

Inhaltsverzeichnis

Über die Autoren	11
Danksagung	11
Einleitung	25
Über dieses Buch	25
Ein leicht verständlicher Einstieg in die Mathematik anhand von Beispielen	25
Törichte Annahmen über den Leser	26
Konventionen in diesem Buch	26
Wie dieses Buch aufgebaut ist	27
Teil I: Algebraische und analytische Grundlagen	27
Teil II: Differentiation – die Kunst des Ableitens	27
Teil III: Integration – eine Kunst für sich	27
Teil IV: Lineare Algebra	27
Teil V: Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	28
Teil VI: Fortgeschrittene Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	28
Teil VII: Der Top-Ten-Teil	28
Anhang	28
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	28
Wie es weitergeht	29
Teil I	
Algebraische und analytische Grundlagen	31
Kapitel 1	
Die Krabbelkiste der Mathematik	33
Logische Grundlagen	33
Wahre und falsche Aussagen	33
Aussagen verknüpfen	34
Quantoren in den Griff bekommen	35
Zahlen und Fakten	36
Die Zahlbereiche im Visier	36
Aufgaben mit Klammern richtig lösen	37
Das Summenzeichen	37
Bruchrechnung überleben	38
Potenzen und Wurzeln	39
Einfache (Un-)Gleichungen und Beträge auflösen	40
Gleichungen in Angriff nehmen	40
Ungleichungen in den Griff bekommen	43
Beträge ins Spiel bringen	46

Kapitel 2	
Mengen, Induktionen, Prozente und Zinsen	49
Alles über Mengen	49
Mengen im Supermarkt?	49
Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen	50
Von Zahlen, Mengen und Intervallen	52
Mit Mengen einfach rechnen können	52
Venn-Diagramme	57
Vollständige Induktion bezwingt die Unendlichkeit	58
Prozentrechnung für den Alltag	60
Nur zwei Prozent Mieterhöhung	61
Das eigene Heim trotz Provision?	61
Die Bären kommen – Sinkende Aktienkurse	61
Bullen im Vormarsch – Steigende Kurse	61
Wie viel Bullen hätten die Bären gezähmt?	62
Immer auf die genaue Formulierung achten	62
Preissenkungsschnäppchen mitnehmen	62
Zinsrechnung zum Verstehen	63
Lohnender Zinsertrag	63
Höhe des Zinssatzes für Ihre Träume	63
Suche nach dem Startkapital	64
Taggenaue Zinsen	64
Kapitalwachstum: Zinseszins	64
Eine feste Anlage für zehn Jahre	64
Das sich verdoppelnde Kapital bei festem Zins	65
Das sich verdoppelnde Kapital bei fester Jahresanzahl	65
Kapitel 3	
Elementare Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit	67
Grundlegendes zu Funktionen	67
Was sind eigentlich Funktionen?	67
Grafische Darstellung von Funktionen	68
Grundlegende Funktionen	70
Polynome	70
Rationale Funktionen	73
Exponentialfunktionen	74
Logarithmusfunktionen	75
Von Umkehr- und inversen Funktionen	76
Trigonometrische Funktionen	77
Bis an die Grenzen gehen	80
Drei Funktionen erklären den Grenzwert	80
Weiter zu den einseitigen Grenzwerten	81
Die formale Definition eines Grenzwertes – wie erwartet!	82
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	82
Grenzwerte für x gegen unendlich	83

Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	83
Einfache Grenzwerte auswerten	86
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	86
Einsetzen und Auswerten	86
Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	86
Faktorisieren aus Leidenschaft	87
Konjugierte Multiplikation	87
Algebraische Hilfe – Einfache Umformungen	87
Machen Sie eine Pause – mit einem Grenzwert-Sandwich	88
Grenzwerte bei unendlich auswerten	90
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	90
Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden	91

Teil II

Differentiation – die Kunst des Ableitens **93**

Kapitel 4

Idee und Regeln des Ableitens – was sein muss, muss sein **95**

Erste Schritte des Ableitens	95
Steigungen gesucht!	95
Steigung von Geraden	97
Steigung von Parabeln	98
Der Differenzenquotient	99
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	103
Grundlegende Regeln der Differentiation	105
Die Konstantenregel	105
Die Potenzregel	105
Die Koeffizientenregel	106
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	106
Trigonometrische Funktionen differenzieren	106
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	106
Differentiationsregeln für Profis – Wir sind die Champs!	107
Die Produktregel	108
Die Quotientenregel	108
Die Kettenregel	108
Implizite Differentiation	111
Logarithmische Differentiation	112
Differentiation von Umkehrfunktionen	113
Keine Angst vor höheren Ableitungen	114

