  $\theta$ ,  $\phi$  und  $\phi'$  eine vergleichbare Bedeutung wie bei dem Problem einer rotierenden Scheibe haben und  $(x, y)$  die Koordinaten des Punktes auf der Achse in der Mitte zwischen den beiden Rädern sind) sowie eine holonome Gleichung

$$\theta = C - \frac{a}{b}(\phi - \phi')$$

mit einer Konstante  $C$  existieren.

6. Ein Massenpunkt bewegt sich in der  $xy$ -Ebene unter der Randbedingung, dass sein Geschwindigkeitsvektor immer auf einen Punkt auf der  $x$ -Achse zeigen muss, dessen Abszissenwert durch eine zeitlich veränderliche Funktion  $f(t)$  gegeben ist. Zeigen Sie, dass diese Randbedingung für eine differenzierbare, aber ansonsten völlig beliebige Funktion  $f(t)$  nichtholonom ist.

7. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichungen in der Formulierung von Gl. (1.53) auch als

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

geschrieben werden können. Diese Variante wird manchmal als die *Nielsen-Form* der Lagrange-Gleichungen bezeichnet.

8. Zeigen Sie durch direkte Substitution, dass für eine Lagrange-Funktion  $L$  eines Systems mit  $n$  Freiheitsgraden, das die Lagrange-Gleichungen erfüllt, auch

$$L' = L + \frac{dF(q_1, \dots, q_n, t)}{dt}$$

die Lagrange-Gleichungen erfüllt, wobei  $F$  eine beliebige differenzierbare Funktion der angegebenen Argumente ist.

9. Das elektromagnetische Feld ist invariant unter der durch

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + \nabla \psi(\mathbf{r}, t), \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

(mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion  $\psi$ ) gegebenen Eichtransformation des Skalar- und Vektorpotentials. Welche Auswirkung hat diese Eichtransformation auf die Lagrange-Funktion eines Teilchens, das sich unter dem Einfluss dieses elektromagnetischen Feldes bewegt? Wird seine Bewegung beeinflusst?

10.  $q_1, \dots, q_N$  sei ein Satz verallgemeinerter Koordinaten für ein System mit  $n$  Freiheitsgraden mit einer Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$ . Nun transformieren wir mittels der Transformationsgleichungen

$$q_i = q_i(s_1, \dots, s_n, t), \quad i = 1, \dots, n$$

auf einen zweiten Satz von unabhängigen Koordinaten  $s_1, \dots, s_n$ . (Eine solche Transformation wird als *kanonische Transformation* oder *Punkttransformation* bezeichnet.) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion, wenn man sie als Funktion der  $s_i$ ,  $\dot{s}_i$  und von  $t$  ausdrückt, die Lagrange-Gleichungen in  $s$ -Koordinaten erfüllt,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0.$$

Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass die Form der Lagrange-Gleichungen unter einer kanonischen Transformation invariant ist.

## Rechenaufgaben

11. Betrachten Sie eine homogene, dünne Scheibe, die ohne zu rutschen auf einer horizontalen Ebene rollt. Auf das Zentrum der Scheibe soll eine horizontale Kraft parallel zur Ebene der Scheibe ausgeübt werden. (a) Leiten die die Lagrange-Gleichungen für das System her und geben Sie einen Ausdruck für die verallgemeinerte Kraft an. (b) Diskutieren Sie die Bewegung für den Fall, dass die Kraft nicht parallel zur Ebene der Scheibe wirkt.
12. Die *Fluchtgeschwindigkeit* eines Massenpunkts auf der Erde ist die minimale Geschwindigkeit, die der Massenpunkt auf der Erdoberfläche haben muss, damit er aus dem Gravitationsfeld der Erde entkommen kann. Wenn wir den Luftwiderstand der Atmosphäre vernachlässigen, ist das System konservativ. Zeigen Sie mithilfe des Erhaltungssatzes für die Summe der potentiellen und kinetischen Energie, dass die Fluchtgeschwindigkeit auf der Erde, wenn man die Wirkung des Mondes vernachlässigt, gleich 11,2 km/s ist.
13. Raketen werden durch den Impuls der aus den Raketendüsen ausgestoßenen Gase angetrieben. Da diese Gase Reaktionsprodukte des Treibstoffs sind, der von der Rakete getragen wird, ist die Masse der Rakete nicht konstant; sie nimmt in dem Maß ab, in dem der Treibstoff verbraucht wird. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für eine Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld bei Vernachlässigung des Luftwiderstands vertikal aufwärts abgeschossen wird,

