

## Lösungen: 10 Temperatur

### 10-5 Biegung eines Bimetallstreifens

Nach der Erwärmung haben die *neutralen Fasern* der beiden Bimetallstreifen die Längen

$$l_{\text{Al}} = l_0 (1 + \alpha_{\text{Al}} \Delta\vartheta) = \left( r + \frac{a}{2} \right) \varphi$$

$$l_{\text{Cu}} = l_0 (1 + \alpha_{\text{Cu}} \Delta\vartheta) = \left( r - \frac{a}{2} \right) \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{l_{\text{Al}}}{l_{\text{Cu}}} = \frac{r + \frac{a}{2}}{r - \frac{a}{2}} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2} \frac{l_{\text{Al}} + l_{\text{Cu}}}{l_{\text{Al}} - l_{\text{Cu}}} \approx 2,38 \text{ m}$$

Die Länge eines Kreisbogens ist das Produkt aus dem Radius und dem zugehörigen Winkel:  $l = r \varphi$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi &= \frac{l_{\text{Al}}}{r + \frac{a}{2}} = \frac{l_0 (1 + \alpha_{\text{Al}} \Delta\vartheta)}{r + \frac{a}{2}} = \\ &= \frac{8 \text{ cm} \cdot \left( 1 + 2,38 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 60^\circ\text{C} \right)}{238 \text{ cm} + 0,05 \text{ cm}} \approx 0,0337 \text{ Rad} \hat{=} 1,93 \text{ Grad} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s = r(1 - \cos \varphi) \approx 1,35 \text{ mm}$$

## Lösungen: 13 Erster Hauptsatz

### 13–13 Adiabatische Kolbenverschiebung

a) Bei der isochoren Erwärmung steigt der Druck im linken Teilvolumen auf

$$p_1 = 0,8 \text{ bar} \cdot \frac{500}{300} = \frac{4}{3} \text{ bar}$$

Die anschließende reversible Verschiebung des Kolbens ist adiabatisch; daher gilt nach Gl. (13.6–3b):  $pV^\gamma = \text{const}$ . Die einatomigen Edelgase haben nur drei Freiheitsgrade, so dass  $\gamma = 5/3$ . Daraus folgt für das

$$\text{linke Volumen: } \frac{4}{3} \text{ bar} \cdot (1,4 \text{ m}^3)^{5/3} = p_{\text{links}} V_{\text{links}}^{5/3} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \text{rechte Volumen: } 0,8 \text{ bar} \cdot (1,4 \text{ m}^3)^{5/3} &= p_{\text{rechts}} V_{\text{rechts}}^{5/3} \\ &\stackrel{2V = V_{\text{links}} + V_{\text{rechts}}}{=} \\ &= p_{\text{rechts}} (2,8 \text{ m}^3 - V_{\text{links}})^{5/3} \end{aligned} \quad (1b)$$

Am Ende der Verschiebung sind die Drücke rechts und links gleich groß:

$$p_{\text{links}} = p_{\text{rechts}} \quad (2)$$

Division von Gl. (1a) durch Gl. (1b) liefert mit Gl. (2):

$$\begin{aligned} \frac{4/3}{0,8} &= \frac{V_{\text{links}}^{5/3}}{(2,8 \text{ m}^3 - V_{\text{links}})^{5/3}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{3/5} (2,8 \text{ m}^3 - V_{\text{links}}) = V_{\text{links}} \\ \Rightarrow \quad V_{\text{links}} &= \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{3/5}}{1 + \left(\frac{5}{3}\right)^{3/5}} 1,4 \text{ m}^3 \approx 1,6129 \text{ m}^3 \quad \Rightarrow \quad V_{\text{rechts}} = 2,8 \text{ m}^3 - V_{\text{links}} \approx 1,1871 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

b) Für die adiabatische Verschiebung des Kolbens gilt nach Gl. (13.6–3a):  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  mit  $\gamma - 1 = 2/3$ . Daraus folgt für das

$$\text{linke Volumen: } 500 \text{ K} \cdot (1,4 \text{ m}^3)^{2/3} = T_{\text{links}} V_{\text{links}}^{2/3}$$

$$\text{rechte Volumen: } 300 \text{ K} \cdot (1,4 \text{ m}^3)^{2/3} = T_{\text{rechts}} V_{\text{rechts}}^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{links}} = \left(\frac{1,4}{1,613}\right)^{2/3} \cdot 500 \text{ K} \approx 454,97 \text{ K}$$

$$\text{und} \quad T_{\text{rechts}} = \left(\frac{1,4}{1,187}\right)^{2/3} \cdot 300 \text{ K} \approx 334,87 \text{ K}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Natürlich sind die Drücke am Ende der Verschiebung links und rechts gleich groß:

$$p_{\text{links}} = n R \frac{T_{\text{links}}}{V_{\text{links}}} \approx 1,053 \text{ bar} \quad p_{\text{rechts}} = n R \frac{T_{\text{rechts}}}{V_{\text{rechts}}} \approx 1,053 \text{ bar}$$

