

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	23
Ein leicht verständlicher Einstieg in die Mathematik anhand von Beispielen	25
Törichte Annahmen über den Leser	26
Konventionen in diesem Buch	26
Wie dieses Buch aufgebaut ist	27
Teil I: Algebraische und analytische Grundlagen	27
Teil II: Differentiation – die Kunst des Ableitens	27
Teil III: Integration – eine Kunst für sich	27
Teil IV: Lineare Algebra	27
Teil V: Grundlagen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	28
Teil VI: Fortgeschrittene Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung	28
Teil VII: Der Top-Ten-Teil	28
Anhang	28
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	28
Wie es weitergeht	29
Teil I	
Algebraische und analytische Grundlagen	31
Kapitel 1	
Die Krabbelkiste der Mathematik	33
Logische Grundlagen	33
Wahre und falsche Aussagen	33
Aussagen verknüpfen	34
Quantoren in den Griff bekommen	35
Zahlen und Fakten	36
Die Zahlbereiche im Visier	36
Aufgaben mit Klammern richtig lösen	37
Das Summenzeichen	37
Bruchrechnung überleben	38
Potenzen und Wurzeln	39
Einfache (Un-)Gleichungen und Beträge auflösen	40
Gleichungen in Angriff nehmen	40
Ungleichungen in den Griff bekommen	44
Beträge ins Spiel bringen	46

Kapitel 2

Mengen, Induktionen, Prozente und Zinsen 49

Alles über Mengen	49
Mengen im Supermarkt?	49
Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen	51
Von Zahlen, Mengen und Intervallen	52
Mit Mengen einfach rechnen können	52
Venn-Diagramme	57
Vollständige Induktion bezwingt die Unendlichkeit	58
Prozentrechnung für den Alltag	61
Nur zwei Prozent Mieterhöhung	62
Das eigene Heim trotz Provision?	62
Die Bären kommen – Sinkende Aktienkurse	62
Bullen im Vormarsch – Steigende Kurse	62
Wie viele Bullen hätten die Bären gezähmt?	63
Immer auf die genaue Formulierung achten	63
Preissenkungsschnäppchen mitnehmen	63
Zinsrechnung zum Verstehen	64
Lohnender Zinsertrag	64
Höhe des Zinssatzes für Ihre Träume	64
Suche nach dem Startkapital	65
Taggenaue Zinsen	65
Kapitalwachstum: Zinseszins	65
Eine feste Anlage für zehn Jahre	66
Das sich verdoppelnde Kapital bei festem Zins	66
Das sich verdoppelnde Kapital bei fester Jahresanzahl	67

Kapitel 3

Elementare Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit 69

Grundlegendes zu Funktionen	69
Was sind eigentlich Funktionen?	69
Grafische Darstellung von Funktionen	71
Grundlegende Funktionen	72
Polynome	72
Rationale Funktionen	75
Exponentialfunktionen	76
Logarithmusfunktionen	77
Von Umkehr- und inversen Funktionen	77
Trigonometrische Funktionen	79
Bis an die Grenzen gehen	82
Drei Funktionen erklären den Grenzwert	82
Weiter zu den einseitigen Grenzwerten	83
Die formale Definition eines Grenzwerts – wie erwartet!	84
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	84
Grenzwerte für x gegen unendlich	85

Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	85
Einfache Grenzwerte auswerten	87
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	87
Einsetzen und Auswerten	88
Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	88
Faktorisieren aus Leidenschaft	88
Konjugierte Multiplikation	89
Algebraische Hilfe – Einfache Umformungen	89
Machen Sie eine Pause – mit einem Grenzwert-Sandwich	90
Grenzwerte bei unendlich auswerten	91
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	92
Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden	93

Teil II

Differentiation – die Kunst des Ableitens **95**

Kapitel 4

Idee und Regeln des Ableitens – was sein muss, muss sein **97**

Erste Schritte des Ableitens	97
Steigungen gesucht!	97
Steigung von Geraden	99
Steigung von Parabeln	100
Der Differenzenquotient	101
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	106
Grundlegende Regeln der Differentiation	107
Die Konstantenregel	108
Die Potenzregel	108
Die Koeffizientenregel	108
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	109
Trigonometrische Funktionen differenzieren	109
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	109
Differentiationsregeln für Profis – Wir sind die Champs!	110
Die Produktregel	110
Die Quotientenregel	111
Die Kettenregel	111
Implizite Differentiation	114
Logarithmische Differentiation	116
Differentiation von Umkehrfunktionen	116
Keine Angst vor höheren Ableitungen	118

