Lösungen

Lösung Kapitel 1

Mit der Regenwahrscheinlichkeit von 70 Prozent an einem bestimmten Tag ist gemeint, dass es unter der Wetterlage, die zu diesem Tag an dem bestimmten Ort (wahrscheinlich) herrschen wird, in 70 Prozent der bekannten Fälle geregnet hat. Was Sie daraus schließen, ist Ihre Sache! Die häufigste Interpretation ist, dass dort mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit irgendwann mal am besagten Tag einige Tropfen herunterkommen werden.

Wie Sie an diesem Beispiel sehen, sind statistische Aussagen trotz der Mathematik, die dahintersteckt, mit Vorsicht zu genießen, denn Fehler können sich an den verschiedensten Stellen einschleichen. Die Verlässlichkeit der Prognosen hängt zum Beispiel davon ab,

- ✓ ob bei der Wetterlage die richtigen Variablen berücksichtigt worden sind,
- ✓ ob überhaupt oder wie sicher die zugrunde gelegte Wetterlage eintreten wird,
- ✓ wie groß die Stichprobe der bekannten Fälle war, aus der die Wahrscheinlichkeit abgeleitet wurde,
- ✓ ob sich der betreffende Ort überhaupt mit den Stichprobenorten vergleichen lässt.

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Lösung Kapitel 2

1. Ergebnisraum = {er, es, et, ei, re, rs, rt, ri, se, sr, st, si, te, tr, ts, ti, ie, ir is, it}
2. Beispiele
   - ✓ »Alle Wörter, die nur aus Konsonanten bestehen«,
   - ✓ »Alle Wörter, die nur aus Vokalen bestehen«,
   - ✓ »Alle Wörter, deren Buchstaben in korrekter alphabetischer Reihenfolge erscheinen« und so weiter
3. a) A = {er, es, et, ei, re, ri, se, si, te, ti, ie, ir, is, it}

   B = { re, rs, rt, ri}

   b) A^c = { rs, rt, sr, st, tr, ts}

   B^c = {er, es, et, ei, se, sr, st, si, te, tr, ts, ti, ie, ir is, it}

   c) Schnittmenge = {re, ri}

   Vereinigungsmenge = {er, es, et, ei, re, rs, rt, ri, se, si, te, ti, ie, ir is, it}

   d) ✓ für Ereignis A und für dessen Gegenereignis:

   Es gibt insgesamt 20 mögliche Ergebnisse, wie man durch Abzählen feststellen kann. 14 dieser Ergebnisse gehören zum Ereignis A, woraus die Wahrscheinlichkeit, eines dieser Ergebnisse zu ziehen, sich als 14/20 = 7/10 ergibt. Wegen $P(A^c) = 1 - P(A)$ gilt für das Gegenereignis die Wahrscheinlichkeit 3/10.

   ✓ für Ereignis B und für dessen Gegenereignis:

   Es gibt auch hier 20 insgesamt mögliche Ergebnisse. Vier dieser Ergebnisse gehören zum Ereignis B, woraus die Wahrscheinlichkeit, eines dieser Ergebnisse zu ziehen, sich als 4/20 = 1/5 ergibt. Wegen $P(B^c) = 1 - P(B)$ gilt für das Gegenereignis die Wahrscheinlichkeit 4/5.

   ✓ für das Ziehen eines Elements der Schnittmenge von A und B:

   Die Schnittmenge von A und B enthält zwei Elemente. Daher gilt für die Wahrscheinlichkeit 2/20 = 1/10.

   Alternativ könnten Sie auch eine Formel zur Berechnung verwenden. Um herauszufinden, welche Formel Sie brauchen, müssen Sie sich allerdings zunächst vergewissern, ob die beiden Ereignisse abhängig oder unabhängig sind. Überprüfen Sie hierzu, ob $P(A|\,B) = P(A)$ gilt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wort einen Vokal enthält (A), wenn es mit r beginnt (B)?

   Offensichtlich 2/4 = 1/2 (durch Abzählen). Demgegenüber gilt, wie oben berechnet, $P(A) = 7/10$. Die Ereignisse A und B sind also abhängig, daher müssen Sie zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge die Formel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ mit $P(B \mid A) = 1/7$ (durch Abzählen) anwenden und er-

(4. Korr.)

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

halten $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 7/10 \cdot 1/7 = 1/10$.