- Wegen der Arbeit des Kolbens fällt die linke und steigt die rechte Temperatur. Allerdings sind die Beträge der Temperaturänderungen nicht gleich groß; der Betrag der Temperatur ändert sich im linken Teilvolumen um 10,16 K stärker als im rechten. Das ist darauf zurückzuführen, dass das linke Gas nicht nur Arbeit an das rechte Gas, sondern auch an die Hand abgibt. Nach Gl. (13.6–4b) betragen die Arbeiten beider Gase

$$W_{\text{links}} = \frac{\frac{4}{3} \text{ bar} \cdot 1,4 \text{ m}^3}{2/3} \left[ \left( \frac{1,4}{1,6129} \right)^{2/3} - 1 \right] \approx -25,216 \text{ kJ}$$

$$W_{\text{rechts}} = \frac{0,8 \text{ bar} \cdot 1,4 \text{ m}^3}{2/3} \left[ \left( \frac{1,4}{1,1871} \right)^{2/3} - 1 \right] \approx 19,530 \text{ kJ}$$

Die Differenz

$$\left| W_{\text{links}} \right| - \left| W_{\text{rechts}} \right| \stackrel{\uparrow}{=} \left| U_{\text{links}} \right| - \left| U_{\text{rechts}} \right| \approx 5,686 \text{ kJ}$$

1. HS

dieser beiden Arbeiten wird an die Hand abgegeben.

### 13–14 Adiabate Überströmung

Bemerkung: Die Adiabatenlgn. (13.6–3a/b/c) gelten hier *nicht*, weil *nicht* ein *einzelnes* Gas mit einem einzigen Druck vorliegt, sondern weil sich zwei Gase mischen, die mit unterschiedlichen Anfangsdrücken aus zwei verschiedenen Behältern kommen.

Nach der Überströmung (also im Zustand 2) sind die Luftdrücke im Behälter und im Zylinder gleich 1,3 bar. Daher gilt nach der idealen Gasgl.:

$$1,3 \text{ bar} = \frac{n_{B2} R T_2}{V_B} \quad 1,3 \text{ bar} = \frac{n_{Z2} R T_2}{V_{Z2}} \quad (1/2)$$

Die gesamte Molzahl  $n_{\text{ges}}$  ist vor dem Öffnen des Ventils (Zustand 1) und nach dem Ende der Überströmung (Zustand 2) gleich groß:

$$n_{\text{ges}} = n_{B2} + n_{Z2} = n_{B1} + n_{Z1} = \frac{p_{B1} V_B}{R T_U} + \frac{p_Z V_{Z1}}{R T_U} \approx 5,494 \text{ mol} \quad (3)$$

Bis jetzt haben wir für die vier unbekanntenen Größen  $n_{Z2}$ ,  $n_{B2}$ ,  $T_2$ ,  $V_{Z2}$  nur drei Gln. Die folgende Überlegung führt auf die vierte Gl.: In dem adiabaten Prozess nimmt die innere Energie der Luft ab, weil die eingeschlossene Luft Arbeit am Kolben leistet.

$$\begin{aligned} U_{12} &= n_{\text{ges}} \frac{f}{2} R (T_2 - T_U) \stackrel{\uparrow}{=} W_{12} + Q_{12} \stackrel{\uparrow}{=} \\ &= W_{12} \stackrel{\uparrow}{=} - p_Z (V_{Z2} - V_{Z1}) \end{aligned} \quad (4)$$

$p = \text{const}$

Mit diesen vier Gln. können die beiden gesuchten Größen ermittelt werden:

$$T_2 \approx 232,36 \text{ K} \quad V_{Z2} \approx 61,64 \text{ Liter}$$

## Lösungen: 14 Zweiter Hauptsatz

### 14-6 Wirkungsgrad bei mehr als zwei Wärmebädern

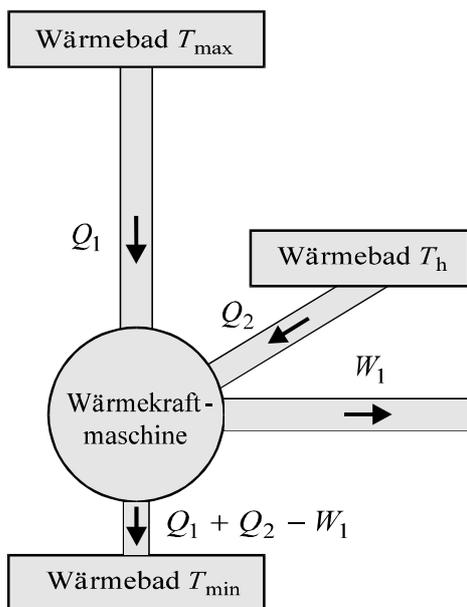
Wir betrachten eine Wärmekraftmaschine, die mit drei Wärmebädern mit den Temperaturen  $T_{\min} < T_h < T_{\max}$  arbeitet (siehe Abb. 1) und bei der nur das kälteste Wärmebad Wärme aufnimmt. Die im Folgenden verwendeten Arbeiten und Wärmen werden *positiv* gezählt.

Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an (siehe Abb. 1)

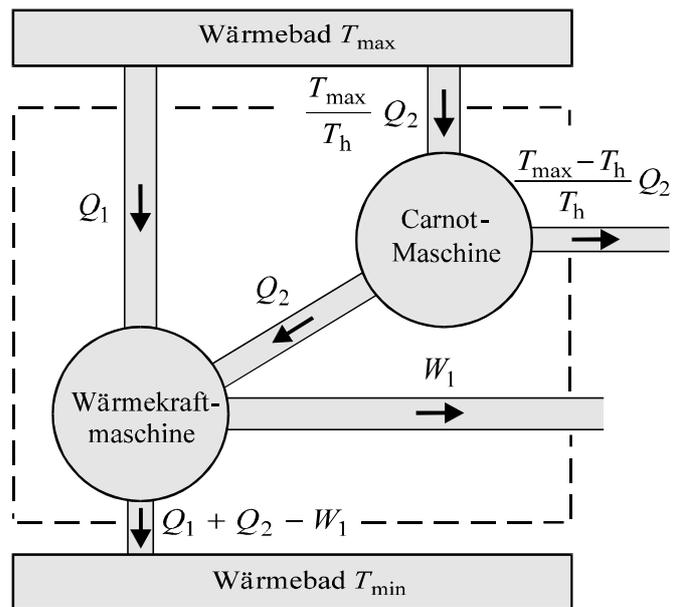
$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{W_1}{Q_1 + Q_2} \stackrel{\substack{\geq \\ \text{Annahme}}}{\geq} \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \triangleq \eta_{\text{Carnot}}$$

$$\Leftrightarrow W_1 \geq \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} (Q_1 + Q_2) \quad (\text{Annahme}) \quad (1)$$

Wenn die Annahme zu einer falschen Aussage führt, dann ist die Annahme falsch.



**Abb. 1** Die Wärmekraftmaschine arbeitet mit *drei* Wärmebädern.



**Abb. 2** Die Wärme  $Q_2$  mit der Temperatur  $T_h$  in Abb. 1 wird hier nicht durch ein Wärmebad, sondern durch eine Carnot-Maschine geliefert.

Wir ersetzen nun das Wärmebad mit der Temperatur  $T_h$  durch eine Carnot-Maschine, die am Wärmebad mit der Temperatur  $T_{\max}$  hängt und so arbeitet, dass sie die Abwärme  $Q_2$  mit der Temperatur  $T_h$  an die erste Wärmekraftmaschine abgibt (siehe Abb. 2). Wegen ihres Wirkungsgrades

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_{\max} - T_h}{T_{\max}}$$

nimmt sie aus dem oberen Wärmebad die Wärme  $Q_2 T_{\max} / T_h$  auf und liefert die Arbeit

$$\frac{T_{\max} - T_h}{T_h} Q_2$$

Die untere Wärmekraftmaschine in Abb. 2 arbeitet dann unverändert wie in Abb. 1 und „bemerkt“ die von Abb. 1 nach Abb. 2 vorgenommene Änderung nicht.

In den gestrichelten Grenzen in Abb. 2 arbeitet eine Wärmekraftmaschine mit nur zwei (!) Wärmebädern und mit dem Wirkungsgrad

$$\begin{aligned} \eta^{\text{gestrichelt}} &= \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{W_1 + \frac{T_{\max} - T_h}{T_h} Q_2}{Q_1 + \frac{T_{\max}}{T_h} Q_2} = \\ &\stackrel{\text{Gl. (1)}}{\geq} \frac{\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} (Q_1 + Q_2) + \frac{T_{\max} - T_h}{T_h} Q_2}{Q_1 + \frac{T_{\max}}{T_h} Q_2} = \\ &= \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \cdot \frac{Q_1 + \frac{T_h (T_{\max} - T_{\min}) + T_{\max} (T_{\max} - T_h)}{T_h (T_{\max} - T_{\min})} Q_2}{Q_1 + \frac{T_{\max}}{T_h} Q_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Für den zweiten, langen Bruch gilt:

$$\frac{T_h (T_{\max} - T_{\min}) + T_{\max} (T_{\max} - T_h)}{T_h (T_{\max} - T_{\min})} > \frac{T_{\max}}{T_h}$$

$$\Rightarrow \eta^{\text{gestrichelt}} > \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = \eta^{\text{Carnot}}$$

Das Ergebnis  $\eta^{\text{gestrichelt}} > \eta^{\text{Carnot}}$  für die – in Abb. 2 dargestellte – Wärmekraftmaschine mit zwei Wärmebädern steht im Widerspruch zur 1. und 2. Behauptung in Unterkapitel 14.3. Daher ist die anfangs gemachte Annahme falsch.

