IN DIESEM KAPITEL

- ein bisschen Bruchrechnen
- Potenzrechnung und die binomischen Formeln
- quadratische Gleichungen lösen
- Ungleichungen

Kapitel 1
Die Grundlagen des Rechnens

Ein Übungsbuch der Ingenieurmathematik und es fängt mit den Grundrechenarten an? Gibt es da nicht genügend andere wichtige Themen?

Wichtige Themen gibt es sicher jede Menge, aber die Grundrechenarten sind genau das: grundlegende Rechenarten, die auf die eine oder andere Weise in jedem anderen Bereich der Ingenieurmathematik auftreten. Und ohne diese Grundlagen fällt ganz leicht alles andere in sich zusammen: Es wäre doch wirklich Schade, wenn Sie zwar aus dem Effeff wüssten, wie Sie die Eigenwerte einer Matrix bestimmen, aber durch einen kleinen Fehler beim Kürzen zu einem falschen Ergebnis gelangen.

Damit das nicht passiert und Sie sich auf die wesentlichen Schwierigkeiten konzentrieren können, kommen hier einige Formeln, Rechenregeln und Tricks zu den Grundrechenarten. Und ein paar Aufgaben, mit deren Hilfe Sie diese Methoden wieder verinnerlichen können. Dabei werde ich nur die häufigsten Fehlerquellen und die wichtigsten Tricks zum Bruchrechnen, den Potenzgesetzen und deren Umkehrung, dem Wurzelziehen, ansprechen. Schließlich geht es in diesem Buch wirklich nicht um das Grundrechnen, sondern um Ingenieurmathematik.

Trotzdem dürfen Sie sich natürlich auch an alle anderen Regeln erinnern, von denen Sie in der Schule oder im Studium schon gehört haben. Nützlich sind sie alle!

Erinnerungen aus der Schule

Alle Grundrechenarten lassen sich prinzipiell aus den *Axiomen* der reellen Zahlen herleiten. Genau genommen sind die Axiome nichts anderes als ein System von grundlegenden Rechenregeln. Wie bei einem Gesellschaftsspiel werden diese Regeln nicht in Frage gestellt, sondern als Definition der reellen Zahlen gesehen. Praktisch gesehen bedeutet das, dass Sie die Grundrechenarten einfach auswendig lernen müssen.

Neben den reellen Zahlen treten in der Ingenieurmathematik noch weitere Zahlenmengen häufig auf. Als Indizes oder zum Zählen die *natürlichen Zahlen* oder auch die *ganzen Zahlen*, beim Bruchrechnen taucht die Menge aller Brüche, die *rationalen Zahlen*, auf. In der Elektrotechnik und in der Physik kommen zudem noch die *komplexen Zahlen* vor. Für alle diese Mengen gibt es ein eigenes Symbol.

In der Mathematik werden die folgenden Bezeichnungen für wichtige Zahlenmengen verwendet:

- ✔ $\mathbb{N}$ steht für die Menge der natürlichen Zahlen.
- ✔ $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null.
- ✔ $\mathbb{Z}$ steht für die Menge der ganzen Zahlen.
- ✔ $\mathbb{Q}$ steht für die Menge der Brüche.
- ✔ $\mathbb{R}$ bezeichnet die reellen Zahlen.
- ✔ $\mathbb{C}$ steht für die komplexen Zahlen.

Die Verwendung dieser Symbole gehört zur mathematischen Sprache dazu. Nicht nur, weil es viel kürzer ist, $\mathbb{R}$ statt »Menge der reellen Zahlen« zu schreiben, sondern hauptsächlich deswegen, weil erst die mathematischen Symbole eine präzise und klare Sprache erlauben. Missverständnisse, wie sie in einem normalen Gespräch nur zu oft auftauchen, treten in der mathematischen Sprache dadurch wesentlich seltener auf.

Nicht am Bruchrechnen zerbrechen

Die meisten Problemstellungen beim Bruchrechnen sind Varianten zweier grundlegender Aufgabentypen: Das eigentliche Bruchrechnen und, im Anschluss, das Kürzen der Ergebnisse. Beim eigentlichen Bruchrechnen geht es darum, Brüche zu addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren. Die Regeln dafür kennen Sie sicherlich.

Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{p}{q}$ zwei beliebige Brüche, das heißt, die *Zähler* a und p sind ganze Zahlen $a, p \in \mathbb{Z}$ und die *Nenner* b und q sind ganze Zahlen, aber nicht null: $b, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann gelten die Rechenregeln

$$\frac{a}{b} \pm \frac{p}{q} = \frac{aq \pm bp}{bq}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{p}{q} = \frac{aq}{bp}$$

Das bedeutet:

- ✔ Zur Addition oder Subtraktion bringen Sie die beiden Brüche zuerst durch *Erweitern* auf den *Hauptnenner bq*:

  $$\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} = \frac{bp}{bq}$$

  Dann addieren beziehungsweise subtrahieren Sie die neuen Zähler aq und bp voneinander und dividieren das Ergebnis durch den Hauptnenner bq.

- ✔ Bei der Multiplikation multiplizieren Sie einfach Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

- ✔ Durch einenBruch $\frac{p}{q}$ dividieren Sie, indem Sie mit dem Kehrbruch $\frac{q}{p}$ multiplizieren.

  Die Multiplikation mit dem Kehrbruch ergibt genau dasselbe wie eine kreuzweise Multiplikation der Originalzähler und -nenner: Zähler a mit Nenner q und Zähler p mit Nenner b.

Die zweite Sorte von Aufgabenstellungen, die Ihnen beim Bruchrechnen häufig begegnen, ist das Kürzen.

Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner eines Bruchs kann man kürzen:

$$\frac{ap}{aq} = \frac{p}{q}$$

Beim Kürzen geht es hauptsächlich darum, solche gemeinsamen Faktoren zu finden. Das ist einerseits nicht immer möglich, andererseits gibt es oft mehr als nur einen gemeinsamen Faktor. In diesem Fall sollten Sie den betragsmäßig größten Faktor kürzen.

Mit Hilfe der Multiplikationsregel lässt sich die Kürzungsregel auch etwas anders schreiben:

$$\frac{a}{p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{p \cdot q} = \frac{a}{q}$$

Die obigen Rechenregeln (und alle anderen, die in diesem Abschnitt noch kommen werden) können Sie natürlich auch auf Brüche mit unbestimmten Ausdrücken, etwa mit einer oder mehreren Unbekannten x, y, z anwenden. Einige dieser Regeln werden sogar erst in solchen Fällen wirklich nützlich.

Es gilt die bekannte Regel »Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!«. Abgesehen vom Fall $p = 0$, der allerdings etwas an den Haaren herbeigezogen ist, heißt das:

$$\frac{a \pm p}{q \pm p} \neq \frac{a}{q}$$

Was passieren kann, wenn Sie falsch kürzen

Was kann passieren, wenn Sie die Regel »Bei Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!« verletzen? Verwirrende Dinge. Beispielsweise ist

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{4-1}{2+1}$$

Bis hierhin ist das noch richtig. Aber wenn Sie jetzt den Merkspruch vergessen und die 1 aus der Differenz im Zähler und der Summe im Nenner kürzen, erhalten Sie:

$$\frac{4}{2} = 2$$

Natürlich gilt aber immer noch: $1 \neq 2$. Ohne die Merkregel kann grober Unfug entstehen!

Bei Summen und Differenzen in Zähler und Nenner gilt allerdings die praktische Formel:

$$\frac{ab \pm ac}{ad \pm ae} = \frac{a(b \pm c)}{a(d \pm e)} = \frac{b \pm c}{d \pm e}$$

Nach dem Ausklammern eines Faktors, den allen Summanden im Zähler und im Nenner gemeinsam haben, kann man durch kürzen! Ein Beispiel:

$$\frac{6+9}{12-3} = \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4 - 3 \cdot 1} = \frac{3 \cdot (2+3)}{3 \cdot (4-1)} = \frac{2+3}{4-1} = \frac{5}{3}$$

Diese Regel ist vor allem hilfreich, wenn unbestimmte Ausdrücke im Bruch auftreten:

$$\frac{2x + 3x^2}{4x^3 - x} = \frac{x \cdot (2+3x)}{x \cdot (4x^2 - 1)} = \frac{2+3x}{4x^2 - 1}$$

Weder bei den Grundrechenarten mit Brüchen noch beim Kürzen darf ein Bruch der Form $\frac{x}{0}$ entstehen. Dabei ist es gleichgültig, für welche Zahl oder welchen Ausdruck x hier steht. Erlaubt ist aber das Umgekehrte:

$$\frac{0}{x} = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

Hier darf x wirklich für alles außer der Null stehen.

Die Macht der Potenzen

Potenzieren beruht auf den Rechenregeln der Multiplikation. Das Besondere beim Potenzieren ist aber, dass Sie nicht verschiedene Faktoren miteinander multiplizieren, sondern mehrfach denselben Faktor. Im Ausdruck x^a gibt ein positiver ganzzahliger Exponent a

an, wie oft der Faktor x mit sich selbst multipliziert wird. Daraus ergeben sich direkt die folgenden Potenzgesetze.