✓ für das Ziehen eines Elements der Vereinigungsmenge von A und B:

Sie wissen bereits, dass die Schnittmenge der Ereignisse nicht leer ist, daher können Sie direkt die Formel $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ anwenden:

$P(A \cup B) = 7/10 + 2/10 - 1/10 = 8/10 = 4/5$

Das Ergebnis lässt sich auch leicht intuitiv überprüfen, denn diejenigen Elemente, die nicht in der Vereinigungsmenge enthalten sind, sind die Wörter ohne Vokal, die nicht auf »r« beginnen: tr, sr, ts,st. Das sind genau 4 von 20, also genau das restliche Fünftel, das fehlt, um den Ereignisraum komplett zu machen.

✓ für das Ziehen eines Wortes mit der Struktur Konsonant-Vokal:

Auch hier liegt wieder eine bedingte Wahrscheinlichkeit vor: alle Wörter mit Vokal unter der Bedingung, dass an erster Stelle ein Konsonant steht. Es gibt drei Konsonanten und zwei Vokale, die an erster Stelle stehen könnten. Die Wahrscheinlichkeit für einen Konsonanten an der ersten Stelle ist also 3 von 5, also $P(C) = 3/5$. Für jede dieser Möglichkeiten wiederum gibt es zwei Fortsetzungsmöglichkeiten von vier möglichen (doppelte Buchstaben sind ja verboten), nämlich die Vokale. Also: $P(V \mid C) = 2/4$. Damit gilt nach der Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten
$P(V \cap C) = P(C) \cdot P(V|C) = 3/5 \cdot 2/4 = 6/20 = 3/10$.

(4. Korr.)

Lösung Kapitel 3

1. Ihr Baumdiagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 3.1.

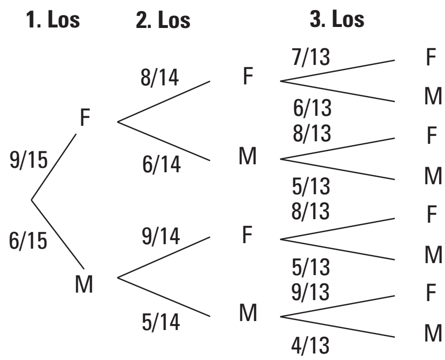

Abbildung 3.1: Für die in der Aufgabe 1. gesuchten Wahrscheinlichkeiten multiplizieren Sie erst die Einzelwahrscheinlichkeiten entlang der Zweige und addieren die Ergebnisse dann.

Da es sich nur um drei Personen handelt, sind die Ereignisse komplementär: Entweder sind die Frauen in der Mehrheit oder die Männer. Es reicht also, die Wahrscheinlichkeit eines der Ereignisse zu berechnen und diesen Wert dann von 1 abzuziehen, um die Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses zu erhalten.

Nehmen Sie sich die Männer vor: Es gibt vier Konstellationen, bei denen die Männer in der Mehrzahl sind: MMF, MFM, FMM, MMM. Diese Einzelwahrscheinlichkeiten müssen entlang der zugehörigen Äste berechnet (durch Multiplikation) und dann addiert werden.

MMF: $(6/15) \cdot (5/14) \cdot (9/13) = (2/5) \cdot (5/14) \cdot (9/13) = 9/91$

MFM: $(6/15) \cdot (9/14) \cdot (5/13) = 27/273 = 9/91$

FMM: $(9/15) \cdot (6/14) \cdot (5/13) = 9/91$

MMM: $(6/15) \cdot (5/14) \cdot (4/13) = 4/91$

Für die Summe ergibt sich somit: 9/91 + 9/91 + 9/91 + 4/91 = 31/91

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Männer in der Mehrzahl sind, beträgt 31/91, die Wahrscheinlichkeit, dass die Frauen in der Mehrzahl sind, entsprechend 1 – 31/91 = 60/91.

2. Wenn Sie ein Venn-Diagramm analog zu demjenigen im Abschnitt *Umwandlungsregeln für Mengen in Venn-Diagrammen* in Kapitel 3 zeichnen, dann werden Sie feststellen, dass die Formel $(A \cap B^c)^c \cup (A^c \cap B)^c$ die gesamte Stichprobe (das heißt den kompletten Verein) abdeckt. Und die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Vereinsmitglied dem Verein angehört, ist natürlich 1.