Kontrolle: Nach Gl. (2) gilt: Für  $Q_2 \rightarrow 0$  geht  $\eta^{\text{gestrichelt}} \rightarrow \eta^{\text{Carnot}}$ .

### 14–7 Wirkungsgrad eines Kreisprozesses

a)  $p_2 = p_1 \quad T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1$

b)  $T_3 = T_1 \quad p_3 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} p_1 \quad V_3 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_2$

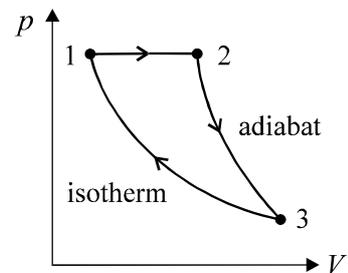


Abb. 1 Rechtsläufiger Kreisprozess mit je einer Isobaren, Adiabaten und Isothermen.

$$\begin{aligned} \text{c) } \eta &= \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{\text{Geleistete Arbeit}}{\text{Aufgenommene Wärme}} = \\ &= \frac{|W_{12}| + |W_{23}| - |W_{31}|}{|Q_{12}|} = \frac{-W_{12} - W_{23} - W_{31}}{Q_{12}} \end{aligned}$$

Wir müssten jetzt drei Arbeiten und eine Wärme berechnen, also insgesamt vier Änderungen von Prozessgrößen. Mit dem ersten Hauptsatz lässt sich der Aufwand auf die Hälfte reduzieren:

$$\Delta U = 0 = (W_{12} + Q_{12}) + W_{23} + (W_{31} + Q_{31}) \quad \Rightarrow \quad -W_{12} - W_{23} - W_{31} = Q_{12} + Q_{31}$$

$$\Rightarrow \quad \eta = 1 + \frac{Q_{31}}{Q_{12}} = 1 + \frac{n R T_1 \ln(V_1/V_3)}{n C_{\text{mp}} (T_2 - T_1)}$$

$$\text{Mit } \frac{V_3}{V_1} = \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_3 = V_1^{\frac{1}{1-\gamma}} V_2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\text{folgt } \eta = 1 - \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{f}{2}\right) (T_2 - T_1)} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} = 1 + \frac{f}{2}}}{=} 1 - \frac{T_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$$

$$\text{d) Sei } x := \frac{T_2}{T_1} > 1. \text{ Die Beziehung } \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x} \text{ (für } x > 1) \text{ führt auf } \eta < 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta^{\text{Carnot}}$$

e) Wenn der Kreisprozess nur mit *zwei* Wärmebädern ausgeführt wird, so ist er *irreversibel*, weil sein Wirkungsgrad kleiner ist als  $\eta^{\text{Carnot}}$  (siehe die beiden Behauptungen in Unterkapitel 14.3). Die Irreversibilität ergibt sich aber auch aus dem Umstand, dass ein isobarer Prozess mit nur zwei Wärmebädern immer irreversibel ist (siehe Beispiel 14.2–4b).

Wenn der betrachtete Kreisprozess langsam und mit *sehr vielen* Wärmebädern ausgeführt wird, so ist er *reversibel*. Denn in diesem Fall ist der erste Teilprozess  $1 \rightarrow 2$  reversibel. (Die Teilprozesse  $2 \rightarrow 3$  und  $3 \rightarrow 1$  sind bei langsamer Prozessführung sowieso reversibel. Siehe erneut Beispiel 14.2–4.) Der Wirkungsgrad bleibt unverändert, aber die Behauptungen in Unterkapitel 14.3 können nicht mehr angewendet werden, da jetzt mehr als zwei Wärmebäder benutzt werden.

## Lösungen: 16 Wärmeübertragung

### 16–7 Wärmestrom bei linear ansteigender Querschnittsfläche

a) Die Gl.  $\dot{Q} = \lambda \frac{A}{l} (T_2 - T_1)$

kann nicht direkt angewendet werden, da die Querschnittsfläche  $A$  nicht konstant ist. Daher müssen wir den Stab – wie eine Gurke – in kleine vertikale Scheibchen der Dicke  $dx$  unterteilen. In jedem Scheibchen ist die Querschnittsfläche nahezu konstant, so dass die Fouriersche Gl. (16.1–2) auf die Scheibchen angewendet werden kann. Für das Scheibchen an der Stelle  $x$  gilt:

$$\dot{Q} = \lambda \frac{A(x)}{dx} [T(x + dx) - T(x)] = \lambda \frac{A(x)}{dx} dT$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{dx}{A(x)} = \frac{\lambda}{\dot{Q}} dT \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \frac{dx}{A_0 + m x} = \frac{\lambda}{\dot{Q}} \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m} \ln(A_0 + m x) \Big|_0^l = \frac{\lambda}{\dot{Q}} (T_2 - T_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \lambda \frac{m}{\ln \frac{A_0 + m l}{A_0}} (T_2 - T_1)$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

\* Die Einheiten sind richtig.

