Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

1

In diesem Kapitel...

- Erkennen, wie Differentialgleichungen erster Ordnung aussehen
- Lösungen für Differentialgleichungen erster Ordnung mit und ohne y-Terme finden
- Die Integration von Faktoren als Trick anwenden

Klassische Differentialgleichungen können als linear oder nicht linear eingeordnet werden. Eine Differentialgleichung wird als *linear* bezeichnet, wenn sie nur *lineare* Terme (d.h. Terme mit der Potenz 1) von y, y', y'' usw. enthält. Die folgende Gleichung ist ein Beispiel für eine lineare Differentialgleichung:

$$L\frac{d^2Q}{dx^2} + R\frac{dQ}{dx} + \frac{1Q}{C} = E(x)$$

Nicht lineare Differentialgleichungen dagegen beinhalten nicht lineare Terme in y, y', y'' usw. Die nächste Gleichung, die den Winkel eines Pendels beschreibt, wird als nicht lineare Gleichung betrachtet, weil sie den Term sin θ enthält (nicht einfach nur θ).

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{g}{L} sin\theta = 0$$

Dieses Kapitel konzentriert sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung. Hier können Sie Ihr Auge schulen, um lineare Gleichungen auf den ersten Blick zu erkennen. Außerdem werden Sie üben, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen, egal, ob diese ein y enthalten oder nicht. Und schließlich zeige ich Ihnen noch einen kleinen (aber extrem praktischen) Trick zu diesem Thema, nämlich die Integration von Faktoren.

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung erkennen

Hier sehen Sie die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Funktionen sind (bei denen es sich einfach um Konstanten handeln kann):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Hier einige Beispiele für lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = y + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 1$$

Versuchen Sie der Übung halber festzustellen, ob die folgenden Gleichungen linear oder nicht linear sind.

Frage

Ist diese Gleichung eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?

$$\frac{dy}{dx} = 17y + 4$$

Antwort

Ja.

Diese Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, weil sie nur Terme erster Ordnung in y und y' enthält.

Aufgabe 1

Ist dies eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?

$$\frac{dy}{dx} = 9y + 1$$

Lösung

Aufgabe 2

Handelt es sich hier um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?

$$\frac{dy}{dx} = 17y^3 + 4$$

Lösung

Aufgabe 3

Ist dies eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?

$$\frac{dy}{dx} = y\cos(x)$$

Lösung

Aufgabe 4

Ist dies eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?

$$\frac{dy}{dx} = x\cos(y)$$

Lösung

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung lösen, die keine Terme in y beinhalten

Der einfachste Typ linearer Differentialgleichungen erster Ordnung beinhaltet überhaupt keinen Term. Stattdessen enthält er nur die erste Ableitung von y, y', y'' usw. Diese Differentialgleichungen sind einfach zu lösen, weil die ersten Ableitungen einfach zu integrieren sind. Hier die allgemeine Form dieser Gleichungen (beachten Sie, dass $q(x)$ eine Funktion ist, bei der es sich auch um eine Konstante handeln kann):

$$\frac{dy}{dx} = q(x)$$

Sehen Sie sich die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung an:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

Beachten Sie, dass es keinen Term gibt, der nur y angibt. Wie lösen Sie also eine solche Gleichung? Sie bringen das dx auf die rechte Seite:

$$dy = 3dx$$

Anschließend integrieren Sie und erhalten

$$y = 3x + c$$

Dabei ist c eine Integrationskonstante.

Um festzustellen, was genau c ist, betrachten Sie einfach die Anfangsbedingungen. Angenommen, $y(0)$ – d.h. der Wert von y für $x = 0$ – ist gleich

$$y(0) = 15$$

Wenn Sie $y(0) = 15$ in $y = 3x + c$ einsetzen, erhalten Sie

$$y(0) = c = 15$$

Sie haben also $c = 15$ und $y = 3x + 15$. Das ist die komplette Lösung!

Wenn Sie es mit Integrationskonstanten wie c zu tun haben, suchen Sie nach den vorgegebenen Anfangsbedingungen. Beispielsweise wird die oben gezeigte Aufgabe in der Regel wie folgt dargestellt:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

mit

$$y(0) = 15$$

Und jetzt gehen wir einen Schritt weiter! (Beachten Sie, dass diese Aufgabe immer noch keine Terme in y beinhaltet.)