Für eine Zahl (oder einen Ausdruck) $x \in \mathbb{R}$ und ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} x^1 &= x \\ x^0 &= 1 && \text{falls } x \neq 0 \\ x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} && \text{für } x \neq 0 \\ (x^a)^b &= x^{ab} \\ x^{\frac{a}{b}} &= \sqrt[b]{x^a} && \text{für } b \neq 0, x^a \geq 0 \end{aligned}$$

Diese Rechenregeln gelten auch für beliebige Exponenten $a, b \in \mathbb{R}$. Allerdings ist es nicht mehr möglich, einen Exponenten $a \notin \mathbb{N}$ als Anzahl der Faktoren aufzufassen.

Vergessen Sie nie: für nichtnegative $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{x}$ stets positiv!

Aus den Potenzgesetzen und den Rechenregeln für Addition und Multiplikation leiten sich die wichtigen »binomischen Formeln« ab.

Für reellwertige Ausdrücke $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(erste binomische Formel)} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{(zweite binomische Formel)} \\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2 && \text{(dritte binomische Formel)} \end{aligned}$$

Diese Formeln sind so wichtig und werden so häufig gebraucht, dass Sie sie am besten für immer auswendig lernen. Es gibt auch eine Verallgemeinerung für Exponenten, die größer als zwei sind, den »binomischen Lehrsatz«.

Für $n \in \mathbb{N}$ und reelle Ausdrücke $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Das sieht deutlich komplizierter aus – und das ist es auch, schließlich gilt es ja für viel mehr Situationen. Aber meistens reicht es zum Glück, wenn Sie die klassischen binomischen Formeln für den Exponenten $n = 2$ auswendig kennen.

Eng mit diesem Exponenten verbunden sind die *quadratischen Gleichungen*. In der allgemeinen Form ist so eine Gleichung durch

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gegeben. Gesucht sind alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$, manchmal auch Lösungen $x \in \mathbb{C}$. Am besten transformieren Sie die allgemeine Form mit Hilfe der Division durch a auf die p, q-Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$. Für beide Formen gibt es Lösungsformeln, die Sie sich ebenfalls merken sollten.

Die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung in allgemeiner Form sind durch die *Mitternachtsformel*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben. Ist die Gleichung in p, q-Form, dann gilt die äquivalente Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Diese Formeln gelten immer, allerdings hängt es von dem Ausdruck unter der Wurzel ab, ob die Lösungen reelle oder komplexe Zahlen sind.

Setzen Sie für die sogenannte *Diskriminante* $d := \frac{p^2}{4} - q$ beziehungsweise $D := b^2 - 4ac$, dann erhalten Sie für

$$\begin{array}{ll} d > 0 & \text{zwei verschiedene reelle Lösungen } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \\ d = 0 & \text{genau eine reelle Lösung, } x_1 = x_2 \in \mathbb{R}, \\ d < 0 & \text{zwei verschiedene komplexe Lösungen } x_1, x_2 \in \mathbb{C}. \end{array}$$

Dasselbe gilt, wenn Sie in der Fallunterscheidung d durch D ersetzen.

Ungleichungen

Mit Ungleichungen werden Sie es in fast allen Bereichen der Mathematik zu tun bekommen:

- ✔ Viele Mengen werden durch Ungleichungen charakterisiert.
- ✔ In praktischen Anwendungen werden erlaubte Werte für die Lösung durch Ungleichungen eingeschränkt.
- ✔ Bei numerischen Rechnungen werden Fehlerschranken durch Ungleichungen angegeben.

✔ Abschätzungen für Werte einer Funktion oder eines Ausdrucks werden mit Hilfe von Ungleichungsketten bestimmt.

Das sichere Rechnen mit Ungleichungen ist also wirklich wichtig. Die folgenden Grundregeln helfen Ihnen dabei!

Für reelle Zahlen oder reellwertige Ausdrücke $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
a < b \quad &\text{und} \quad b < c \Rightarrow a < c\\
a < b \quad &\text{und} \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c\\
a < b \quad &\text{und} \quad c > 0 \Rightarrow ac < bc\\
a < b \quad &\text{und} \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc\\
a < 0 \quad &\text{und} \quad b < 0 \Rightarrow 0 < ab\\
&a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|\\
&a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Diese Regeln gelten auch dann, wenn Sie überall $<$ durch $\leq$ und $>$ durch $\geq$ ersetzen.