Kapitel 5

Extrem-, Wende- und Sattelpunkte 121

Ein Ausflug mit der Analysisgruppe	121
Über die Berge und durch die Täler:	
Positive und negative Steigungen	121
Konvexität und Wendepunkte	122
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum	123
Ein atemberaubender Ausblick: Das globale Maximum	123
Autopanne: Auf dem Scheitelpunkt hängen geblieben	123
Von nun an geht's bergab!	123
Ihr mathematisches Reisetagebuch	124
Lokale Extremwerte finden	125
Die kritischen Werte suchen	125
Der Test mit der ersten Ableitung – wachsend oder fallend?	126
Der Test mit der zweiten Ableitung – Krümmungsverhalten!	128
Globale Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall finden	129
Die globalen Extremwerte über den gesamten Definitionsbereich einer Funktion finden	131
Konvexität und Wendepunkte bestimmen	133
Der Zwischenwertsatz – Es geht nichts verloren	138
Der Mittelwertsatz – Es bleibt Ihnen nicht(s) erspart!	139
Das nützliche Taylerpolynom	141
Die Regel von l'Hospital	144
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	146
Drei weitere nicht akzeptable Formen	146

Kapitel 6

Von Folgen und Reihen 149

Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	149
Folgen aneinanderreihen	149
Reihen summieren	152
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	155
Das einfachste Kriterium auf Divergenz: Eine notwendige Bedingung	155
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz	156
Drei Vergleichskriterien für Konvergenz beziehungsweise Divergenz	158
Quotienten- und Wurzelkriterium	161
Alternierende Reihen	164
Absolute oder normale Konvergenz – das ist die Frage!	164
Das Kriterium mit den alternierenden Reihen	165
Ableitungen und Integrale für Grenzprozesse nutzen	168

Teil III

Integration – Eine Kunst für sich **171**

Kapitel 7

Integration: Die Rückwärts-Differentiation **173**

Flächenberechnung – eine Einführung	173
Flächen mithilfe von Rechtecksummen annähern	174
Exakte Flächen mithilfe des bestimmten Integrals ermitteln	179
Stammfunktionen suchen – rückwärts Ableiten	180
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	182
Die müßige Flächenfunktion	182
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	185
Die erste Version des Hauptsatzes	185
Der andere Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	188
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen	190
Stammfunktionen finden – Drei grundlegende Techniken	192
Umkehrregeln für Stammfunktionen	192
Raten und prüfen	193
Die Substitutionsmethode	194
Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	196

Kapitel 8

Integration: Praktische Tricks für Profis **199**

Partielle Integration: Teile und herrsche!	199
Das richtige u auswählen	201
Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	202
Alles im Kreis!	203
Integrale mit Sinus und Kosinus	204
Fall 1: Die Potenz von Sinus ist ungerade und positiv	204
Fall 2: Die Potenz von Kosinus ist ungerade und positiv	204
Fall 3: Die Potenzen von Sinus und Kosinus sind gerade und nicht negativ	205
Das ABC der Partialbrüche	205
Fall 1: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	206
Fall 2: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	207
Fall 3: Der Nenner enthält lineare oder quadratische Faktoren in höherer Potenz	208
Bonusrunde – Der Koeffizientenvergleich	209
Grau ist alle Theorie – Praktische Integrale!	210
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen	210
Bogenlängen bestimmen	212
Drehoberflächen entstehen durch Drehen!	214

Teil IV	217
Lineare Algebra	217
Kapitel 9	219
Grundlagen der Vektorräume	219
Vektoren erleben	219
Vektoren veranschaulichen	220
Mit Vektoren anschaulich rechnen	222
Mit Vektoren abstrakt rechnen	223
Betrag eines Vektors	225
Skalarprodukt von Vektoren	226
Schöne Vektorraumteilmengen = Untervektorräume	228
Vektoren und ihre Koordinaten	229
Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	233
Punkte im Raum	233
Parametergleichung für Geraden	234
Zweipunktgleichung für Geraden	235
Parametergleichung für Ebenen	236
Dreipunktgleichung für Ebenen	237
Koordinatengleichung für Ebenen	237
Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen	237
Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen	239
Kollision während einer Flugshow in Las Vegas?	246
Kapitel 10	249
Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	249
Arten von linearen Gleichungssystemen	249
Homogene Gleichungssysteme	250
Inhomogene Gleichungssysteme	250
Überbestimmte Gleichungssysteme	251
Unterbestimmte Gleichungssysteme	251
Quadratische Gleichungssysteme	251
Nicht lösbare Gleichungssysteme	252
Grafische Lösungsansätze für lineare Gleichungssysteme	252
Einfache Geraden im zweidimensionalen Raum	252
Beliebige Geraden im zweidimensionalen Raum	253
Punkte im zweidimensionalen Raum	254
Ebenen im zweidimensionalen Raum	254
Der dreidimensionale Raum	254
Die vierte Dimension	255
Was sind eigentlich Matrizen?	256
Rechnen mit Matrizen	257
Matrizen in Produktionsprozessen der Praxis	259
Transponieren und Invertieren	260