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 3x^2 + x$$

mit

$$y(0) = 3$$

Weil diese Gleichung keine Terme in y beinhaltet, können Sie das dx nach rechts bringen, nämlich wie folgt:

$$dy = x^3dx - 3x^2dx + xdx$$

Anschließend integrieren Sie und erhalten

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + c$$

Um c zu bestimmen, verwenden Sie die Ausgangsbedingung, nämlich

$$y(0) = 3$$

Wenn Sie jetzt $x = 0 \rightarrow y = 3$ in die Gleichung für y einsetzen, erhalten Sie

$$y(0) = 3 = c$$

Die vollständige Lösung lautet also

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$$

Wenn Sie es mit linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ohne Term in y zu tun haben, gehen Sie also einfach wie folgt vor:

1. **Sie verschieben das dx auf die rechte Seite und integrieren.**
2. **Sie wenden die Ausgangsbedingung an, um nach der Integrationskonstanten aufzulösen.**

Nachfolgend finden Sie einige Übungsaufgaben, um sicherzustellen, dass Sie das Prinzip verstanden haben.

Frage

Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

mit

$$y(0) = 3$$

Antwort

$y = x^2 + 3$

1. Multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:

   $dy = 2xdx$

2. Integrieren Sie beide Seiten, um das Folgende zu erhalten, wobei c eine Integrationskonstante ist:

   $y = x^2 + c$

3. Wenden Sie die Anfangsbedingung an, um Folgendes zu erhalten:

   $c = 3$

4. Nachdem Sie nach c aufgelöst haben, finden Sie die Lösung für die Differentialgleichung:

   $y = x^2 + 3$

Aufgabe 5

Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 8x$$

mit

$y(0) = 4$

Lösung

Aufgabe 6

Wie lautet y für die folgende Gleichung?

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

mit

$y(0) = 2$

Lösung

Aufgabe 7

Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 5$$

mit

$y(0) = 10$

Lösung

Aufgabe 8

Wie lautet y für die folgende Gleichung?

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 3$$

mit

$y(0) = 12$

Lösung

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit Termen in y lösen

Sie fragen sich jetzt, wie Sie vorgehen könnten, wenn sowohl x als auch y vorkommen:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Betrachten Sie zunächst diese allgemeine Aufgabe:

$$\frac{dy}{dx} = ay - b$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die sowohl dy/dx als auch y enthält. Wie gehen Sie damit um, um eine Lösung zu finden? Mit ein wenig Algebra können Sie diese Gleichung wie folgt umschreiben:

$$\frac{dy/dx}{y - (b/a)} = a$$

Wenn Sie beide Seiten mit dx multiplizieren, erhalten Sie

$$\frac{dy}{y - (b/a)} = adx$$

Glückwunsch! Damit haben Sie x auf eine Seite dieser Differentialgleichung und y auf die andere gebracht, so dass die Integration sehr viel einfacher wird. Und durch die Integration beider Seiten erhalten Sie:

$$\ln|y - (b/a)| = ax + C$$

Dabei ist C eine Integrationskonstante. Wenn Sie e in die Potenz von beiden Seiten erheben, erhalten Sie Folgendes, wobei c eine Konstante ist, die als $c = e^C$ definiert ist:

$$y = \left(\frac{b}{a}\right) + ce^{ax}$$

Alles, was über diesen Schwierigkeitsgrad hinausgeht, muss anders behandelt werden. Um diese Gleichungen wird es im restlichen Buch gehen.

Wenn Sie davon überzeugt sind, dass Sie jetzt wissen, wie man lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit y-Termen löst, probieren Sie, die folgenden Aufgaben zu lösen:

