Schnelleinstieg in die lineare Algebra

1

In diesem Kapitel ...

- Ermitteln, was linear an dieser Algebra ist
- Aus technisch-naturwissenschaftlichen Problemen Gleichungen zaubern
- Lineare Gleichungen und einfache Gleichungssysteme lösen

Dieses Kapitel bietet Ihnen einen sanften Einstieg in die Übungsaufgaben zur linearen Algebra. Es geht zum einen darum, dass Sie erkennen, worin die Linearität einer Fragestellung besteht. Dazu werden Sie aus Problemen des Alltags systematisch Gleichungen erzeugen. Zum anderen dürfen Sie bereits einfache lineare Gleichungen und Gleichungssysteme lösen.

Wenn Sie sich bereits zu Höherem berufen fühlen, können Sie dieses Kapitel auch gefahrlos überspringen und gleich mit Übungen zu komplexen Zahlen in Kapitel 2 fortfahren.

Was die Algebra linear macht

Es gibt ein sehr wichtiges Kriterium, um zu beurteilen, ob ein gegebenes Problem mit Hilfe der linearen Algebra mathematisch formuliert werden kann.

Ein lineares Verhältnis liegt vor, wenn die vorkommenden Größen gleichbleibend *proportional* sind.

Dabei muss eine Variable nicht unbedingt genau so groß sein wie die andere, aber wenn für einen konkreten Wert von x der Wert von y, sagen wir, dreimal so groß ist, muss das auch für alle anderen Werte von x gelten.

In mathematischer Schreibweise ist eine Funktion f *linear*, falls folgende Bedingungen zutreffen:

$$\forall x, y : f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{sowie} \quad \forall x, k : f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$$

Das Symbol $\forall$ bedeutet »für alle«.

Später wird Ihnen auch $\exists$ begegnen, was »es existiert (mindestens) ein« bedeutet.

Das ist doch gar nicht so schwer, oder? Die Musteraufgabe wird Ihnen helfen, die anschließenden Übungsaufgaben zu bewältigen.

Beispiel

Sie finden in einem Backrezept als Mengenangabe für einen Teig den Satz »125 g Mehl und 75 ml Milch reichen für 3 Portionen«. Handelt es sich bei Mehl, Milch und den Portionen um ein lineares Verhältnis?

Lösung

Die Antwort lautet: »Ja«! Sie erkennen die Linearität an dem, was sich ändert, wenn Sie beispielsweise die doppelte Anzahl an Portionen backen möchten. Dann benötigen Sie entsprechend die doppelte Menge an Zutaten, also 250 g Mehl und 150 ml Milch.

Aufgabe 1

Als erfahrener Autofahrer wissen Sie, dass sich der Bremsweg vervierfacht, wenn Sie mit doppelter Geschwindigkeit unterwegs sind. Verhalten sich Geschwindigkeit und Bremsweg somit linear?

Aufgabe 2

Sie schenken sich genüsslich eine Tasse Kaffee ein, während Sie überlegen: verhält sich das Volumen an Kaffee in der Tasse linear zur benötigten **Einschenkzeit**? Was ist mit der Höhe des Kaffeespiegels? Ist er linear zur eingefüllten Menge?

Aufgabe 3

Ein Bio-Bauer hält in seinem Garten 10 freilaufende Hühner, die im Durchschnitt 50 Eier in der Woche legen. Was geschieht, wenn der Bauer seinen Bestand auf 20 Hühner aufstockt? Verhalten sich Gesamtzahl der gelegten Eier und Anzahl der Legehennen linear?

Aufgabe 4

Eine Funktion f erfülle folgendes Gesetz für alle x und y aus $\mathbb{R}$:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Ist f damit linear?

Was ist mit der Funktion g, für die gilt:

$$g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$$

Ist g unter diesen Umständen linear?