   Mit M_1 werde das Ereignis bezeichnet, dass als Erstes ein Mann gezogen wurde. F_3 bezeichne das Ereignis, dass als Letzes eine Frau gezogen wurde. Gesucht ist dann die

Wahrscheinlichkeit $P(M_1 \mid F_3)$. Mit der entsprechend umgestellten Multiplikationsregel können Sie berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein bestimmtes vorliegendes Ereignis unter der Voraussetzung eines anderen Ereignisses eingetreten ist. Die Rechnung lautet: Wahrscheinlichkeit, dass das betreffende Ereignis unter der Voraussetzung des anderen Ereignisses eingetreten ist, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit, dass es überhaupt eingetreten ist (also inklusive unter anderen Voraussetzungen). Als Formel: $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$. Im vorliegenden Fall wird die Sache allerdings dadurch komplizierter, dass Sie es mit einem dreistufigen Prozess zu tun haben. Dadurch erhalten Sie zwei Ergebnisse (MMF, MFF), die Sie zu Ihrem Ereignis $M_1 \cap F_3$ zusammenfassen:

Durch Addition der Wahrscheinlichkeiten der beiden Einzelergebnisse bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für Ihr Ereignis:

P(MMF) ist wie oben berechnet: 9/91.

P(MFF) errechnet sich als $(6/15) \cdot (9/14) \cdot (8/13) = 72/455$.

Daher gibt es für das Ereignis »als Letztes wurde eine Frau gezogen und als Erstes ein Mann« die Wahrscheinlichkeit

$P(M_1 \cap F_3) = 9/91 + 72/455 = 117/455$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses benötigen Sie nun noch die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass am Ende die Ziehung einer Frau steht, das heißt, Sie müssen noch die Wahrscheinlichkeit $P(F_3)$ berechnen.

Zu den schon betrachteten Wahrscheinlichkeiten kommen also noch hinzu

P(FMF) und P(FFF) mit $P(\text{FMF}) = (9/15) \cdot (6/14) \cdot (8/13) = 72/455$ und
$P(\text{FFF}) = (9/15) \cdot (8/14) \cdot (7/13) = 84/455$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ereignis »als letzte Ziehung eine Frau« ist daher:

$P(F_3) = 117/455 + 72/455 + 84/455 = 283/455$

Mit der Multiplikationsregel $P(M_1 \mid F_3) = P(M_1 \cap F_3)/P(F_3)$ erhalten Sie also für die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Mal ein Mann gezogen wurde, wenn beim dritten Mal eine Frau gezogen wurde:

$P(M_1 \mid F_3) = (117/455)/(283/455) = 117/283 \approx 0{,}43$ oder 43 %

Lösung Kapitel 4

Ihre Kontingenztabelle sollte ungefähr so wie Tabelle 4.1 aussehen.

	X-Kinder	Nicht-*X*-Kinder	Zeilensummen
X-Eltern	95	25	120
Nicht-*X*-Eltern	15	45	60
Spaltensummen	110	70	Gesamtsumme: 180

Tabelle 4.1: Kontingenztabelle

Die Frage, die Sie hier interessiert, ist, herauszufinden, ob die Kinder von Nicht-*X*-Eltern eine höhere Wahrscheinlichkeit haben, sich vom Fabrikat *X* überzeugen zu lassen, im Vergleich zu Kindern von *X*-Eltern, die sich für ein anderes Fabrikat entscheiden. Wäre das so, dann könnte das auf einen größeren Einfluss der Marke selbst auf die Kaufentscheidung hindeuten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Kinder von *X*-Eltern sich für ein anderes Fabrikat entscheiden, berechnet sich als Quotient aus Durchschnitt des Schnittfelds von erster Zeile und zweiter Spalte und der zugehörigen Zeilensumme, also als $P(X\text{-Eltern} \cap \text{Nicht-}X\text{-Kinder}) / P(X\text{-Eltern}) = 25/120 = 5/24 = 20{,}8\ \%$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Kinder von Nicht-*X*-Eltern sich für das Fabrikat *X* entscheiden, berechnet sich als Quotient aus Durchschnitt des Schnittfelds von zweiter Zeile und erster Spalte und der zugehörigen Zeilensumme, also als $P(\text{Nicht-}X\text{-Eltern} \cap X\text{-Kinder}) / P(\text{Nicht-}X\text{-Eltern}) = 15/60 = 1/4 = 25\ \%$.