Matrizen und lineare Gleichungssysteme	262
Das Lösungsverfahren: Der Gaußsche Algorithmus	263
Der Rang von Matrizen	267
Matrizen invertieren in der Praxis	268
Kriterien für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	269
Matrizen und lineare Abbildungen	270
Was sind lineare Abbildungen?	271
Matrizen als lineare Abbildungen	272
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Theorie	272
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Praxis	273
Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen	275
 Kapitel 11	
Matrizen – Das Finale!	277
Matrizen und ihre Determinanten	277
Determinanten von (2×2) -Matrizen	277
Determinanten von (3×3) -Matrizen	278
Determinanten von allgemeinen Matrizen	278
Determinanten, Matrizen & lineare Gleichungssysteme	281
Die Cramersche Regel	282
Berechnung der Inversen mittels der Adjunktenformel	284
Flächen und Volumina mittels Determinanten	285
Kreuzprodukt von Vektoren	287
Basistransformation	288
Auf den Maßstab kommt es an!	289
Geben Sie mir Ihre Koordinaten!	290
Matrixdarstellung bezüglich verschiedener Basen	291
Basistransformationsmatrizen	293
Überzeugende Diagramme	294
Eigenwerte und Eigenvektoren	296
Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren?	296
Eigenwerte einer Matrix berechnen	297
Eigenvektoren einer Matrix berechnen	298
Eigenräume finden und analysieren	299
Matrizen diagonalisieren	300
Drehungen und Spiegelungen	304
Drehungen in der Ebene	304
Berechnung des Drehwinkels in der Ebene	307
Spiegelungen in der Ebene	307
Berechnung der Spiegelachse in der Ebene	309
Drehungen im dreidimensionalen Raum	311

Kapitel 12

Nicht reell, aber real: Komplexe Zahlen 315

Was sind komplexe Zahlen?	315
Komplexe Rechenoperationen	317
Komplexe quadratische Gleichungen	319
Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen	321
Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten	322
Anwendungen komplexer Zahlen	324

Teil V

Grundlagen der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung 327

Kapitel 13

Das Handwerkszeug des Statistikers 329

Die Grundgesamtheit	329
Die Stichprobe	330
Die Zufallsstichprobe	331
Daten	331
Statistik	332
Das arithmetische Mittel – der Mittelwert	332
Der Median	333
Die Standardabweichung	333
Perzentil vs. Quantil	334
Der Standardwert	334
Die Normalverteilung	335
Schätzwerte	336
Der Zentrale Grenzwertsatz	336
Das Gesetz der großen Zahlen	337
Das Konfidenzintervall	338
Korrelation und Kausalzusammenhang	339

Kapitel 14

Von Mittelwerten, Quantilen und vertrauenswürdigen Zusammenhängen 341

Daten mit statistischen Größen beschreiben	341
Qualitative Daten beschreiben	342
Quantitative Daten beschreiben	345
Lagemaße	345
Berechnen von Variationen	349
Mit Perzentilen die relative Position ermitteln	354
Die Suche nach dem Zusammenhang:	
Korrelationen und ihre Koeffizienten	358
Streudiagramme erstellen	359
Interpretation eines Streudiagramms	359
Die Beziehung zwischen zwei quantitativen Variablen quantifizieren	360