Einfache Probleme angehen

Nachdem Sie sich Gedanken über Linearität im Allgemeinen gemacht haben, geht es nun daran, konkrete Aufgabenstellungen in Form von linearen Gleichungen zu notieren. Dabei dürfen sich beliebig viele unbekannte Variablen in der Gleichung »tummeln«.

Beispiel

In ein Becken wird über zwei unterschiedliche Rohre permanent Wasser eingefüllt. Zugleich fließt eine Menge an Flüssigkeit durch ein Abflussrohr aus dem Becken. Dabei steigt die Wassermenge im Becken permanent um 10 Liter pro Stunde. Stellen Sie eine lineare Gleichung auf, die diese Situation adäquat beschreibt!

Lösung

Zuerst benötigen Sie einige Variablen. Wenn Sie die Kapazitäten der beiden Zuflussrohre mit x und y beschreiben und z für das Abflussrohr steht, können Sie folgende Gleichung ansetzen: $x + y - z = 10$. Durch das negative Vorzeichen signalisieren Sie den Fluss aus dem Becken hinaus.

Aufgabe 5

Vier Fahrzeuge begegnen sich auf einer mehrspurigen Straße. Das Motorrad ist zusammen mit dem LKW genau so schnell wie die beiden entgegenkommenden PKW. Wie lautet die lineare Gleichung hierzu?

Aufgabe 6

Ein Bagger schafft 70 Kubikmeter Erde pro Stunde. Der Bauleiter überlegt, zwei weitere Bagger anzufordern, um auf den benötigten Aushub von 300 Kubikmeter pro Stunde zu kommen. Stellen Sie diese Situation als lineare Gleichung dar!

Aufgabe 7

Eine elektrische Schaltung verfüge über 2 feste Widerstände, der eine mit 150, der andere mit 50 Ohm sowie zwei Drehwiderstände, die in Reihe geschaltet sind. Wie sieht die zugehörige lineare Gleichung für einen Gesamtwiderstand von 400 Ohm aus?

Aufgabe 8

Zwei Funktionen f und g seien linear. Was können Sie dann über $f(g(x + y))$ sagen?

Auflösen von linearen Gleichungen

Was nützen Ihnen die tollsten linearen Gleichungen, wenn Sie diese nicht lösen? Findet sich dort lediglich eine einzige Variable, ist das Ergebnis eindeutig.

Die Lösung der allgemeinen linearen Gleichung $a \cdot x + b = c$ lautet:

$$x = \frac{c - b}{a} \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

Beispiel

Die Sonneneinstrahlung an einem schönen Vormittag betrage 1,1 Kilowatt pro Quadratmeter. Welche Kollektorfläche an Solarzellen benötigen Sie **mindestens**, wenn Ihr Bedarf 22 Kilowatt beträgt?

Lösung

Zuerst setzen Sie die lineare Gleichung aus den Größen im Text an. Entweder, Sie schreiben **alle** Einheiten zu den jeweiligen Werten oder gar **keine**. Das könnte zum Beispiel so aussehen:

$$1{,}1\ \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2} \cdot x = 22\ \mathrm{kW}$$

Anhand der Einheiten erkennen Sie gleich, dass x eine Angabe in Quadratmetern macht. Die reine Gleichung ohne Einheiten ist noch wesentlich übersichtlicher: $1{,}1 \cdot x = 22$. Die Division von 1,1 auf beiden Seiten der Gleichung ergibt die Lösung: $x = 20$. Unter den genannten Umständen sind selbst bei optimaler Ausnutzung der Sonnenenergie wenigstens 20 Quadratmeter Kollektorfläche nötig.