Offensichtlich ist es also so, dass Kinder, deren Eltern ein anderes Fabrikat als *X* besitzen, sich leichter vom Einfluss ihrer Eltern befreien können und sich für einen Wagen der Marke *X* entscheiden als umgekehrt. Das könnte man so deuten, dass die Attraktivität der Marke *X* für Führerscheinneulinge unabhängig vom Einfluss der Eltern höher ist als die anderer Marken. (Natürlich könnte man die Daten auch anders interpretieren: Vielleicht sind *X*-Familien konservativer und die Kinder folgsamer …)

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Lösung Kapitel 5

1. Die Frage lautet ja eigentlich nur: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 28 Spielern 11 auszuwählen (natürlich ohne »Zurücklegen«).

   Die einschlägige Formel ist:

   $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   Daher ergeben sich in diesem Fall $\binom{28}{11} = \frac{28!}{11!(28-11)!} = 21.474.180$ mögliche Aufstellungen.

2. Gehen Sie davon aus, dass Torhüter nur im Tor, Verteidiger nur in der Defensive, Mittelfeldspieler nur im Mittelfeld und Stürmer nur im Sturm eingesetzt werden, dann gibt es lediglich eine Möglichkeit, die Mannschaftsteile zu kombinieren.

   Die Anzahl der Aufstellungen für jeden Mannschaftsteil ergibt sich analog zu Frage 1):

   Torhüter $\binom{3}{1} = 3$

   Abwehr: $\binom{9}{4} = 126$

   Mittelfeld: $\binom{10}{5} = 252$

   Sturm: $\binom{6}{1} = 6$

   Da der Trainer (zumindest theoretisch) jede Aufstellung eines Mannschaftsteils mit jeder anderen kombinieren kann, ergeben sich insgesamt

   $3 \cdot 126 \cdot 252 \cdot 6 = 571.536$ verschiedene mögliche Aufstellungen.

3. Zunächst überlegen Sie sich, wie viele Permutationen es für eine Spielpaarung gibt. Wie jeder Fußballfan weiß, macht es einen Unterschied, ob eine Mannschaft zu Hause oder auswärts spielt, deswegen gibt es hier $2! = 2$ Möglichkeiten: Dortmund-Leverkusen und Leverkusen-Dortmund.

   Da weiterhin jede mögliche Mannschaftsaufstellung von Leverkusen mit jeder möglichen Mannschaftsaufstellung von Dortmund kombiniert werden kann (gehen Sie der Einfachheit halber mal davon aus, dass die jeweilige Mannschaftsaufstellung von der gegnerischen Aufstellung unabhängig sei), müssen Sie nur die Anzahl möglicher Aufstellungen von Leverkusen berechnen und diese Zahl mit der entsprechenden Zahl für Dortmund multiplizieren.

(4. Korr.)

Aufstellungen Leverkusen:

Torhüter: $\binom{4}{1} = 4$

Abwehr: $\binom{8}{4} = 70$

Mittelfeld: $\binom{9}{4} = 126$

Sturm: $\binom{3}{2} = 3$

Also gab es für Leverkusen $4 \cdot 70 \cdot 126 \cdot 3 = 105.840$ mögliche Aufstellungen. Dortmund konnte also gegenüber Leverkusen den Vorteil seines um vier Spieler größeren Kaders durch ein entsprechendes Spielsystem in eine fast 6-fach größere Auswahl an Mannschaftsaufstellungen ummünzen. Geht man zusätzlich davon aus, dass der Torwart praktisch nie gewechselt wird, erhöht sich der Vorteil für Dortmund noch zusätzlich. Kein Wunder, dass Dortmund die Partie 3 : 1 gewann.

Um die Anzahl möglicher Begegnungen von Mannschaftsaufstellungen zu berechnen, multiplizieren Sie die möglichen Aufstellungen beider Mannschaften zunächst miteinander und anschließend noch mit 2 (wegen des Unterschieds zwischen Heim- und Auswärtsspielen):

$4 \cdot 70 \cdot 126 \cdot 3 = 105.840 \cdot 571.536 \cdot 2 = 120.982.740.480$, also knapp 121 Milliarden!

Wenn Ihnen das nächste Mal also jemand von einer bevorstehenden Begegnung zwischen zwei Bundesligamannschaften erzählt, bitten Sie ihn, sich konkreter auszudrücken!