\* Für  $m \rightarrow 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \lambda (T_2 - T_1) \lim_{m \rightarrow 0} \frac{m}{\ln \left( 1 + m \frac{l}{A_0} \right)} \stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \\ &= \lambda (T_2 - T_1) \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1 + m \frac{l}{A_0}} \frac{l}{A_0}} = \lambda \frac{A_0}{l} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

b) Die Temperatur  $T(x)$  erhalten wir, indem wir in Gl. (1) nur bis  $x$  und bis  $T(x)$  integrieren:

$$\int_0^x \frac{dx'}{A_0 + m x'} = \frac{\lambda}{\dot{Q}} \int_{T_1}^{T(x)} dT \quad \Rightarrow \quad T(x) = T_1 + \frac{\dot{Q}}{m \lambda} \ln \frac{A_0 + m x}{A_0}$$

### 16–14 Wärmeaustauscher

a) Die Temperatur  $\vartheta_1(x)$  fällt mit wachsender Koordinate  $x$ , die Temperatur  $\vartheta_2(x)$  steigt (fällt) bei Gleichstrom (Gegenstrom). Daher haben die infinitesimalen Temperaturänderungen im Intervall  $[x, x + dx]$  die Vorzeichen

$$d\vartheta_1 = \vartheta_1(x+dx) - \vartheta_1(x) < 0 \quad (1a)$$

$$d\vartheta_2 = \vartheta_2(x+dx) - \vartheta_2(x) \begin{cases} > 0 & \text{im Gleichstrom} \\ < 0 & \text{im Gegenstrom} \end{cases} \quad (1b)$$

Hinweis: In dieser Aufgabe treten drei Temperaturdifferenzen auf:

$$d\vartheta_1 = \vartheta_1(x+dx) - \vartheta_1(x) \quad d\vartheta_2 = \vartheta_2(x+dx) - \vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_{12}(x) := \vartheta_1(x) - \vartheta_2(x)$$

die häufig verwechselt werden. Die ersten beiden Temperaturdifferenzen treten im Intervall  $[x, x+dx]$  jeweils auf *einer* Seite der Trennwand auf und sind auf die infinitesimale Wärmeabfuhr bzw. Wärmezufuhr im genannten Intervall zurückzuführen.  $\vartheta_{12}(x)$  hingegen ist die Temperaturdifferenz an der Stelle  $x$  zwischen den beiden gegenüberliegenden Seiten der Trennwand. Die infinitesimalen Temperaturdifferenzen  $d\vartheta_1, d\vartheta_2$  treten parallel zur Strömungsrichtung auf, die endliche Temperaturdifferenz  $\vartheta_{12}(x)$  senkrecht zur Strömungsrichtung.

Im Intervall  $[x, x+dx]$  fließt nach Gl. (16.2–4) folgender infinitesimale (positive) Wärmestrom vom warmen zum kalten Fluid durch eine infinitesimale Fläche  $dA$ :

$$d\dot{Q} = u \underbrace{A \frac{dx}{l}}_{dA} [\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x)] > 0 \quad (2)$$

Auf der infinitesimalen Strecke der Länge  $dx$  sind die Temperaturänderungen  $d\vartheta_1, d\vartheta_2$  der beiden Fluide umso größer, je kleiner die Massenströme und je kleiner die spezifischen Wärmekapazitäten der Fluide sind. Nach Gl. (13.3–1) gilt für das Intervall  $[x, x+dx]$ :

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_1 c_1 d\vartheta_1 \quad \text{für Fluid 1} \quad (3a)$$

$$d\dot{Q} = \pm \dot{m}_2 c_2 d\vartheta_2 \quad \text{für Fluid 2} \quad \begin{cases} \text{im Gleichstrom} \\ \text{im Gegenstrom} \end{cases} \quad (3b)$$

Wegen der Vorzeichen in den Gln. (1a/b) gilt das Pluszeichen (Minuszeichen) für Gleichstrom (Gegenstrom). Gleichsetzen der Gl. (2) mit Gl. (3a) und mit Gl. (3b) führt mit den nützlichen Abkürzungen

$$\kappa_1 := \frac{u A}{\dot{m}_1 c_1 l} \quad \kappa_2 := \frac{u A}{\dot{m}_2 c_2 l} \quad \text{mit der Einheit } \frac{1}{\text{m}}$$

$$\text{auf } \frac{d\vartheta_1(x)}{dx} = -\kappa_1 [\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x)] \quad (4a)$$

$$\frac{d\vartheta_2(x)}{dx} = \pm \kappa_2 [\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x)] \quad \begin{cases} \text{im Gleichstrom} \\ \text{im Gegenstrom} \end{cases} \quad (4b)$$

Dies sind zwei gekoppelte, lineare, homogene Dgln. erster Ordnung. Mit ihnen berechnen wir im Folgenden die Temperaturen  $\vartheta_1(x), \vartheta_2(x)$ .