Kapitel 5

Extrem-, Wende- und Sattelpunkte **117**

Ein Ausflug mit der Analysisgruppe	117
Über die Berge und durch die Täler: Positive und negative Steigungen	117

Konvexität und Wendepunkte	118
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum	119
Ein atemberaubender Ausblick: Das globale Maximum	119
Autopanne: Auf dem Scheitelpunkt hängen geblieben	119
Von nun an geht's bergab!	119
Ihr mathematisches Reisetagebuch	120
Lokale Extremwerte finden	121
Die kritischen Werte suchen	121
Der Test mit der ersten Ableitung – wachsend oder fallend?	122
Der Test mit der zweiten Ableitung – Krümmungsverhalten!	124
Globale Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall finden	124
Die globalen Extremwerte über den gesamten Definitionsbereich einer Funktion finden	126
Konvexität und Wendepunkte bestimmen	129
Die Graphen von Ableitungen – jetzt wird gezeichnet!	131
Der Zwischenwertsatz – Es geht nichts verloren	134
Der Mittelwertsatz – Es bleibt Ihnen nicht(s) erspart!	135
Das nützliche Taylerpolynom	137
Die Regel von l'Hospital	140
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	141
Drei weitere nicht akzeptable Formen	142
Kapitel 6	
<i>Von Folgen und Reihen</i>	145
Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	145
Folgen aneinanderreihen	145
Reihen summieren	148
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	150
Das einfachste Kriterium auf Divergenz: Eine notwendige Bedingung	150
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz	151
Drei Vergleichskriterien für Konvergenz beziehungsweise Divergenz	153
Quotienten- und Wurzelkriterium	156
Alternierende Reihen	158
Absolute oder normale Konvergenz – das ist die Frage!	158
Das Kriterium mit den alternierenden Reihen	159
Ableitungen und Integrale für Grenzprozesse nutzen	162
Teil III	
<i>Integration – Eine Kunst für sich</i>	165
Kapitel 7	
<i>Integration: Die Rückwärts-Differentiation</i>	167
Flächenberechnung – eine Einführung	167
Flächen mithilfe von Rechtecksummen annähern	168

Exakte Flächen mithilfe des bestimmten Integrals ermitteln	173
Stammfunktionen suchen – rückwärts Ableiten	174
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	176
Die müßige Flächenfunktion	176
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	179
Die erste Version des Hauptsatzes	179
Der andere Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	182
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen	184
Stammfunktionen finden – Drei grundlegende Techniken	186
Umkehrregeln für Stammfunktionen	186
Raten und prüfen	187
Die Substitutionsmethode	198
Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	190
Kapitel 8	
Integration: Praktische Tricks für Profis	193
Partielle Integration: Teile und herrsche!	193
Das richtige u auswählen	195
Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	196
Alles im Kreis!	197
Integrale mit Sinus und Kosinus	198
Fall 1: Die Potenz von Sinus ist ungerade und positiv	198
Fall 2: Die Potenz von Kosinus ist ungerade und positiv	199
Fall 3: Die Potenzen von Sinus und Kosinus sind gerade und nicht negativ	199
Das ABC der Partialbrüche	200
Fall 1: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	200
Fall 2: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	201
Fall 3: Der Nenner enthält lineare oder quadratische Faktoren in höherer Potenz	202
Bonusrunde – Der Koeffizientenvergleich	203
Grau ist alle Theorie – Praktische Integrale!	204
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen	204
Bogenlängen bestimmen	207
Drehoberflächen entstehen durch Drehen!	208
Teil IV	
Lineare Algebra	211
Kapitel 9	
Grundlagen der Vektorräume	213
Vektoren erleben	213
Vektoren veranschaulichen	214
Mit Vektoren anschaulich rechnen	216
Mit Vektoren abstrakt rechnen	217
Betrag eines Vektors	219

Skalarprodukt von Vektoren	220
Schöne Vektorraumteilmengen = Untervektorräume	222
Vektoren und ihre Koordinaten	223
Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	226
Punkte im Raum	226
Parametergleichung für Geraden	227
Zweipunktgleichung für Geraden	229
Parametergleichung für Ebenen	229
Dreipunktgleichung für Ebenen	230
Koordinatengleichung für Ebenen	231
Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen	231
Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen	233
Kollision während einer Flugshow in Las Vegas?	240