Lösung Kapitel 6

1. Wie der Name schon sagt, werden 6 aus 49 Zahlen gesucht. Da die Ziehungen der einzelnen Zahlen abhängige Ereignisse sind und die Reihenfolge keine Rolle spielt, ergibt sich die Zahl der möglichen Kombinationen ganz einfach als

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{720} = 13.983.816\ .$$

   Andererseits können Sie diese Kombinationen trivialerweise auf nur eine einzige Weise erhalten, nämlich indem Sie alle Zahlen richtig tippen. Daher ist die Chance auf sechs Richtige nur $\frac{1}{13.983.816}$.

   Nicht gerade berauschend. Wenn Sie dann noch die Superzahl mit berücksichtigen, reduziert sich die Gewinnchance noch weiter auf ein Zehntel der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit, denn die Superzahl ist nicht Teil der Ziehung, sondern steht auf dem Loszettel. Daher handelt es sich bei der Ziehung der sechs Richtigen und der Superzahl um unabhängige Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden. Für die Superzahl gibt es zehn mögliche Werte, daher ist die Wahrscheinlichkeit, den Jackpot zu knacken

$$\frac{1}{13.983.816} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{139.838.160}\ .$$

2. Das ist etwas kniffliger, da hier quasi zwei Mal ausgewählt wird: einmal bei der Ziehung der sechs Zahlen und dann noch bei der Bestimmung der drei korrekt getippten Zahlen unter den sechs gezogenen. Wenn Sie schrittweise vorgehen und die Sache einfach als eine Kombination von drei Richtigen mit drei Nieten betrachten, löst sich das Ganze jedoch in Wohlgefallen auf.

   Zuerst erinnern Sie sich wie gehabt an die Gesamtzahl der Möglichkeiten, 6 aus 49 auszuwählen: $\frac{49!}{6!(49-6)!} = 13.983.816$.

   Da Sie ja ausdrücklich drei richtige und drei falsche Zahlen haben wollten, können Sie die Zahlen auf Ihrem Lottoschein in zwei Gruppen aufteilen: die richtigen und die falschen. Betrachten Sie beide Gruppen getrennt: Unter 49 Lottokugeln in der Urne gibt es genau sechs, die für Sie interessant sind (stellen Sie sich der Anschaulichkeit halber vor, Ihre sechs Kugeln seien farblich markiert). Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen sechs farbigen Kugeln genau drei auszuwählen?

   Richtig! Es sind

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20 \text{ Möglichkeiten}$$

   Das ist zwar noch recht mickrig im Vergleich zu

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13.983.816,$$

aber Sie sind ja noch nicht fertig. Sie wollen die drei Richtigen noch mit drei Nieten kombinieren (nur ein Mathematiker kann so etwas wollen!). Diese drei Nieten müssen definitionsgemäß zu den 49 – 6 = 43 nicht auserwählten Zahlen gehören, daher gibt es für die Nieten $\binom{43}{3} = \frac{43!}{3!(43-3)!} = 12.341$ Möglichkeiten.

Zusammengefasst haben Sie also für jede der $\frac{6!}{3!(6-3)!}$ Kombinationen von drei Richtigen genau $\frac{43!}{3!(43-3)!}$ Möglichkeiten, Nieten zu ziehen, sodass Sie insgesamt auf $\frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{43!}{3!(43-3)!} = 246.820$ Möglichkeiten für genau drei Richtige kommen.

Die entsprechende Wahrscheinlichkeit für drei Richtige ist daher »Zahl der 3er-Möglichkeiten geteilt durch Gesamtzahl der Möglichkeiten«: $\frac{246.820}{13.983.816} \approx 1,765\%$.

(Dieses Auswahlschema nennt man hypergeometrische Verteilung, sie wird in allgemeiner Form noch in Kapitel 16 behandelt. Dann können Sie sich die Herleitung sparen und einfach die zugehörige Formel verwenden.)

Lösung Kapitel 7

1. a) Ihre drei Werte +1, –1 und +4 für die Zufallsvariable drücken den jeweiligen Gewinn beziehungsweise Verlust aus.

Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Euros berechnen Sie leicht, indem Sie die günstigen Ergebnisse (zwei gleiche Zahlen) durch die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse teilen. Letzteres ist einfach: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Die Anzahl der Möglichkeiten, genau zwei gleiche Zahlen zu werfen, berechnen Sie, indem Sie sich zunächst überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass von drei Würfeln zwei die gleiche Zahl anzeigen. Anders ausgedrückt, wie viele Möglichkeiten gibt es, aus drei Würfeln zwei auszuwählen, und wie viele Möglichkeiten gibt es für jede dieser Möglichkeiten wiederum, eine gleiche Zahl anzuzeigen? Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ist natürlich $\binom{3}{2} = 3$.