Frage

Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 4$$

mit

$$y(0) = 3$$

Antwort

$y = 2 + e^{2x}$

1. Wenden Sie ein bisschen Algebra an, um Folgendes zu erhalten:

   $$\frac{dy/dx}{y-2} = 2$$

2. Anschließend multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:

   $$\frac{dy}{y-2} = 2dx$$

3. Integrieren Sie:

   $$\ln|y-2| = 2x + C$$

4. Anschließend erheben Sie e in die Potenz der beiden Seiten:

   $$y = 2 + e^c e^{2x} = 2 + ce^{2x}$$

5. Schließlich wenden Sie die Anfangsbedingung an und erhalten:

   $$y = 2 + e^{2x}$$

Aufgabe 9

Wie lautet y für die folgende Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = 4y - 8$$

mit

$$y(0) = 5$$

Lösung

Aufgabe 10

Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 9$$

mit

$$y(0) = 9$$

Lösung

Aufgabe 11

Wie lautet y für die folgende Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = 9y - 18$$

mit

$$y(0) = 5$$

Lösung

Aufgabe 12

Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 4y - 20$$

mit

$$y(0) = 16$$

Lösung

Integrationsfaktoren: Ein Insider-Trick

Weil nicht alle Differentialgleichungen so unproblematisch sind wie diejenigen, die wir in diesem Kapitel bereits vorgestellt haben, brauchen Sie leistungsfähigeres Handwerkszeug zum Lösen von Differentialgleichungen. Wir beginnen mit *Integrationsfaktoren*, das sind Funktionen von $\mu(x)$. Bei der Idee hinter einem Integrationsfaktor geht es darum, die Differentialgleichung damit zu multiplizieren, so dass eine Gleichung entsteht, die leichter integriert werden kann.

Angenommen, Sie haben die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 9$$

mit

$$y(0) = 7$$

Um diese Gleichung mit Hilfe eines Integrationsfaktors zu lösen, versuchen Sie, mit Ihrem noch unbestimmten Integrationsfaktor $\mu(x)$ zu multiplizieren:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 3\mu(x)y = 9\mu(x)$$

Der Trick ist jetzt, $\mu(x)$ so auszuwählen, dass Sie die linke Seite als Ableitung von etwas erkennen, das leicht integriert werden kann. Wenn Sie genauer hinsehen, erkennen Sie, dass die linke Seite dieser Gleichung sehr nach der Differenzierung des Produkts $\mu(x)y$ aussieht, weil die Ableitung von $\mu(x)y$ nach x *nämlich* lautet:

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx}$$

Setzt man nun die rechte Seite dieser Differentialgleichung gleich der linken Seite der vorhergehenden, erhält man

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 3\mu(x)$$

Endlich! Das sieht nach etwas Brauchbarem aus. Ordnen Sie die Gleichung um, um Folgendes zu erhalten:

$$\frac{d\mu(x)/dx}{\mu(x)} = 3$$

Anschließend multiplizieren Sie beide Seiten mit dx und erhalten

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 3dx$$

Durch Integration erhalten Sie

$$ln|\mu(x)| = 3x + b$$

Dabei ist b eine Integrationskonstante.

Wenn Sie e in die Potenz der beiden Seiten erheben, erhalten Sie:

$$\mu(x) = ce^{3x}$$

c ist eine weitere Konstante ($c = e^b$).

Erkannt? Sie haben soeben einen Integrationsfaktor bestimmt, nämlich $\mu(x) = ce^{3t}$.

Diesen Integrationsfaktor können Sie jetzt für die ursprüngliche Differentialgleichung anwenden und die Gleichung mit $\mu(x)$ multiplizieren:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 3\mu(x)y = 9\mu(x)$$

Das ist gleich

$$ce^{3x}\frac{dy}{dx} + 3ce^{3x}y = 9ce^{3x}$$

Wie Sie sehen, fällt die Konstante c heraus und Sie erhalten:

$$e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3e^{3x}y = 9e^{3x}$$

Weil Sie nur nach einem Integrationsfaktor für die Multiplikation suchen, können Sie die Integrationskonstante auch weglassen, wenn Sie einen Integrationsfaktor finden, oder $c = 1$ setzen.

Und hier kommt die Genialität der Integrationsfaktoren ins Spiel, weil Sie die linke Seite dieser Gleichung als die Ableitung des Produkts $e^{3x}y$ erkennen. Die Gleichung wird also zu

$$\frac{d(e^{3x}y)}{dx} = 9e^{3x}$$

Das sieht schon sehr viel umgänglicher aus als die ursprüngliche Version dieser Differentialgleichung.