$$m \frac{dv}{dt} = -v' \frac{dm}{dt} - mg$$

lautet, wobei  $m$  die Masse der Rakete und  $v'$  die Geschwindigkeit der austretenden Gase relativ zur Rakete sind. Integrieren Sie diese Gleichung unter der Annahme, dass der Masseverlust zeitlich konstant ist, und bestimmen Sie  $v$  als Funktion von  $m$ . Zeigen Sie, dass für eine aus der Ruhe startende Rakete mit  $v'$  gleich 2,1 km/s und einem Masseverlust von 1/60 der Anfangsmasse pro Sekunde, die die Fluchtgeschwindigkeit erreichen soll, das Gewichtsverhältnis von Treibstoff zu leerer Rakete fast 300 betragen muss!

14. Zwei Massenpunkte der Masse  $m$  sind durch einen starren, gewichtslosen Stab der Länge  $l$  verbunden, dessen Zentrum sich auf einem Kreis mit dem Radius  $a$  bewegt. Geben Sie einen Ausdruck für die kinetische Energie in verallgemeinerten Koordinaten an.
15. Ein Massenpunkt bewegt sich unter dem Einfluss einer Kraft, sie sich aus einem verallgemeinerten Potential der Form

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}$$

ableitet, wobei  $\mathbf{r}$  der Vektor relativ zu einem bestimmten Punkt ist,  $\mathbf{L}$  der Drehimpuls um diesen Punkt und  $\boldsymbol{\sigma}$  ein konstanter Vektor im Raum. (a) Finden Sie

auf der Grundlage von Gl. (1.58) die Komponenten der Kraft in kartesischen und sphärischen Polarkoordinaten. (b) Zeigen Sie, dass die Komponenten in den beiden Koordinatensystemen gemäß Gl. (1.49) miteinander zusammenhängen. (c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in sphärischen Polarkoordinaten auf.

16. Ein Massenpunkt bewegt sich in einer Ebene unter dem Einfluss einer Kraft mit dem Betrag

$$F = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right),$$

die in Richtung auf ein Kraftzentrum wirkt. Dabei ist  $r$  der Abstand des Massenpunkts vom Kraftzentrum. Geben Sie einen Ausdruck für das verallgemeinerte Potential an, das auf eine solche Kraft führt, und stellen Sie damit die Lagrange-Funktion für die Bewegung in einer Ebene auf. (Der Ausdruck für  $F$  ist die Kraft zwischen zwei Ladungen in Webers Formulierung der Elektrodynamik.)

17. Ein in Ruhe befindlicher Atomkern zerfällt radioaktiv, indem er ein Elektron mit dem Impuls  $1.73 \text{ MeV}/c$  und im rechten Winkel dazu ein Neutrino mit dem Impuls  $1.00 \text{ MeV}/c$  emittiert. (MeV, Millionen Elektronenvolt, ist eine in der modernen Hochenergiephysik häufig verwendete Energieeinheit; sie entspricht  $1.60 \times 10^{-13} \text{ J}$ . Entsprechend ist  $\text{MeV}/c$  eine Einheit des Impulses und entspricht  $5.34 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$ .) In welche Richtung wird der Kern zurückgestoßen? Wie groß (in  $\text{MeV}/c$ ) ist sein Impuls? Wenn die Masse des verbleibenden Kerns gleich  $3.90 \times 10^{-25} \text{ kg}$  ist, wie groß (in eV) ist dann seine kinetische Energie?