Für jede dieser Möglichkeiten gibt es trivialerweise sechs Zahlen, die gleich sein können, nämlich die Zahlen von 1 bis 6. Jede dieser Möglichkeiten kann wiederum mit einer beliebigen Zahl auf dem dritten Würfel kombiniert werden, die allerdings anders lauten muss als die doppelt geworfene Zahl (den Fall, dass drei Zahlen identisch sind, behandeln Sie gesondert), sodass hier für jede doppelt geworfene Zahl fünf Möglichkeiten existieren. Insgesamt haben Sie also $\binom{3}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 90$ Möglichkeiten, einen Euro zu gewinnen.

Die Anzahl der Würfe mit drei gleichen Zahlen ist sehr überschaubar, es gibt nur sechs.

Der Rest der möglichen Würfe muss aus jenen Würfen bestehen, in denen keine Zahl mehrfach auftritt: 216 – 90 – 6 = 120.

Daraus errechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wert der Zufallsvariable	$P(x)$
–1	$120/216 \approx 0{,}556$
1	$90/216 \approx 0{,}417$
4	$6/216 \approx 0{,}0278$

Tabelle 7.1: Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Würfelspiel

b) Der Erwartungswert berechnet sich nach der Formel:

$$E(X) = \sum_{\text{alle } x} x \cdot p(x)$$

Das bedeutet in Ihrem Falle: $P(-1) \cdot (-1) + P(1) \cdot 1 + P(4) \cdot 4 = 0{,}556 \cdot (-1)$ $0,556 \cdot (-1) + 0,417 \cdot 1 + 0,0278 \cdot 4 = -0{,}556 + 0{,}417 + 0{,}111 = -0{,}028$.

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Sie müssen also mit einem durchschnittlichen Verlust von 2,8 Cent pro Spiel, das heißt pro 15 Sekunden rechnen, also mit 11,2 Cent pro Minute oder 6,72 Euro pro Stunde.

c) Wie lange wird Ihr Freund dann wohl mit zehn Euro auskommen? Nicht besonders lange: $10/6{,}72 \approx 1{,}49$. Sie dürfen nach anderthalb Stunden, also gegen 23:30 Uhr wieder auf der Party eintrudeln und ihm ins erstaunte Gesicht sagen: »Na, endlich pleite?«

2. Da Gewinnen das Gegenereignis von Verlieren ist, müssen Sie keine 90 Minuten rechnen, sondern erhalten die Gewinnwahrscheinlichkeit pro Spiel sofort als

$$1 - (P(-1)) = 1 - 0{,}556 = 0{,}444.$$

Die Varianz berechnen Sie mithilfe der Formel:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{\text{alle } x} P(x) \cdot (x-\mu)^2$$

Für μ setzen Sie Ihren Erwartungswert –0,028 ein und erhalten:

$$V(X) = 0{,}556(-1-(-0{,}028))^2 + 0{,}417((1-(-0{,}028))^2 + 0{,}0278(4-(-0{,}028))^2 \approx 1{,}416$$

Da für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)}$ gilt, finden Sie in diesem Fall den Wert $\sigma = \sqrt{1,416} \approx 1{,}19$.

Fragen Sie Ihren Freund beim Abholen mal, ob er beim Spielen auch den Eindruck hatte, dass die Wurzel aus dem Erwartungswert der quadrierten Abweichungen seiner Gewinne vom Erwartungswert 1 Euro 19 betrug …

(4. Korr.)

Lösung Kapitel 8

Das Ganze riecht natürlich nach Binomialverteilung:

Fixe Zahl der Versuche: $n = 7$

Erfolg: Die Person hat ihr Ticket wirklich liegen gelassen. (Toller Erfolg, herzlichen Glückwunsch!)

Zufall und Unabhängigkeit: Mangels besseren Wissens gehen Sie davon aus, dass die Schwindler zufällig verteilt sind und da Sie den Besuchern keinen Bandenbetrug unterstellen wollen, nehmen Sie an, dass es sich beim Liegenlassen der Eintrittskarten um unabhängige Ereignisse handelt.

1. Wie groß ist aber nun die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter sieben Leuten tatsächlich vier Schussel befinden?