Aufgabe 9

Hans Glück ist mit seinem Automobil unterwegs in Richtung Urlaubsziel und wird auf eine Autobahnraststätte aufmerksam. Er überlegt sich, ob er dort tanken sollte. Sein Fahrzeug verbraucht im Schnitt 5 Liter Diesel pro hundert Kilometer. Der Tank fasst 60 Liter und ist zum aktuellen Zeitpunkt noch zu einem Viertel gefüllt. Alternativ könnte er auch einen Umweg von insgesamt 50 Kilometern in Kauf nehmen und eine um 10 Cent pro Liter billigere Tankstelle ansteuern. Helfen Sie Hans Glück auf die Sprünge: ab welchem Spritpreis lohnt sich der Umweg nicht mehr?

Aufgabe 10

Ein Betrieb verfüge derzeit über eine Stanzmaschine, die in der Lage ist, 600 Teile pro Tag zu stanzen. Die laufenden Betriebskosten betragen 120 € pro Tag. Nach wie viel Tagen amortisiert sich die Neuanschaffung einer Hochleistungsstanzanlage, die 1800 Teile fertigen kann und 180 € pro Tag kostet? Der Anschaffungspreis betrage abzüglich der Rückgabe der alten Stanzmaschine 35.000 €.

Aufgabe 11

Ein ICE fährt mit 250 km/h von Hamburg nach Frankfurt. Zum gleichen Zeitpunkt startet ein Interregio von Frankfurt nach Hamburg mit 120 km/h. Welcher der beiden Züge ist weiter von Hamburg entfernt, wenn sie sich begegnen?

Von Gleichungen zu Gleichungssystemen

Eine Kombination von Gleichungen mit denselben Unbekannten ist ein *Gleichungssystem*. Wenn alle Einzelgleichungen auch noch *linear* sind, spricht man von einem *linearen Gleichungssystem* oder kurz *LGS*, weil Sie sich sonst auf Dauer an dem langen Wort den »Mund fusselig« reden würden.

Die allgemeine Form eines LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten sieht so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Das ist ein wenig kompliziert und verwirrend, daher beschränke ich mich in diesem Abschnitt erst einmal auf $m = n = 2$. Dann werden auch die schreibaufwändigen Indizes nicht mehr gebraucht und die Unbekannten sind einfach x, y, wie Sie das auch von der berühmten Fernsehsendung »Aktenzeichen $xy \ldots$ ungelöst« kennen.

Die allgemeine Form eines LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten lautet demnach:

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{array}$$

Dabei sind a, b, d und e die *Koeffizienten*, also die Vorfaktoren der unbekannten *Variablen* x und y. c und f sind weitere *Konstanten* und damit einfache Zahlen. Alle diese Buchstaben sind letztlich Platzhalter für reelle oder komplexe Zahlen. Ein konkretes LGS könnte beispielsweise so aussehen:

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 4 \\ 2x & + & 3y & = & 0 \end{array}$$

Dabei wären $a = 1$, $b = -1$ und $c = 4$ die Platzhalter der oberen Zeile, und $d = 2$, $e = 3$ und $f = 0$ jene der unteren. Auch x und y stehen für konkrete Zahlen, allerdings wissen Sie noch nicht welche. Wüssten Sie das, müssten Sie überhaupt kein LGS aufstellen und es gäbe nichts zu lösen, das wäre doch schrecklich langweilig, nicht wahr?

Beispiel

Sie kaufen 2 Kilo Bananen und 1,5 Kilo Orangen in einem Bioladen ein und müssen dafür 7,60 € bezahlen. An der Kasse nebenan sehen Sie, wie eine Kundin für 2 Kilo Orangen und 3 Kilo Bananen 10,60 € hinblättert. Wie teuer sind die Bananen und die Orangen?