Jetzt multiplizieren Sie beide Seiten mit dx, um Folgendes zu erhalten:

$$d(e^{3x}y) = 9e^{3x}dx$$

Nun integrieren Sie beide Seiten:

$$e^{3x}y = 3e^{3x} + c$$

und lösen nach y auf:

$$y = 3 + ce^{-3x}$$

Wie die Anfangsbedingung besagt hat, dass $y(0) = 7$ ist, ist $c = 4$, und damit

$$y = 3 + 4e^{-3x}$$

Nicht schlecht, oder?

Hier einige Übungsgleichungen, die Ihnen helfen sollen, sich an den Trick mit den Integrationsfaktoren zu gewöhnen:

Frage

Lösen Sie mit Hilfe eines Integrationsfaktors nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 10$$

mit

$$y(0) = 6$$

Antwort

$y = 2 + 4e^{-5x}$

1. Multiplizieren Sie beide Seiten der Differentialgleichung mit $\mu(x)$, um Folgendes zu erhalten:

   $$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 5\mu(x)y = 10\mu(x)$$

2. Versuchen Sie, in der linken Seite eine Ableitung zu erkennen (in diesem Fall die Ableitung eines Produkts):

   $$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$$

3. Anschließend setzen Sie die rechte Seite der Gleichung in Schritt 2 gleich der linken Seite der Gleichung in Schritt 1:

   $$\frac{d\mu(x)}{dx} = 5\mu(x)$$

4. Ordnen Sie die Terme neu an, um Folgendes zu erhalten:

   $$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 5dx$$

5. Jetzt integrieren Sie:

   $$\ln|\mu(x)| = 5x + b$$

6. Erheben Sie e in die Potenz beider Seiten (mit $c = e^b$), um zu erhalten:

   $$\mu(x) = ce^{5x}$$

7. Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung mit dem Integrationsfaktor (so dass sich c wegkürzt), um Folgendes zu erhalten:

   $$e^{5x}\frac{dy}{dx} + 5e^{5x}y = 10e^{5x}$$

8. Fassen Sie die Terme auf der linken Seite der Gleichung zusammen:

   $$\frac{d(e^{5x}y)}{dx} = 10e^{5x}$$

9. Jetzt multiplizieren Sie mit dx:

   $$d(e^{5x}y) = 10e^{5x}dx$$

10. Integrieren Sie:

    $$e^{5x}y = 2e^{5x} + c$$

11. Dividieren Sie beide Seiten durch e^{5x}, um Folgendes zu erhalten:

    $$y = 2 + ce^{-5x}$$

12. Jetzt wenden Sie noch die Anfangsbedingung an:

    $$y = 2 + 4e^{-5x}$$

Aufgabe 13

Lösen Sie mit Hilfe eines Integrationsfaktors nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

mit

$$y(0) = 3$$

Lösung

Aufgabe 14

Bestimmen Sie in der folgenden Differentialgleichung y mit Hilfe eines Integrationsfaktors:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 9$$

mit

$$y(0) = 8$$

Lösung

Aufgabe 15

Lösen Sie mit Hilfe eines Integrationsfaktors nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 14$$

mit

$$y(0) = 9$$

Lösung

Aufgabe 16

Bestimmen Sie in der folgenden Differentialgleichung y mit Hilfe eines Integrationsfaktors:

$$\frac{dy}{dx} + 9y = 63$$

mit

$$y(0) = 8$$

Lösung

Lösungen für die Aufgaben zu linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

Nachfolgend finden Sie die Lösungen zu den Übungen in diesem Kapitel. Sie zeigen das schrittweise Verfahren auf, so dass Sie einfacher nachschlagen können, falls Sie irgendwo auf dem Lösungsweg nicht mehr weiterwissen.

1. **Ist dies eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?**

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 9y + 1}$$

   Ja. Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, weil sie nur Terme in y und y' erster Ordnung beinhaltet.

2. **Handelt es sich hier um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?**

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 17y^3 + 4}$$

   Nein. Diese Gleichung ist keine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, weil sie nicht nur Terme erster Ordnung in y und y' enthält.

3. **Ist dies eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?**

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = y\cos(x)}$$

   Nein. Diese Gleichung ist keine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, weil sie nicht nur Terme erster Ordnung in y und y' enthält.

