

■ Inhaltsverzeichnis

■	Einstiegstest	1
■	Über den Autor	9
■	Danksagung	9
■	Inhaltsverzeichnis	11
■	Einleitung	17
	Was Sie schon immer über lineare Algebra wissen wollten	17
	Meine Leser	17
	Ziel des Buches	18
	Nötiges Vorwissen	19
	Jenseits dieses Buches	19
	Was bedeutet was	19
	Nur Mut zum Stolpern	20
■	1 Algebraische Grundlagen der Zahlensysteme	23
	Mathematik und die natürlichen Zahlen	23
	Eigenschaften der Grundrechenarten	26
	Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	27
	Mathematiker und ihre Konstruktion der ganzen Zahlen	29
	Aufgaben mit Klammern richtig lösen	30
	Aus ganz wird rational – Bruchrechnung mal anders	30
	Mathematiker und ihre Definition der rationalen Zahlen	32
	Rationale Zahlen und Dezimalbrüche	33
	Und plötzlich wird's irrational ... und doch real!	35
	Mathematiker und die Konstruktion der reellen Zahlen	36
	Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen	37
	Das Summenzeichen	38
	Notwendige und hinreichende Bedingungen	39
	Grundlegende Begriffe über allgemeine Funktionen	40

2 Logische Grundlagen der Sprache, Mengen und Beweistechniken 45

- Alles über Mengen 45
- Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen 47
- Von Zahlen, Mengen und Intervallen 49
- Mit Mengen einfach rechnen können 49
- Mengengleichheit 50
- Durchschnitt und Vereinigung von Mengen 50
- Mengendifferenz und Komplementbildung 51
- Kreuzprodukt von Mengen 52
- Venn-Diagramme 53
- Logische Verküpfungen kompetent anwenden können 55
- Wahre und falsche Aussagen 56
- Aussagen verknüpfen 56
- Die Mathematik als Sprache erkennen 58
- Terme als Worte im mathematischen Satz 59
- Formeln sind die Sätze der mathematischen Sprache 59
- Mit Quantoren neue Formeln bilden 61
- Die Unendlichkeit – unzählige Welten? 63
- Jenseits der Zählbarkeit – überabzählbare Mengen 65
- Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik 66
- Methode 1: Direkter Beweis 67
- Methode 2: Indirekter Beweis 67
- Methode 3: Beweis durch Fallunterscheidung 69
- Methode 4: Beweis durch vollständige Induktion 70

3 Lineare Gleichungssysteme Schritt für Schritt analysieren 75

- Gleichungen in verschiedenen Formen und Größen 75
- Lineare Gleichungen in einer Unbekannten 76
- Quadratische Gleichungen in einer Unbekannten 77
- Lineare Gleichungssysteme unter die Lupe genommen 78
- Gleichungssysteme in Diagonalgestalt 80
- Die nützliche Zeilenstufenform 81
- Der legendäre Gauß-Algorithmus 83

4	Vektorräume – mehr als eine Welt der Pfeile	89
	Der Raum \mathbb{K}^n	89
	Praxisbeispiel: Kräfte an einem Ausleger berechnen	95
	Schöne Teilmengen: Untervektorräume	97
5	Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	105
	Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	105
	Punkte im Raum	105
	Parametergleichung für Geraden	107
	Zweipunktgleichung für Geraden	108
	Parametergleichung für Ebenen	110
	Dreipunktgleichung für Ebenen	111
	Koordinatengleichung für Ebenen	112
	Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen	112
	Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen	115
	Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden	115
	Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen	118
	Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene	121
	Kollision während einer Flugshow in Las Vegas?	124
6	Rechnen in Gruppen, Ringen und Körpern	129
	Grundlegende Strukturen: Gruppen	132
	In Ringen mit zwei Operationen rechnen	134
	Teilbarkeit und das Rechnen mit Restklassen	138
	Rechnen mit Restklassen im Alltag	143
7	Keine Angst vor komplexen Zahlen	147
	Definition der komplexen Zahlen	147
	Komplexe Zahlen addieren und multiplizieren	149
	Division komplexer Zahlen in der Praxis	149
	Komplexe quadratische Gleichungen	151
	Komplexe Zahlen als reelle Ebene	152
	Komplexe Zahlen als Polarkoordinaten	154
	Kurzer Ausblick auf die Anwendungen dieser Zahlen	158
	Jenseits der komplexen Zahlen:	
	Quaternionen und Oktonionen	158

8 Überlebenstechniken in Vektorräumen	161
Linearkombination und lineare Hüllen	161
Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme	165
Vektorräume und ihre Basen	168
Drei Existenzsätze für Basen	170
Dimension eines Vektorraums	174
9 Lineare Abbildungen tiefgründig verstehen lernen	181
Grundlagen linearer Abbildungen	181
Kerne und Bilder von linearen Abbildungen	186
Homomorphismen über Homomorphismen	190
Endliche Beschreibung von Homomorphismen	193
Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume	195
Der Dimensionssatz	197
Eigenschaften injektiver linearer Abbildungen	200
10 Die Welt der Matrizen	203
Darstellende Matrizen von linearen Abbildungen	203
Matrizenaddition und -skalarmultiplikation	207
Matrizenmultiplikation leicht gemacht	210
Inverse Matrizen verstehen	215
Matrizen als lineare Abbildungen auffassen	218
11 Praktische Anwendungen von Matrizen	221
Matrizen als Drehungen in der reellen Ebene	221
Matrizen als Spiegelungen in der reellen Ebene	225
Überführungsmatrizen in Produktionsprozessen	228
Elementare Zeilenumformungen als Matrizen	230
Matrizen als elementare Umformung:	
Vertauschen von zwei Zeilen	230
Matrizen als Elementare Umformung:	
Skalarmultiplikation einer Zeile	232
Matrizen als Elementare Umformung: Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen	233

■	12 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Abbildungen	237
	Koeffizientenmatrizen und ihre Eigenschaften	237
	Geometrie der Lösungsmengen	239
	Unterräume als Lösungsmengen	241
	Praktisches Invertieren von Matrizen mit dem Gaußschen Algorithmus	243
	Ausblick jenseits dieses Buches	247
■	13 Lösungen zu den Aufgaben	249
■	Glossar	261
■	Index	265