Lösung

Die unbekannten Variablen x und y stellen die Preise für Bananen und Orangen in € dar. Wenn Sie nur die Information aus Ihrem eigenen Einkauf haben würden, wäre es unmöglich, die Preise exakt zu bestimmen. Durch die Produkte der Kundin von nebenan sind Sie jedoch in der Lage, auch die zweite Gleichung zu formulieren. Sie erhalten damit:

$$\begin{array}{rcrcr} 2 \cdot x & + & 1{,}5 \cdot y & = & 7{,}60 \\ 3 \cdot x & + & 2 \cdot y & = & 10{,}60 \end{array}$$

Jetzt multiplizieren Sie die komplette obere Zeile mit 3 und die untere mit -2 und erhalten:

$$\begin{array}{rcrcr} 6 \cdot x & + & 4{,}5 \cdot y & = & 22{,}80 \\ -6 \cdot x & - & 4 \cdot y & = & -21{,}20 \end{array}$$

Nun enthält die Summe der beiden Zeilen kein »x« mehr:

$$0{,}5 \cdot y = 1{,}60$$

Ein halbes Kilo Orangen kostet also 1,60 €, demnach ist der Kilopreis 3,20 €. Diese Information können Sie in das ursprüngliche LGS eintragen. Es spielt dabei keine Rolle, ob Sie die erste oder die zweite Zeile verwenden, in beiden Fällen ergibt sich derselbe Preis für Bananen. Ich zeige Ihnen dies anhand der oberen Gleichung und Sie können die untere Gleichung zur Probe berechnen.

$$2x + 1{,}5 \cdot 3{,}20 = 7{,}60$$

Sobald Sie $1{,}5 \cdot 3{,}20 = 4{,}80$ auf beiden Seiten der Gleichung abziehen, ergibt sich:

$$2x = 2{,}80$$

Demnach kosten zwei Kilo Bananen 2,80 €, was einem Kilopreis von 1,40 € entspricht!

Aufgabe 12

Drei Orangen und zwei Bananen wiegen zusammen 4 Kilo. Dagegen wiegen vier Bananen und eine Orange nur 3,5 Kilo. Wie schwer sind die Bananen und die Orangen im Durchschnitt?

Aufgabe 13

Zwei Maschinen produzieren zusammen 100 Teile pro Stunde. Dabei ist Maschine A dreimal so leistungsfähig wie Maschine B. Wie viele Teile produzieren die beiden Maschinen jeweilig?

Aufgabe 14

Zwei Geschwister stellen fest, dass sie zusammen vierundzwanzig Jahre alt sind. Wenn die ältere von beiden doppelt so alt ist wie heute, werden beide zusammen schon fünfzig Jahre sein. Wie alt sind die beiden zur Zeit?

Aufgabe 15

Zwei Räume sind durch eine Stellwand voneinander getrennt. Dabei ist der kleinere Raum nur halb so groß wie der größere. Verschieben Sie jedoch die Stellwand um 10 Quadratmeter zugunsten des kleineren Raumes, werden beide Räume gleich groß. Über wie viel Quadratmeter verfügen die Räume zusammen?

Lösungen der Aufgaben zum Schnelleinstieg in die lineare Algebra

Lösung zur Aufgabe 1

Der Bremsweg ist nicht linear zur Geschwindigkeit, sondern quadratisch. Bei der dreifachen Geschwindigkeit verneunfacht sich beispielsweise diese vielleicht über einen Unfalltod entscheidende Länge. Daher muss der Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug bei höheren Geschwindigkeiten deutlich mehr als nur linear vergrößert werden.

Lösung zur Aufgabe 2

Wenn Sie davon ausgehen, dass die eingeschenkte Menge an Kaffee konstant ist, so verhält sich das Volumen in der Tasse genau linear zur verstrichenen Zeit. Die Höhe des »Kaffeespiegels« hängt jedoch von der genauen Gestalt der Tasse ab. Eine bauchige Form bedeutet dabei sofort das Aus im Hinblick auf ein lineares Verhältnis. Eine exakt zylindrische Tasse dagegen würde den linearen Zusammenhang aufrechterhalten.