Kapitel 10

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

243

Arten von linearen Gleichungssystemen	243
Homogene Gleichungssysteme	244
Inhomogene Gleichungssysteme	244
Überbestimmte Gleichungssysteme	245
Unterbestimmte Gleichungssysteme	245
Quadratische Gleichungssysteme	245
Nicht lösbare Gleichungssysteme	246
Grafische Lösungsansätze für LGS	246
Einfache Geraden im zweidimensionalen Raum	246
Beliebige Geraden im zweidimensionalen Raum	247
Punkte im zweidimensionalen Raum	248
Ebenen im zweidimensionalen Raum	248
Der dreidimensionale Raum	248
Die vierte Dimension	249
Was sind eigentlich Matrizen?	250
Rechnen mit Matrizen	251
Matrizen in Produktionsprozessen der Praxis	252
Transponieren und Invertieren	254
Matrizen und lineare Gleichungssysteme	255
Das Lösungsverfahren: Der Gaußsche Algorithmus	256
Der Rang von Matrizen	260
Matrizen invertieren in der Praxis	262
Kriterien für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	263
Matrizen und lineare Abbildungen	264
Was sind lineare Abbildungen?	264
Matrizen als lineare Abbildungen	265
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Theorie	265
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Praxis	266
Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen	268

Kapitel 11	
Matrizen – Das Finale!	271
Matrizen und ihre Determinanten	271
Determinanten von 2x2-Matrizen	271
Determinanten von 3x3-Matrizen	272
Determinanten von allgemeinen Matrizen	272
Determinanten, Matrizen & lineare Gleichungssysteme	275
Die Cramersche Regel	276
Berechnung der Inversen mittels der Adjunktenformel	278
Flächen und Volumina mittels Determinanten	279
Kreuzprodukt von Vektoren	280
Basistransformation	282
Auf den Maßstab kommt es an!	282
Geben Sie mir Ihre Koordinaten!	283
Matrixdarstellung bezüglich verschiedener Basen	285
Basistransformationsmatrizen	287
Überzeugende Diagramme	288
Eigenwerte und Eigenvektoren	290
Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren?	290
Eigenwerte einer Matrix berechnen	291
Eigenvektoren einer Matrix berechnen	292
Eigenräume finden und analysieren	293
Matrizen diagonalisieren	294
Drehungen und Spiegelungen	298
Drehungen in der Ebene	299
Berechnung des Drehwinkels in der Ebene	301
Spiegelungen in der Ebene	301
Berechnung der Spiegelachse in der Ebene	303
Drehungen im dreidimensionalen Raum	305
Kapitel 12	
Nicht reell, aber real: Komplexe Zahlen	309
Was sind komplexe Zahlen?	309
Komplexe Rechenoperationen	310
Komplexe quadratische Gleichungen	313
Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen	314
Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten	315
Anwendungen komplexer Zahlen	318
Teil V	
Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	321
Kapitel 13	
Das Handwerkszeug des Statistikers	323
Die Grundgesamtheit	323
Die Stichprobe	324

Die Zufallsstichprobe	325
Daten	325
Statistik	324
Das arithmetische Mittel – der Mittelwert	326
Der Median	326
Die Standardabweichung	327
Perzentil vs. Quantil	328
Der Standardwert	328
Die Normalverteilung	329
Schätzwerte	330
Der Zentrale Grenzwertsatz	330
Das Gesetz der großen Zahlen	331
Das Konfidenzintervall	332
Korrelation und Kausalzusammenhang	332

Kapitel 14
Von Mittelwerten, Quantilen und vertrauenswürdigen Zusammenhängen **335**

Daten mit statistischen Größen beschreiben	335
Qualitative Daten beschreiben	336
Quantitative Daten beschreiben	339
Lagemaße	339
Berechnen von Variationen	343
Mit Perzentilen die relative Position ermitteln	348
Die Suche nach dem Zusammenhang: Korrelationen und ihre Koeffizienten	351
Streudiagramme erstellen	352
Interpretation eines Streudiagramms	352
Die Beziehung zwischen zwei quantitativen Variablen quantifizieren	353

Kapitel 15
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung **357**

Arten der Wahrscheinlichkeit	357
Wahrscheinlichkeitsnotation	358
Totale Wahrscheinlichkeit	359
Wahrscheinlichkeit der Vereinigung	359
Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts	359
Komplementäre Wahrscheinlichkeit	360
Bedingte Wahrscheinlichkeit	360
Wahrscheinlichkeitsregeln verstehen und anwenden	361
Die Komplementärregel	362
Die Multiplikationsregel	363
Die Additionsregel	364
Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse	364
Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse anhand der Definition prüfen	365
Die Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse nutzen	366
Einander ausschließende Ereignisse berücksichtigen	366