4. **Ist dies eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung?**

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = x\cos(y)}$$

   Nein. Diese Gleichung ist keine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, weil sie nicht nur Terme erster Ordnung in y und y' enthält.

5. **Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:**

   $$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 8x}$$

   mit

   $$\boldsymbol{y(0) = 4}$$

   Lösung: $\boldsymbol{y = 4x^2 + 4}$

   a) **Multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

      $$dy = 8xdx$$

   b) **Integrieren Sie beide Seiten, um das Folgende zu erhalten, wobei c ein Integrationsfaktor ist:**

      $$\boldsymbol{y = 4x^2 + c}$$

c) **Wenden Sie die Anfangsbedingung an, um Folgendes zu erhalten:**

$c = 4$

d) **Nachdem Sie nach c aufgelöst haben, können Sie die Lösung ermitteln:**

$y = 4x^2 + 4$

6. Wie lautet y für die folgende Gleichung?

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$$

mit

$y(0) = 2$

Lösung: $y = x^2 + 2x + 2$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$dy = 2xdx + 2dx$

b) **Integrieren Sie beide Seiten, um das Folgende zu erhalten, wobei c ein Integrationsfaktor ist:**

$y = x^2 + 2x + c$

c) **Wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$c = 2$

d) **Nachdem Sie nach c aufgelöst haben, können Sie die Lösung ermitteln:**

$y = x^2 + 2x + 2$

7. Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 5$$

mit

$y(0) = 10$

Lösung: $y = 3x^2 + 5x + 10$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$dy = 6xdx + 5dx$

b) **Integrieren Sie beide Seiten, um das Folgende zu erhalten, wobei c ein Integrationsfaktor ist:**

$y = 3x^2 + 5x + c$

c) **Wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$c = 10$

d) **Nachdem Sie nach c aufgelöst haben, können Sie die Lösung ermitteln:**

$y = 3x^2 + 5x + 10$

8. **Wie lautet y für die folgende Gleichung?**

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 3$$

mit

$y(0) = 12$

Lösung: $y = 4x^2 + 3x + 12$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$dy = 8xdx + 3dx$

b) **Integrieren Sie beide Seiten, um das Folgende zu erhalten, wobei c ein Integrationsfaktor ist:**

$y = 4x^2 + 3x + c$

c) **Wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$c = 12$

d) **Nachdem Sie nach c aufgelöst haben, können Sie die Lösung ermitteln:**

$y = 4x^2 + 3x + 12$

9. **Wie lautet y für die folgende Gleichung:**

$$\frac{dy}{dx} = 4y - 8$$

mit

$y(0) = 5$

Lösung: $y = 2 + 3e^{4x}$

a) **Mit ein bisschen Algebra erhalten Sie:**

$$\frac{dy/dx}{y-2} = 4$$

b) **Anschließend multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$$\frac{dy}{y-2} = 4dx$$

c) **Integrieren Sie:**

$ln|y - 2| = 4x + c$

d) **Erheben Sie e in die Potenz der beiden Seiten:**

$y = 2 + ce^{4x}$

e) **Schließlich wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$y = 2 + 3e^{4x}$

10. **Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:**

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 9$$

mit

$$y(0) = 9$$

Lösung: $y = 3 + 6e^{3x}$

a) **Mit ein bisschen Algebra formen Sie die Gleichung wie folgt um:**

$$\frac{dy/dx}{y-3} = 3$$

b) **Anschließend multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$$\frac{dy}{y-3} = 3dx$$

c) **Integrieren Sie:**

$$ln|y-3| = 3x + c$$

d) **Erheben Sie e in die Potenz der beiden Seiten:**

$$y = 3 + ce^{3x}$$

e) **Schließlich wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$$y = 3 + 6e^{3x}$$

11. **Wie lautet y für die folgende Gleichung:**

$$\frac{dy}{dx} = 9y - 18$$

mit

$$y(0) = 5$$

Lösung: $y = 2 + 3e^{9x}$

a) **Zuerst wenden Sie ein bisschen Algebra an:**

$$\frac{dy/dx}{y-2} = 9$$

b) **Anschließend multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$$\frac{dy}{y-2} = 9dx$$

c) **Integrieren Sie:**

$ln|y-2| = 9x + c$

d) **Erheben Sie e in die Potenz der beiden Seiten:**

$y = 2 + ce^{9x}$

e) **Schließlich wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$y = 2 + 3e^{9x}$