Bemerkung: Leser, welche die folgenden Rechnungen nicht durchführen möchten, können sofort die Lösungen in den Gln. (7) und (8) anschauen. Die Lösungen (7) und (8) erfüllen die Dgln. (4a/b); das kann durch Berechnung ihrer ersten Ableitung und durch Einsetzen in die Dgln. (4a/b) einfach und schnell bewiesen werden.

Wir subtrahieren Gl. (4b) von Gl. (4a) und finden für die Temperaturdifferenz der beiden Fluide

$$\vartheta_{12}(x) := \vartheta_1(x) - \vartheta_2(x)$$

die Dgl.

$$\frac{d\vartheta_{12}(x)}{dx} = -(\kappa_1 \pm \kappa_2) \vartheta_{12}(x) \quad \begin{cases} \text{im Gleichstrom} \\ \text{im Gegenstrom} \end{cases}$$

Separation (Trennung) der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_{12}}{\vartheta_{12}} &= -(\kappa_1 \pm \kappa_2) dx & \Rightarrow & \int_{\vartheta_{12}(0)}^{\vartheta_{12}(x)} \frac{d\vartheta_{12}}{\vartheta_{12}} = -(\kappa_1 \pm \kappa_2) \int_0^x dx' \\ \Rightarrow \ln \frac{\vartheta_{12}(x)}{\vartheta_{12}(0)} &= -(\kappa_1 \pm \kappa_2) x \\ \Rightarrow \vartheta_{12}(x) &= \vartheta_{12}(0) \exp[-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x] & \begin{cases} \text{im Gleichstrom} \\ \text{im Gegenstrom} \end{cases} & (5) \end{aligned}$$

Bei gleich starken Gegenströmen, d. h. bei  $\kappa_1 - \kappa_2 = 0$  ist die Temperaturdifferenz zwischen beiden Fluiden konstant, hängt also nicht von der Koordinate  $x$  ab:  $\vartheta_{12}(x) = \vartheta_{12}(0)$ .

**b)** Wir setzen Gl. (5) in Gl. (4a) ein und erhalten

$$\frac{d\vartheta_1}{dx} = -\kappa_1 \vartheta_{12}(0) \exp[-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x] \quad (6)$$

Für die folgende Integration ist eine Fallunterscheidung erforderlich:

**1. Fall:** Es liegen gleich starke Gegenströme vor. Dann ist  $\kappa_1 - \kappa_2 = 0$  und Gl. (6) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_1}{dx} &= -\kappa_1 \vartheta_{12}(0) & \Rightarrow & \int_{\vartheta_1(0)}^{\vartheta_1(x)} d\vartheta_1 = -\kappa_1 \vartheta_{12}(0) \int_0^x dx' \\ \Rightarrow \vartheta_1(x) &= \vartheta_1(0) - \kappa_1 \vartheta_{12}(0) x & \text{für gleich starke Gegenströme} \end{aligned}$$

• **Fall:** Es liegen verschieden starke Gegenströme oder beliebige Gleichströme vor. Dann ist  $\kappa_1 \pm \kappa_2 \neq 0$  und die Integration der Gl. (6) ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta_1(0)}^{\vartheta_1(x)} d\vartheta_1 &= -\kappa_1 \vartheta_{12}(0) \int_0^x \exp[-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x'] dx' \\ \Rightarrow \vartheta_1(x) &= \vartheta_1(0) - \frac{\kappa_1}{\kappa_1 \pm \kappa_2} \vartheta_{12}(0) \left[ 1 - e^{-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x} \right] & \text{für alle Gleichströme und für} \\ & & \text{verschieden starke Gegenströme} \end{aligned}$$

In gleicher Weise berechnet sich der Temperaturverlauf  $\vartheta_2(x)$  des kalten Fluids mit Fallunterscheidungen. Insgesamt finden wir als Endergebnis die **Temperaturverläufe**

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1(0) - \kappa_1 \vartheta_{12}(0) \begin{cases} x & \text{für gleich starke Gegenströme} & (7a) \\ \frac{1}{\kappa_1 \pm \kappa_2} \left[ 1 - e^{-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x} \right] & \text{sonst} & (7b) \end{cases}$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2(0) \pm \kappa_2 \vartheta_{12}(0) \begin{cases} x & \text{für gleich starke Gegenströme} & (8a) \\ \frac{1}{\kappa_1 \pm \kappa_2} \left[ 1 - e^{-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x} \right] & \text{sonst} & (8b) \end{cases}$$

Die Pluszeichen (Minuszeichen) vor  $\kappa_2$  gelten für Gleichstrom (Gegenstrom).