Einander ausschließende Ereignisse erkennen	367
Die Additionsregel mit einander ausschließenden Ereignissen vereinfachen	367
Unabhängige und einander ausschließende Ereignisse unterscheiden	368
Ein Vergleich von unabhängig und einander ausschließend	368
Unabhängigkeit beziehungsweise einander Ausschließen in einem Kartenspiel prüfen	369
Nützliche Zählregeln und Kombinatorik	370
Urnen und Kugeln	370
Ziehung mit Berücksichtigung der Reihenfolge	371
Ziehung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	372
Abschließende Betrachtungen	372

Teil VI

Fortgeschrittene Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung 375

Kapitel 16

Wahrscheinlichkeiten darstellen: Venn-Diagramme und der Satz von Bayes 377

Wahrscheinlichkeiten mit Venn-Diagrammen darstellen	377
Mit Venn-Diagrammen Wahrscheinlichkeiten ermitteln	378
Beziehungen mit Venn-Diagrammen ordnen und darstellen	379
Umwandlungsregeln für Mengen in Venn-Diagrammen	380
Die Grenzen von Venn-Diagrammen	381
Wahrscheinlichkeiten in komplexen Aufgaben mit Venn-Diagrammen ermitteln	382
Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen darstellen	384
Mehrstufige Ergebnisse mit einem Baumdiagramm darstellen	386
Bedingte Wahrscheinlichkeiten mit einem Baumdiagramm darstellen	388
Die Grenzen der Baumdiagramme	391
Mit einem Baumdiagramm Wahrscheinlichkeiten für komplexe Ereignisse ermitteln	391
Das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes	393
Eine totale Wahrscheinlichkeit mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen	393
Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit mit dem Satz von Bayes berechnen	398

Kapitel 17

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen 403

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen	403
Was ist eine Zufallsvariable?	403
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung finden und anwenden	405
Die Verteilungsfunktion ermitteln und anwenden	409
Die Verteilungsfunktion interpretieren	410
Die Verteilungsfunktion grafisch darstellen	411
Wahrscheinlichkeiten mit der Verteilungsfunktion ermitteln	412
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion aus der Verteilungsfunktion herleiten	413

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen	415
Den Erwartungswert von X berechnen	415
Die Varianz von X berechnen	417
Die Standardabweichung von X berechnen	418
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariablen	419
Kapitel 18	
Die wunderbare Welt der Wahrscheinlichkeitsverteilungen	421
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	421
Diskrete Gleichverteilung	421
Binomialverteilung	423
Poissonverteilung	428
Geometrische Verteilung	433
Hypergeometrische Verteilung	435
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	439
Stetige Gleichverteilung	440
Normalverteilung	441
Exponentialverteilung	450
Teil VII	
Der Top-Ten-Teil	455
Kapitel 19	
Zehn häufig gemachte Fehler im (Stochastik-) Alltag	457
Vergessen, dass eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegen muss	457
Kleine Wahrscheinlichkeiten fehlinterpretieren	457
Wahrscheinlichkeiten für kurzfristige Vorhersagen verwenden	458
Nicht glauben, dass 1-2-3-4-5-6 gewinnen kann	458
An Glücksträhnen beim Würfeln glauben	458
Jeder Situation eine 50-50-Chance einräumen	459
Bedingte Wahrscheinlichkeiten verwechseln	459
Die falsche Wahrscheinlichkeitsverteilung anwenden	459
Die Voraussetzungen für ein Wahrscheinlichkeitsmodell nicht richtig prüfen	459
Unabhängigkeit von Ereignissen annehmen	460
Kapitel 20	
Zehn Ratschläge für einen erfolgreichen Abschluss Ihres Mathekurses	461
Der Kurs beginnt pünktlich in der ersten Vorlesung	461
Besuchen Sie die Vorlesungen und Übungen	461
Verschaffen Sie sich ordentliche Mitschriften	462
Schauen Sie auch in die Bücher	462
Lösen Sie die wöchentlichen Übungsaufgaben	462

Inhaltsverzeichnis

Gruppenarbeit nicht ausnutzen	462
Lernen Sie nicht nur für die Klausur	463
Klausurvorbereitung beginnt nicht einen Tag vorher	463
Aus Fehlern lernen	463
Der eigene Kurs ist immer der wichtigste!	464
<i>Anhang Tabellen beliebter Verteilungsfunktionen</i>	465
Tabelle für die Binomialverteilung	465
Tabelle für die Normalverteilung	469
Tabelle für die Poissonverteilung	472
<i>Stichwortverzeichnis</i>	475