Lösung zur Aufgabe 3

Natürlich sind Legehenne lebende Wesen, deren Eierproduktion von tausend Faktoren abhängen und schwanken kann. Grundsätzlich darf der Bauer jedoch im Hinblick auf eine wirtschaftliche Auswertung davon ausgehen, dass die neuen Hennen nach einer gewissen Eingewöhnungsphase in etwa die Leistung der anderen Hennen an den Tag legen. Seine Produktion würde dadurch auf durchschnittlich 100 Eier pro Woche verdoppelt werden.

Lösung zur Aufgabe 4

Bezogen auf die Addition kann f linear sein. Aber das ist nicht so leicht zu sehen. Starten Sie mit: $f(1 \cdot 1) = f(1) = f(1) \cdot f(1)$. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder gilt $f(1) = 0$, dann ist f überhaupt die Nullfunktion, und zwar wegen $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = f(x) \cdot 0 = 0$.

Die Nullfunktion ist so trivial, dass sie auch linear ist.

Oder aber es gilt: $f(1) \neq 0$. Dann können Sie auf beiden Seiten $f(1)$ dividieren und erhalten: $f(1) = 1$. Weiter geht es mit:

$$f(1) = f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = f(2) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(2) = \frac{1}{f(\frac{1}{2})}$$

Für die einfache Funktion $f(x) = x$ sind alle Anforderungen erfüllt, und f ist tatsächlich *linear*!

Gänzlich anders sieht die Angelegenheit für g aus. Wegen $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$ ist $g(1 \cdot 1) = g(1) + g(1)$, woraus folgt, dass $g(1) = 0$ ist. Weiter finden Sie, ganz analog zur Untersuchung von f:

$$g(1) = g\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = g(2) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Demnach muss es sich bei g entweder um die triviale lineare *Nullfunktion* oder aber um eine *Logarithmusfunktion* handeln, die in höchstem Maße *nicht-linear* ist!

Lösung zur Aufgabe 5

Um die angegebenen Geschwindigkeiten in einer linearen Gleichung anzusetzen, benötigen Sie vier Variablen für die entsprechenden Unbekannten. Wenn Sie das Tempo des Motorrades mit »w« und dasjenige des LKW mit »x« bezeichnen, bleiben für die beiden PKW die Buchstaben »y« und »z« übrig. Der Text besagt dann:

$$w + x = y + z$$

Lösung zur Aufgabe 6

Da die Aushebeleistung des ersten Baggers mit 70 Kubikmeter Erde pro Stunde bereits bekannt ist, benötigen Sie dafür keine eigene Variable mehr. Da die beiden zusätzlichen Bagger zu x beziehungsweise y Kubikmeter pro Stunde in der Lage sind, lautet die lineare Gleichung:

$$70 + x + y = 300$$

Lösung zur Aufgabe 7

Um den Gesamtwiderstand von 400 Ohm in der Reihenschaltung zu ermitteln, müssen die einzelnen Widerstände lediglich addiert werden. Sollten x und y die variablen Drehwiderstände symbolisieren, sieht die zugehörige lineare Gleichung wie folgt aus:

$$150 + 50 + x + y = 400, \text{ was soviel bedeutet wie: } x + y = 200$$

Die Drehwiderstände müssen so eingestellt werden, dass sie zusammen 200 Ohm ergeben.

Lösung zur Aufgabe 8

Da g linear ist, gilt: $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Das bedeutet für die lineare Funktion f:

$$f\big(g(x + y)\big) = f\big(g(x) + g(y)\big) = f\big(g(x)\big) + f\big(g(y)\big)$$