   Die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion lautet

   $$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

   n ist in diesem Fall die Anzahl der Personen, mit denen Sie es hier zu tun haben, x die Variable, deren Wahrscheinlichkeit Sie untersuchen wollen.

   Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion

   $$P(4) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{7-4} = 35 \cdot \left(\frac{1}{256}\right) \cdot \left(\frac{27}{64}\right) = \left(\frac{945}{16.384}\right) \approx 0{,}06.$$

   Die Wahrscheinlichkeit, dass von sieben Personen genau vier tatsächlich ihr Ticket vergessen haben, liegt also bei etwa sechs Prozent, sie ist also nicht gerade hoch.

2. Den Erwartungswert berechnen Sie zum Glück ganz einfach als $E(X) = n \cdot p$. Mit $n = 7$ und $p = 0{,}25$ ergibt sich: $E(X) = 7 \cdot 0,25 = 1,75$. Das heißt, es sind pro 7-köpfiger Gruppe im Durchschnitt 1,75 Personen zu erwarten, die ihre Eintrittskarte wirklich haben liegen lassen.

   Varianz und Standardabweichung ermitteln Sie dank der Formel im Abschnitt *Die Varianz und die Standardabweichung der Binomialverteilung* in Kapitel 8 auch ganz leicht:

   $$V(X) = n \cdot p \cdot (1-p), \quad \text{also} \quad V(X) = 7 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{16} \approx 1{,}31$$

   $$\text{beziehungsweise} \quad \sigma = \sqrt{\frac{21}{16}} \approx 1{,}15$$

   Was bedeutet das alles? Im Durchschnitt müssten Sie bei einer Gruppe von sieben Personen mit 1,75 Personen rechnen, die ihre Eintrittskarte vergessen haben. In Ihrem Fall sind es aber vier Personen, also 2,25 mehr, als zu erwarten wären. Das entspricht fast zwei Standardabweichungen ($2 \cdot 1,15 = 2,3$). Wenn das kein schlagendes Argument ist!

Lösung Kapitel 9

1. Sie suchen den Prozentsatz der Soldaten, die größer sind als Napoleon $P(X > N)$. Da die kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion jedoch nur die Werte bis zu Ihrer untersuchten Größe aufsummiert, ziehen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Soldaten, kleiner als Napoleon zu sein, von 1 ab: $1 - P(X < N)$. Zur Vereinfachung können Sie sich auch zunächst einen Graphen zeichnen, der den gesuchten Wert anschaulich macht (siehe Abbildung 9.1).

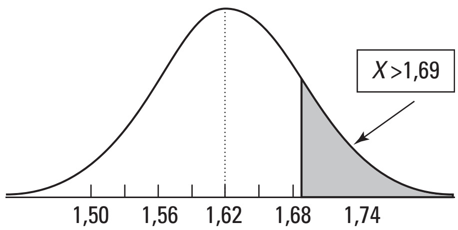

Abbildung 9.1: Der schraffierte Bereich markiert den Anteil der Soldaten, die größer als 1,69 m waren

   Um die Tabelle der kumulativen Wahrscheinlichkeitsfunktionen verwenden zu können, müssen Sie Ihre Werte erst einmal mithilfe der Z-Formel standardisieren. Die Formel lautet: $Z = (X - \mu)/\sigma$. Hierbei haben Sie $\sigma = 7{,}1$, $\mu = 162$ und $X = 169$. Damit ergibt sich $Z = (169 - 162)/7{,}1 = 7/7{,}1 \approx 0{,}99$.

   Wenn Sie jetzt in der Z-Tabelle des Anhangs nachsehen, finden Sie in der Zeile 0,9 und der Spalte 0,09 den Wert 0,8389. Das heißt, knapp 84 Prozent der Soldaten waren kleiner als Napoleon, entsprechend nur 16 Prozent größer als er. Wenn man dann noch berücksichtigt, dass es Mindestgrößen für die einzelnen Waffengattungen gab und Soldaten damit tendenziell größer waren als der Rest der Bevölkerung, dürfte Napoleon im Vergleich zum Bevölkerungsdurchschnitt doch ziemlich stattlich gewirkt haben. Weshalb war er dann angeblich so unzufrieden mit seiner kleinen Statur? Es kommt halt immer darauf an, mit wem man sich vergleicht, und wen hätte Napoleon schon eines Vergleichs mit sich für würdig befunden?