12. **Lösen Sie in dieser Differentialgleichung nach y auf:**

$$\frac{dy}{dx} = 4y - 20$$

mit

$y(0) = 16$

Lösung: $y = 5 + 11e^{4x}$

a) **Mit ein bisschen Algebra formen Sie die Gleichung wie folgt um:**

$$\frac{dy/dx}{y-5} = 4$$

b) **Anschließend multiplizieren Sie beide Seiten mit dx:**

$$\frac{dy}{y-5} = 4dx$$

c) **Integrieren Sie:**

$ln|y-5| = 4x + c$

d) **Erheben Sie e in die Potenz der beiden Seiten:**

$y = 5 + ce^{4x}$

e) **Schließlich wenden Sie die Anfangsbedingung an:**

$y = 5 + 11e^{4x}$

13. **Lösen Sie mit Hilfe eines Integrationsfaktors nach y auf:**

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

mit

$y(0) = 3$

Lösung: $y = 2 + e^{-2x}$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit $\mu(x)$, um Folgendes zu erhalten:**

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 2\mu(x)y = 4\mu(x)$$

b) **Setzen Sie die linke Seite gleich einer Ableitung (in diesem Fall der Ableitung eines Produkts):**

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$$

c) **Anschließend setzen Sie die rechte Seite der Gleichung aus Schritt 2 gleich der linken Seite der Gleichung aus Schritt 1:**

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 2\mu(x)$$

d) **Ordnen Sie die Terme neu an, um Folgendes zu erhalten:**

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 2dx$$

e) **Jetzt integrieren Sie:**

$$ln|\mu(x)| = 2x + b$$

f) **Erheben Sie e in die Potenz beider Seiten (mit $c = e^b$), um Folgendes zu erhalten:**

$$\mu(x) = ce^{2x}$$

g) **Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung mit dem Integrationsfaktor (und kürzen Sie c weg):**

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 4e^{2x}$$

h) **Anschließend fassen Sie die Terme auf der linken Seite dieser Gleichung zusammen:**

$$\frac{d(e^{2x}y)}{dx} = 4e^{2x}$$

i) **Jetzt multiplizieren Sie mit dx:**

$$d(e^{2x}y) = 4e^{2x}dx$$

j) **Integrieren Sie:**

$$e^{2x}y = 2e^{2x} + c$$

k) **Anschließend dividieren Sie beide Seiten durch e^{2x}, um Folgendes zu erhalten:**

$$y = 2 + ce^{-2x}$$

l) **Jetzt wenden Sie die Anfangsbedingung an, um Ihre Lösung zu erhalten:**

$$y = 2 + e^{-2x}$$

14. Bestimmen Sie in der folgenden Differentialgleichung y mit Hilfe eines Integrationsfaktors:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 9$$

mit

$\boldsymbol{y(0) = 8}$

Lösung: $\boldsymbol{y = 3 + 5e^{-3x}}$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit $\mu(x)$:**

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 3\mu(x)y = 9\mu(x)$$

b) **Finden Sie in der linken Seite eine Ableitung (in diesem Fall der Ableitung eines Produkts):**

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$$

c) **Anschließend setzen Sie die rechte Seite der Gleichung aus Schritt 2 gleich der linken Seite der Gleichung aus Schritt 1:**

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 3\mu(x)$$

d) **Ordnen Sie die Terme neu an, um Folgendes zu erhalten:**

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 3dx$$

e) **Jetzt integrieren Sie:**

$$ln|\mu(x)| = 3x + b$$

f) **Erheben Sie e in die Potenz beider Seiten (mit $c = e^b$):**

$$\mu(x) = ce^{3x}$$

g) **Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung mit dem Integrationsfaktor (und kürzen Sie c weg):**

$$e^{3x}\frac{dy}{dx} + 3e^{3x}y = 9e^{3x}$$

h) **Anschließend fassen Sie die Terme auf der linken Seite dieser Gleichung zusammen:**

$$\frac{d(e^{3x}y)}{dx} = 9e^{3x}$$

i) **Jetzt multiplizieren Sie mit dx:**

$$d(e^{3x}y) = 9e^{3x}dx$$

j) **Integrieren Sie:**

$$e^{3x}y = 3e^{3x} + c$$

k) **Anschließend dividieren Sie beide Seiten durch e^{3x}, um Folgendes zu erhalten:**