18. Die Lagrange-Funktion für ein bestimmtes System lautet

$$L' = \frac{m}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) - \frac{K}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2),$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $c$  drei beliebige Konstanten sind, die die Bedingung  $b^2 - ac \neq 0$  erfüllen. Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems? Betrachten Sie vor allem die beiden Fälle  $a = c = 0$  und  $b = 0$ ,  $c = -a$ . Welches physikalische System wird durch diese Lagrange-Funktion beschrieben? Zeigen Sie, dass die übliche Lagrange-Funktion des Systems gemäß Gl. (1.56) durch eine kanonische Transformation mit  $L'$  zusammenhängt (vgl. Aufgabe 10). Was besagt die Einschränkung des Wertes von  $b^2 - ac$ ?

19. Wie lauten die Lagrange-Bewegungsgleichungen für ein sphärisches Pendel, d.h. für einen Massenpunkt an einem starren, gewichtslosen Stab?
20. Ein Massenpunkt bewegt sich in einer Dimension; seine Lagrange-Funktion ist

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x),$$

wobei  $V$  eine differenzierbare Funktion von  $x$  ist. Wie lautet die Bewegungs-

gleichung für  $x(t)$ ? Beschreiben Sie auf ihrer Grundlage die physikalischen Eigenschaften des Systems.

21. Zwei Massenpunkte mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  seien durch einen Faden verbunden, der durch ein Loch in einer glatten Tischplatte führt, und zwar so, dass  $m_1$  auf der Tischoberfläche ruht und  $m_2$  darunter hängt. Wie lauten die verallgemeinerten Koordinaten für das System, wenn sich  $m_2$  nur entlang einer vertikalen Linie bewegt? Geben Sie die Lagrange-Gleichung für das System an und diskutieren Sie, soweit möglich, die physikalische Bedeutung der darin auftretenden Terme. Reduzieren Sie das Problem auf eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung und geben Sie ein Integral der Gleichung an. Welche physikalische Bedeutung hat dieses Integral? (Betrachten Sie die Bewegung nur bis  $m_1$  das Loch erreicht.)
22. Stellen Sie die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel aus Abb. 1.4 mit Pendeln der Länge  $l_1$  und  $l_2$  und Massen  $m_1$  und  $m_2$  auf.
23. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt auf, der unter dem Einfluss der Schwerkraft fällt, wenn Reibungskräfte auftreten, die sich von einer Dissipationsfunktion  $\frac{1}{2}kv^2$  ableiten. Integrieren Sie die Gleichung, bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, und zeigen Sie, dass die größte erreichbare Geschwindigkeit für einen Fall aus der Ruhe  $v = mg/k$  ist.
24. Eine masselose Feder der Ruhelänge  $L_a$  (ohne Spannung) ist auf einer Seite aufgehängt; an ihrem anderen Ende ist ein Massenpunkt der Masse  $M$  befestigt, der sich in einer senkrechten Ebene bewegen kann. Nehmen Sie an, dass die Feder sich dehnen, aber nicht verbiegen kann, und dass Sie in einer Ebene schwingen kann. (a) Verwenden Sie die Winkelauslenkung der Masse aus der Senkrechten und die Differenz der Federlänge zu ihrer Ruhelänge, um die Lagrange-Gleichung des Systems aufzustellen. (b) Lösen Sie diese Gleichung für kleine Dehnungen der Feder und Winkelauslenkungen. (c) Lösen Sie die Gleichungen aus (a) in der nächsthöheren Ordnung der Winkelauslenkung und der Federdehnung; dieser Teil ist noch von Hand durchführbar. Nehmen Sie sinnvolle Werte für die Federkonstante, die Masse und die Ruhelänge an und diskutieren Sie die Bewegung. Ist das Eintreten einer Resonanz unter den in der Aufgabe erwähnten Annahmen zu erwarten? (d) Verwenden Sie für diesen Teil ein geeignetes analytisches Computerprogramm. Nehmen Sie für die Feder eine Masse  $m \ll M$  an. Vernachlässigen Sie Biegungen der Feder und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen korrekt bis zur ersten Ordnung in  $m$  und den Winkel- und Längenauslenkungen auf. (e) Verwenden Sie für diesen Teil ein geeignetes numerisches Computerprogramm. Machen Sie sinnvolle Annahmen für die Konstanten aus Teil (a) und erzeugen Sie eine graphische Darstellung der beiden Koordinaten als Funktion der Zeit.