Lösung zur Aufgabe 9

Das Fahrzeug verbraucht 5 Liter Diesel auf Hundert Kilometer. Da es sich näherungsweise um eine lineare Funktion handelt, liegt der Verbrauch bei einem Umweg von 50 Kilometern bei 2,5 Liter. Der verbliebene Tankinhalt beträgt 15 Liter, beim Volltanken kämen also noch weitere 45 Liter dazu. Wenn Hans Glück sofort an Ort und Stelle tankt, macht das einen Mehrpreis von 4,50 €. Allerdings müssen durch den Umweg 2,5 Liter zusätzlich in den Tank. Das lohnt sich jedenfalls nicht mehr, falls der Dieselpreis über 1,80 € pro Liter steigen sollte. Unberücksichtigt bleiben dabei allerdings andere Verschleißkosten und das Mehr an aufgewendeter Zeit, was insgesamt ein Vielfaches der Preisdifferenz ausmacht. Da Hans Glück ein umweltbewusster Zeitgenosse ist, berücksichtigt er darüber hinaus den durch den Umweg erhöhten CO_2 Ausstoß und entschließt sich, die Autobahnraststätte aufzusuchen. Eine kleine Pause von der längeren Fahrt kann er jetzt auch gut gebrauchen …

Lösung zur Aufgabe 10

Diese Aufgabe »schreit« nach einer linearen Gleichung. Auf der linken Seite findet sich die aktuelle Situation. Eine Maschine, die 600 Teile pro Tag fertigen kann und bereits vorhanden ist. Die relativen Stückkosten in Euro pro Stück betragen demnach:

$$\frac{120}{600}$$

Ein häufiger Fehler beim Aufstellen von linearen Gleichungen besteht darin, die Werte im Zähler und Nenner zu vertauschen. Dabei helfen zwei einfache Tricks.

- ✔ Führen Sie die *Einheiten* zumindest gedanklich mit. **Stückkosten** müssen beispielsweise in **Euro pro Stück** angegeben werden und nicht in **Stück pro Euro**. Demnach muss der Europreis in den Zähler, während die Stückzahl in den Nenner gehört.
- ✔ Stellen Sie sich vor, wie sich das Gesamtergebnis verhält, wenn jeweils nur einer der beiden Werte ansteigt. So *steigen* die Stückkosten, wenn sich der Preis erhöht, aber die Anzahl gleich bleibt. Dagegen *verringern* sich diese Kosten, wenn sich die Stückzahl bei gleichem Preis vergrößert. Die Kostenangaben verhalten sich **proportional** und gehören in den Zähler, während die Stückzahl **umgekehrt proportional**, also **antiproportional** ist und in den Nenner geschrieben wird.

In Zukunft soll eine Wundermaschine 1800 Teile pro Tag für 180 € stanzen. Dafür kostet das Ding 35.000 €. Diese Angaben gehören auf die rechte Seite der Gleichung. Die Unbekannte x steht dabei für die Anzahl gestanzter Elemente, bis das Gleichgewicht hergestellt ist.

Die gesamte lineare Gleichung lautet also:

$$\frac{120}{600} \cdot x = \frac{180}{1800} \cdot x + 35.000$$

Nach dem Kürzen der Brüche sieht die Angelegenheit schon freundlicher aus:

$$\frac{1}{5}x = \frac{1}{10}x + 35.000$$

Wenn Sie nun alle »x«e auf die linke Seite bringen und dort zusammenfassen, ergibt sich:

$$\frac{1}{10}x = 35.000 \quad \Rightarrow \quad x = 350.000$$

Nach 350.000 gestanzten Elementen hat sich die neue Maschine amortisiert, was sie in

$$\frac{350.000}{1.800} \approx 194$$

Tagen, also bereits innerhalb eines Jahres schaffen kann! Die alte Maschine hätte dafür dreimal so lange benötigt.

Lösung zur Aufgabe 11

Verzeihen Sie mir bitte, wenn Sie bereits wild gerechnet haben! Die Aufgabe ist eine Scherzfrage. Wenn sich beide Züge begegnen, sind sie selbstverständlich gleich weit von Hamburg entfernt!