Beträge und Mengen

Häufig tauchen Ungleichungen im Zusammenhang mit der Betragsfunktion

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

auf.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
|x| &= |-x|\\
x &\leq |x|\\
-x &\leq |x|\\
|x| &= \sqrt{x^2}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\sqrt{x^2} \geq 0$ natürlich die nichtnegative Quadratwurzel von x.

Bei Rechnungen mit Beträgen müssen Sie meistens Fallunterscheidungen treffen, je nachdem, ob der Ausdruck im Betrag größer gleich oder kleiner null ist. Insbesondere bei Ungleichungen mit Beträgen bedeutet das, dass Sie höllisch aufpassen müssen.

Häufig werden Zahlen- und Punktemengen durch solche Ungleichungen mit Beträgen angegeben. Beispielsweise ist

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 2\}$$

die Menge aller reellen Zahlen mit der Eigenschaft $|x+1| < 2$. Welche Zahlen dies genau sind, müssen Sie durch eine Umformung der Bedingung bestimmen. Dabei kommt eine Fallunterscheidung ins Spiel: Für $x + 1 \geq 0$ ist $|x+1| = x + 1$ und damit gilt

$$\begin{aligned} |x+1| &< 2 \\ \Rightarrow 0 \leq x+1 &< 2 \\ \Rightarrow -1 \leq x &< 1 \end{aligned}$$

Ist dagegen $x + 1 < 0$, dann ist $|x+1| = -x - 1$ und die Umformung der Bedingung lautet

$$\begin{aligned} |x+1| &< \quad 2 \\ \Rightarrow 0 < -x-1 &< 2 \\ \Rightarrow \quad 1 < -x &< \quad 3 \\ \Rightarrow \quad -1 > x &> \quad -3 \end{aligned}$$

Beide Fälle zusammengenommen ergeben die gesuchte neue Darstellung der Menge M_1 als offenes Intervall:

$M_1 = (-3, 1)$

Aufgaben zum 1. Kapitel

Aufgabe 1: Lösen Sie:

a) $\frac{17}{0} = ?, \frac{0}{17} = ?$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?, \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = ?, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = ?, \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?$

Aufgabe 2: Lösen Sie und kürzen Sie dabei so weit wie möglich:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = ?, \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = ?, \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = ?, \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = ?$

b) $\frac{3 \cdot (4 + \frac{1}{6})}{2 \cdot (2 + \frac{1}{2})} = ?$

Aufgabe 3: Fassen Sie

$$\frac{x}{5} + \frac{5}{x}$$

zu einem Bruch zusammen. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der Ausdruck sinnvoll?

Aufgabe 4: Ist die Aussage

$$\frac{5x+17}{5x+3} - \frac{x+17}{x+3} = 0$$

richtig? Oder falsch? Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist das richtig?

Denken Sie beim Rechnen an die Merkregel zum Kürzen bei Summen und Differenzen!

Aufgabe 5: Lösen Sie und kürzen Sie dabei so weit wie möglich:

$$\frac{6x+18}{3x+3} - \frac{x+3}{x+1} = ?$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie, wenn möglich:

a) $2^{-1} = ?, 2^0 = ?, 2^1 = ?$

b) $0^{-1} = ?, 0^0 = ?, 0^1 = ?$

c) $3^{17} \cdot 3^{-15} = ?, \frac{3^5}{3^3} = ?, \frac{3^{-3}}{3^{-2}} = ?$

d) $(2^3)^2 = ?, 2^{\frac{3}{2}} = ?$

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Potenzen und Produkte soweit wie möglich.

a) $(x+1)^2 = ?, (x-1)^2 = ?, (x+1)(x-1) = ?$

b) $(x+1)^3 = ?, (x-1)(x+1)(x+2) = ?$

Aufgabe 8: Lösen Sie:

a) $x^2 = 2x - 1$

b) $x^2 + 2x = -1$

Aufgabe 9: Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

Denken Sie daran, auszuklammern!

Aufgabe 10: Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen einzeln beziehungsweise gemeinsam richtig?

a) $2x + 1 < 5x - 2, 2x + 1 > 5x - 2$

b) $3x + 3 \leq 2x - 2, 3x + 3 \geq 2x - 2$

Aufgabe 11: Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgenden Ungleichung richtig?

$$x \geq x^2 - x + 1$$

Aufgabe 12: Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1}$$

Aufgabe 13: Geben Sie die Menge

$$I_1 := \{x \in \mathbb{R} \big| \; 2|x-2| + 1 \leq |x+5|\}$$

als ein Intervall an!

Aufgabe 14: Welches Intervall wird durch die Menge

$$I_2 := \left\{ x \in \mathbb{R} \big| \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1} \right\}$$

dargestellt?