Der Faktor

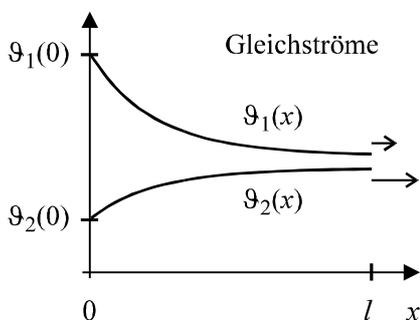
$$\frac{1}{\kappa_1 \pm \kappa_2} \left[ 1 - e^{-(\kappa_1 \pm \kappa_2) x} \right]$$

ist immer positiv. Die Temperatur  $\vartheta_1(x)$  fällt monoton und die Temperatur  $\vartheta_2(x)$  steigt (fällt) monoton bei Gleichstrom (Gegenstrom).

c) Aus folgenden zwei Gründen werden Gleichströmer nur in Sonderfällen in der Praxis eingesetzt:

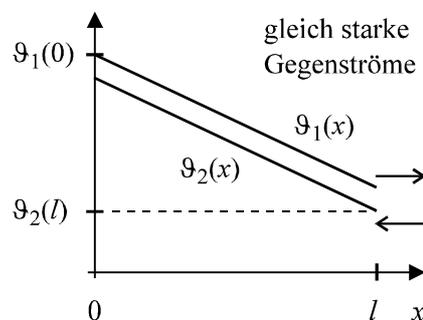
- Bei Gleichstrom-Wärmeaustauschern liegt die Austritts-Temperatur  $\vartheta_2(l)$  des kalten Fluids unter der Austritts-Temperatur  $\vartheta_1(l)$  des warmen Fluids (siehe Abb. 1).
- Bei gleichem Wärmeaustausch muss die Trennfläche in Gleichströmern größer sein als in Gegenströmern.

Wir betrachten jetzt **gleich starke Gegenströme**. Für sie gilt laut Definition



**Abb. 1** Temperaturverläufe in Gleichstrom-Wärmeaustauschern mit

$$\dot{m}_1 c_1 = \frac{1}{2} \dot{m}_2 c_2 \Leftrightarrow \kappa_1 = 2 \kappa_2$$



**Abb. 2** Bei gleich starken Gegenströmern, d. h. bei

$$\dot{m}_1 c_1 = \dot{m}_2 c_2$$

sind die Temperaturverläufe linear und die Temperaturdifferenz zwischen beiden Fluiden ist konstant.

$$\dot{m}_1 c_1 = \dot{m}_2 c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 = \kappa_2 =: \kappa = \frac{u A}{\dot{m} c l}$$

Die Gln. (7a) und (8a) für gleich starke Gegenströme lauten:

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1(0) - \kappa \vartheta_{12}(0) x \quad \text{für gleich starke Gegenströmungen} \quad (9a)$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2(0) - \kappa \vartheta_{12}(0) x \quad \text{für gleich starke Gegenströmungen} \quad (9b)$$

Bei gleich starken Gegenströmen fallen beide Temperaturen mit wachsendem  $x$  linear und gleich stark ab. Daher hängt die Temperaturdifferenz  $\vartheta_{12}(x)$  zwischen beiden Fluiden nicht von  $x$  ab.

Der lineare Verlauf der Temperaturen bei gleich starken Gegenströmen ist einsichtig: Die Wärmeübertragung führt zu Temperaturänderungen  $\Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2$ , die wegen  $\kappa_1 = \kappa_2$  in beiden Fluiden gleich groß sind. Folglich hängt der Temperaturunterschied  $\vartheta_{12}$  zwischen den Fluiden nicht von  $x$  ab, so dass die Wärmestromdichte durch die Trennwand überall auf der  $x$ -Achse gleich groß ist. Daraus resultieren lineare Temperaturverläufe.

Für  $x = l$  folgt aus den Gln. (9a/b)

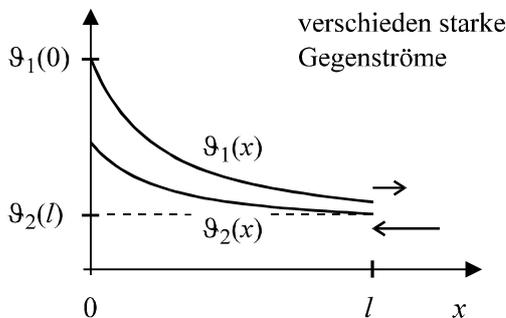
$$\vartheta_1(l) = \vartheta_1(0) - \kappa l [\vartheta_1(0) - \vartheta_2(0)] \quad \vartheta_2(l) = \vartheta_2(0) - \kappa l [\vartheta_1(0) - \vartheta_2(0)]$$