$y = 3 + ce^{-3x}$

l) **Jetzt wenden Sie die Anfangsbedingung an, um Ihre Lösung zu erhalten:**

$y = 3 + 5e^{-3x}$

15. Lösen Sie mit Hilfe eines Integrationsfaktors nach y auf:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 14$$

mit

$y(0) = 9$

Lösung: $y = 7 + 2e^{-2x}$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit $\mu(x)$, um Folgendes zu erhalten:**

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 2\mu(x)y = 14\mu(x)$$

b) **Setzen Sie die linke Seite gleich einer Ableitung (in diesem Fall der Ableitung eines Produkts):**

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$$

c) **Anschließend setzen Sie die rechte Seite der Gleichung aus Schritt 2 gleich der linken Seite der Gleichung aus Schritt 1:**

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 2\mu(x)$$

d) **Ordnen Sie die Terme neu an, um Folgendes zu erhalten:**

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 2dx$$

e) **Jetzt integrieren Sie:**

$ln|\mu(x)| = 2x + b$

f) **Erheben Sie e in die Potenz beider Seiten (mit $c = e^b$):**

$\mu(x) = ce^{2x}$

g) **Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung mit dem Integrationsfaktor (und kürzen Sie c weg):**

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 14e^{2x}$$

h) **Anschließend fassen Sie die Terme auf der linken Seite dieser Gleichung zusammen:**

$$\frac{d(e^{2x}y)}{dx} = 14e^{2x}$$

i) **Jetzt multiplizieren Sie mit dx:**

$d(e^{2x}y) = 14e^{2x}dx$

j) **Integrieren Sie:**

$e^{2x}y = 7e^{2x} + c$

k) **Anschließend dividieren Sie beide Seiten durch e^{3x}, um Folgendes zu erhalten:**

$y = 7 + ce^{-2x}$

l) **Jetzt wenden Sie die Anfangsbedingung an, um Ihre Lösung zu erhalten:**

$y = 7 + 2e^{-2x}$

16. **Bestimmen Sie in der folgenden Differentialgleichung y mit Hilfe eines Integrationsfaktors:**

$$\frac{dy}{dx} + 9y = 63$$

mit

$y(0) = 8$

Lösung: $y = 7 + e^{-9x}$

a) **Multiplizieren Sie beide Seiten der Gleichung mit $\mu(x)$:**

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + 9\mu(x)y = 63\mu(x)$$

b) **Setzen Sie die linke Seite gleich einer Ableitung (in diesem Fall der Ableitung eines Produkts):**

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y$$

c) **Anschließend setzen Sie die rechte Seite der Gleichung aus Schritt 2 gleich der linken Seite der Gleichung aus Schritt 1:**

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 9\mu(x)$$

d) **Ordnen Sie die Terme neu an, um Folgendes zu erhalten:**

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 9dx$$

e) **Jetzt integrieren Sie:**

$ln|\mu(x)| = 9x + b$

f) **Erheben Sie e in die Potenz beider Seiten (mit $c = e^b$):**

$\mu(x) = ce^{9x}$

g) Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung mit dem Integrationsfaktor (und kürzen Sie *c* weg):

$$ce^{9x}\frac{dy}{dx} + 9e^{9x}y = 63e^{9x}$$

h) Anschließend fassen Sie die Terme auf der linken Seite dieser Gleichung zusammen:

$$\frac{d(e^{9x}y)}{dx} = 63e^{9x}$$

i) Jetzt multiplizieren Sie mit *dx*:

$$d(e^{9x}y) = 63e^{9x}dx$$

j) Integrieren Sie:

$$e^{9x}y = 7e^{9x} + c$$

k) Anschließend dividieren Sie beide Seiten durch e^{9x}, um Folgendes zu erhalten:

$$y = 7 + ce^{-9x}$$

l) Jetzt wenden Sie die Anfangsbedingung an, um Ihre Lösung zu erhalten:

$$y = 7 + e^{-9x}$$