Lösung zu Aufgabe 12

Wenn Sie das durchschnittliche Einzelgewicht einer Orange mit x, und jenes einer Banane mit y bezeichnen, ergibt der Text folgendes LGS:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 4 \\ x & + & 4y & = & 3{,}5 \end{array}$$

Die untere Zeile verrät Ihnen $x = 3{,}5 - 4y$. Dies dürfen Sie in die obere Zeile einsetzen und erhalten:

$$3 \cdot (3{,}5 - 4y) + 2y = 4, \ \text{ was soviel heißt wie } \ 10{,}5 - 12y + 2y = 4$$

y auf einer Seite zu isolieren führt Sie zu $10y = 6{,}5$. Also wiegt eine Banane 650 g. Weiter gilt $x = 3{,}5 - 4 \cdot 0{,}65 = 0{,}9$. Eine Orange wiegt damit im Schnitt 900 g. Das müssen große Exemplare sein, hoffentlich schmecken sie auch lecker!

Lösung zu Aufgabe 13

Wenn Maschine A x Teile pro Stunde und Maschine B y Teile pro Stunde fertigen kann, dann lautet Ihre erste lineare Gleichung $x + y = 100$.

Die Leistungsfähigkeit von A ist dreimal so hoch wie jene von B, also gilt $x = 3y$. Beide Gleichungen zusammen führen Sie zu folgendem LGS:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 100 \\ x & - & 3y & = & 0 \end{array}$$

Sie subtrahieren die untere Zeile von der oberen und erhalten:

$$4y = 100, \ \text{ woraus } \ y = 25 \ \text{ folgt.}$$

Demnach ist $x = 75$ aufgrund der zweiten Bedingung.

Maschine A produziert 75 Teile pro Stunde, während Maschine B im selben Zeitraum nur auf 25 kommt.

Lösung zu Aufgabe 14

Das Alter der älteren Person sei x und das der jüngeren y. Die erste Bedingung ist leicht zu beschreiben mit $x + y = 24$. Die zweite Aussage bezieht sich auf die Zukunft. »Wenn die ältere von beiden doppelt so alt ist wie heute« besagt, dass Sie x Jahre in die Zukunft blicken müssen. Also lautet die zweite Gleichung $(x + x) + (y + x) = 50$. In Form eines sauberen und aufgeräumten LGS sieht das so aus:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 24 \\ 3x & + & y & = & 50 \end{array}$$

Wieder bietet es sich an, die komplette obere Zeile von der unteren abzuziehen. Dabei ergibt sich:

$$2x = 26,\ \text{ weswegen } x = 13 \text{ folgt.}$$

Das ältere Kind ist heute 13 und wegen $x + y = 24$ muss das jüngere Geschwisterkind 11 Jahre alt sein.

Lösung zu Aufgabe 15

Wenn Sie die Quadratmeterfläche des kleineren Raumes mit x und jene des größeren mit y bezeichnen, so besagt $2x = y$, dass der größere Raum über doppelt so viel Platz verfügt wie der kleinere. Das »Verschieben der Stellwand« bedeutet für den kleineren Raum $x + 10$, zugleich muss diese Fläche dem größeren verloren gehen, also $y - 10$. Aufgrund der Textaussage sind beide Werte gleich: $x + 10 = y - 10$. Wiederum setzen Sie hier ein »richtiges« LGS an:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & -20 \end{array}$$

Stören Sie sich nicht am negativen Vorzeichen des konstanten Terms in der letzten Gleichung. Keine Angst, Sie müssen sich keinen Raum mit negativer Quadratmeterzahl vorstellen! Vielmehr ergeben sich nur positive Werte für x und y. Dazu subtrahieren Sie wieder die untere Gleichung von der oberen. Es bleibt $x = 20$ übrig. Also muss wegen $y = 2x = 40$ gelten.

Der größere Raum verfügt ursprünglich über 40, der kleinere über 20 Quadratmeter. Insgesamt ergibt sich für beide Räume zusammen ein Flächeninhalt von 60 Quadratmetern.