Daraus ergibt sich folgendes Temperaturverhältnis am linken Eingang  $x = 0$ :

$$\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_2(0)} = \frac{1 + \frac{\dot{m} c}{u A}}{1 + \frac{\dot{m} c}{u A} \frac{\vartheta_2(l)}{\vartheta_1(0)}} > 1 \quad \text{für gleich starke Gegenströmungen} \quad (10)$$

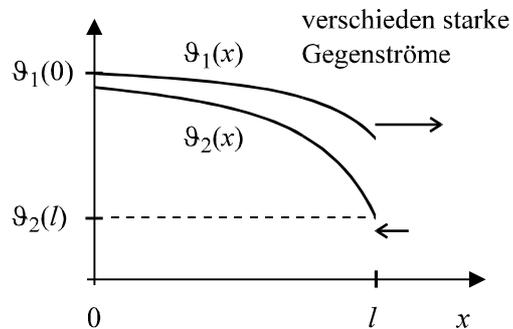
Für  $\frac{\dot{m} c}{u A} \rightarrow 0$  (11)

geht dieses Verhältnis  $\vartheta_1(0)/\vartheta_2(0)$  gegen Eins. Das bedeutet: *Bei gleich starken Gegenströmen tauschen kaltes und warmes Fluid ihre Temperaturen nahezu vollständig aus, wenn die Kapazitätsströme  $\dot{m} c$  klein oder wenn die Wärmedurchgangszahl  $u$  oder die Fläche  $A$  (sie ist proportional zur*



**Abb. 3a** Temperaturverläufe in Gegenstrom-Wärmeaustauschern mit

$$\dot{m}_1 c_1 = \frac{1}{2} \dot{m}_2 c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 = 2 \kappa_2$$



**Abb. 3b** Temperaturverläufe in Gegenstrom-Wärmeaustauschern mit

$$\dot{m}_1 c_1 = 2 \dot{m}_2 c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_1 = \frac{1}{2} \kappa_2$$

Länge  $l$  sehr groß sind.

Abschließend zeigen die Abbn. (3a/b) noch die exponentiellen Temperaturverläufe bei **verschieden starken Gegenströmen**. Auch bei verschiedenen starken Gegenströmen mit  $\dot{m}_1 c_1 > \dot{m}_2 c_2$  kann das kalte Fluid nahezu auf die Eintrittstemperatur des warmen Fluids aufgewärmt werden (siehe Abb. 3b).

Der exponentielle Verlauf der Temperaturen bei verschiedenen starken Gegenströmen ist ebenfalls einsichtig: Wegen  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  sind die Temperaturänderungen in beiden Fluiden verschieden. Daher hängt der Temperaturunterschied  $\vartheta_{12}(x)$  zwischen den Fluiden von  $x$  ab.

### **Anwendung des Wärmeaustauschers**

Gegenstrom-Wärmeaustauscher werden in Lüftungsanlagen von Gebäuden eingesetzt. Ein Ventilator saugt Außenluft an und drückt sie durch den Wärmeaustauscher und danach in die Wohn- und Arbeitsräume; ein zweiter Ventilator zieht die Raumluft an und drückt sie durch die andere Seite des Wärmeaustauschers und dann nach außen. Selbst bei starken winterlichen Frösten wärmt die Abluft im Wärmeaustauscher die Frischluft auf Temperaturen, die nur wenige Grade unter der Raumtemperatur liegen.

Die großen Vorteile dieser Zwangslüftung gegenüber der Fensterlüftung sind Komfort, Schutz gegen Außenlärm (Fenster bleiben geschlossen), Schutz gegen Staub und Pollen (bei Einbau von Filtern), Verringerung der Schadstoffe in der Raumluft, sehr guter Schutz gegen hohe Raum-Feuchtigkeit und damit gegen Schimmelbildung und vor allem eine beachtliche Energieeinsparung im Winter: In guten Wärmetauschern gibt die abgeführte Raumluft etwa 90% ihres Energieüberschusses an die angesaugte kalte Frischluft ab, beim Fensteröffnen hingegen nichts. In Einfamilienhäusern verbrauchen die zwei Ventilatoren zusammen etwa 30 W bis 50 W.

Besonders erfreulich sind die winterliche Energiebilanz und die sommerliche Behaglichkeit, wenn die Frischluft von draußen durch ein Rohr angesaugt wird, das einige Dutzend Meter lang ist und etwa 1 m unter der Erde im Garten verlegt wurde. Im Rohr wird die angesaugte Luft durch das Erdreich im Winter (Sommer) auf etwa 10 °C vorgewärmt (abgekühlt). Im Sommer kann (bei Wunsch) die angesaugte Luft den Wärmeaustauscher in einem Bypass umgehen, so dass angenehm kühle Luft in die Räume gelangt.