Kapitel 15

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 363

Arten der Wahrscheinlichkeit	363
Wahrscheinlichkeitsnotation	363
Totale Wahrscheinlichkeit	365
Wahrscheinlichkeit der Vereinigung	365
Wahrscheinlichkeiten des Durchschnitts	366
Komplementäre Wahrscheinlichkeit	366
Bedingte Wahrscheinlichkeit	366
Wahrscheinlichkeitsregeln verstehen und anwenden	367
Die Komplementärregel	368
Die Multiplikationsregel	369
Die Additionsregel	370
Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse	371
Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse anhand der Definition prüfen	371
Die Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse nutzen	372
Einander ausschließende Ereignisse berücksichtigen	373
Einander ausschließende Ereignisse erkennen	373
Die Additionsregel mit einander ausschließenden Ereignissen vereinfachen	374
Unabhängige und einander ausschließende Ereignisse unterscheiden	375
Ein Vergleich von unabhängig und einander ausschließend	375
Unabhängigkeit beziehungsweise einander Ausschließen in einem Kartenspiel prüfen	376
Nützliche Zählregeln und Kombinatorik	377
Urnen und Kugeln	377
Ziehung mit Berücksichtigung der Reihenfolge	378
Ziehung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	379
Abschließende Betrachtungen	379

Teil VI

Fortgeschrittene Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung 383

Kapitel 16

Wahrscheinlichkeiten darstellen:

Venn-Diagramme und der Satz von Bayes 385

Wahrscheinlichkeiten mit Venn-Diagrammen darstellen	385
Mit Venn-Diagrammen Wahrscheinlichkeiten ermitteln	386
Beziehungen mit Venn-Diagrammen ordnen und darstellen	387
Umwandlungsregeln für Mengen in Venn-Diagrammen	388
Die Grenzen von Venn-Diagrammen	389
Wahrscheinlichkeiten in komplexen Aufgaben mit Venn-Diagrammen ermitteln	390
Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen darstellen	393
Mehrstufige Ergebnisse mit einem Baumdiagramm darstellen	394

Bedingte Wahrscheinlichkeiten mit einem Baumdiagramm darstellen	396
Die Grenzen der Baumdiagramme	399
Mit einem Baumdiagramm Wahrscheinlichkeiten für komplexe Ereignisse ermitteln	399
Das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes	401
Eine totale Wahrscheinlichkeit mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen	402
Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit mit dem Satz von Bayes berechnen	406

Kapitel 17

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen **413**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen	413
Was ist eine Zufallsvariable?	413
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung finden und anwenden	415
Die Verteilungsfunktion ermitteln und anwenden	420
Die Verteilungsfunktion interpretieren	421
Die Verteilungsfunktion grafisch darstellen	421
Wahrscheinlichkeiten mit der Verteilungsfunktion ermitteln	423
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion aus der Verteilungsfunktion herleiten	424
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen	426
Den Erwartungswert von X berechnen	426
Die Varianz von X berechnen	428
Die Standardabweichung von X berechnen	429
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariablen	430

Kapitel 18

Die wunderbare Welt der Wahrscheinlichkeitsverteilungen **431**

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	431
Diskrete Gleichverteilung	431
Binomialverteilung	433
Poissonverteilung	438
Geometrische Verteilung	443
Hypergeometrische Verteilung	445
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	450
Stetige Gleichverteilung	451
Normalverteilung	452
Exponentialverteilung	461

Teil VII	
Der Top-Ten-Teil	465
Kapitel 19	
Zehn häufig gemachte Fehler im (Stochastik-) Alltag	467
Vergessen, dass eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegen muss	467
Kleine Wahrscheinlichkeiten fehlinterpretieren	467
Wahrscheinlichkeiten für kurzfristige Vorhersagen verwenden	468
Nicht glauben, dass 10-22-34-42-47-48 gewinnen kann	468
An Glückstrahlen beim Würfeln glauben	468
Jeder Situation eine 50-50-Chance einräumen	469
Bedingte Wahrscheinlichkeiten verwechseln	469
Die falsche Wahrscheinlichkeitsverteilung anwenden	469
Die Voraussetzungen für ein Wahrscheinlichkeitsmodell nicht richtig prüfen	470
Unabhängigkeit von Ereignissen annehmen	470
Kapitel 20	
Zehn Ratschläge für einen erfolgreichen Abschluss Ihres Mathekurses	471
Der Kurs beginnt pünktlich in der ersten Vorlesung	471
Besuchen Sie die Vorlesungen und Übungen	471
Verschaffen Sie sich ordentliche Mitschriften	472
Schauen Sie auch in die Bücher	472
Lösen Sie die wöchentlichen Übungsaufgaben	472
Gruppenarbeit nicht ausnutzen	472
Lernen Sie nicht nur für die Klausur	473
Klausurvorbereitung beginnt nicht einen Tag vorher	473
Aus Fehlern lernen	473
Der eigene Kurs ist immer der wichtigste!	474
Anhang	475
Stichwortverzeichnis	485