2. Sie gehen nach dem Rezept für die Rückwärtsrechnung im Abschnitt *Normalverteilung mit Rückwärtsrechnung* im Kapitel 9 vor. Überlegen Sie sich aber zunächst, dass Zugehörigkeit zu den größten 25 Prozent bedeutet, dass mindestens 75 Prozent der Leute kleiner sind. Also suchen Sie den gewünschten Wert von 0,75 in der Z-Tabelle. In der Zeile 0,6 und der Spalte 0,08 finden Sie den Wert 0,7517. Damit wäre man sicher bei den größten 25 Prozent dabei. Die Zahl von 0,7517 müssen Sie nur noch in Ihre nach X umgestellte Formel für die Z-Verteilung, das heißt $X = Z \cdot \sigma + \mu$, einsetzen und erhalten für die Männer: $X = 0{,}7517 \cdot 7{,}4 + 178 \approx 183{,}6$ und für die Frauen: $X = 0{,}7517 \cdot 6{,}5 + 165 \approx 169{,}9$.

   Mit einer Körpergröße von 1,84 m beziehungsweise 1,70 m gehören Sie also schon zum größten Viertel der Bevölkerung.

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Lösung Kapitel 10

1. Bei dieser Frage handelt sich um einen Fall von Binomialverteilung (also eine Auswahl mit Zurücklegen). Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 60 Bratwurstkäufern zehn oder mehr nach Senf verlangen. Aufgrund der großen Zahlen, die bei der Binomialverteilung auftreten würden (Die Zahl 60! $\approx 8{,}32 \cdot 10^{81}$ liegt etwa in der Größenordnung der geschätzten Anzahl der Atome im Universum – und das noch ohne dunkle Materie!), prüfen Sie, ob Sie hier eine Annäherung durch die Normalverteilung versuchen können. Zu diesem Zwecke untersuchen Sie $n \cdot p$ und $n \cdot (1 - p)$. Wegen $60 \cdot 0,2 = 12 > 5$ und $60 \cdot 0,8 = 48 > 5$ können Sie sich getrost die Normalverteilung zunutze machen und orientieren sich an der Vorgehensweise im Abschnitt *Eine Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern: Ein Münzbeispiel* in Kapitel 10 des Buches.

2. Ihre gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet also $P(X > 10)$, wenn Sie das Risiko berechnen wollen, dass Ihnen irgendwann der Senf ausgeht, oder $P(X < 11)$ beziehungsweise $P(X \leq 10)$, wenn Sie die Wahrscheinlichkeit berechnen wollen, dass der Senf bis zum Ende des Tages reicht. Da es sich um komplementäre Ereignisse handelt, suchen Sie sich denjenigen Fall, bei dem Sie weniger rechnen müssen, weil er direkt in der kumulativen Wahrscheinlichkeitsfunktion auftaucht: $P(X < 11)$ oder $P(X \leq 10)$.

   Zur Illustrierung können Sie sich an Abbildung 10.4 orientieren, Sie müssen nur die Zahlen entsprechend der Aufgabe anpassen. An der Abbildung erkennen Sie außerdem, dass Sie bei der Berechnung einer Kleiner-als-Wahrscheinlichkeit die rechte Hälfte des 10er-Balkens (da $X \leq 10$ gilt) vernachlässigt haben. Deshalb nehmen Sie jetzt eine Stetigkeitskorrektur vor und addieren zu Ihrem untersuchten Wert noch 0,5 hinzu und erhalten 10,5 als Berechnungsgrundlage. Der Mittelwert ergibt sich durch die Formel $\mu = n \cdot p$ als $\mu = 60 \cdot 0,2 = 12$ und die Standardabweichung aus der Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ als $\sigma = \sqrt{60 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 3,1$. Damit haben Sie alles beieinander, was Sie zur Berechnung des Z-Werts benötigen. Wegen $Z = (X - \mu)/\sigma$ erhalten Sie $Z = (10{,}5 - 12)/3{,}1 = -0{,}4841$. Für den zugehörigen Z-Wert runden Sie auf –0,49 (womit Sie gleichzeitig noch zusätzlich auf Nummer sicher gehen, dass Ihre Schätzung nicht zu optimistisch war) und erhalten aus der Z-Tabelle als Wahrscheinlichkeitswert 0,3121. Die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre zehn Portionen Senf ausreichen, liegt also bei knapp 31 Prozent.

   Wenn Sie jetzt in Betracht ziehen, dass Sie nur noch Stammkunden erwarten, bei denen die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Senfmangel zur Konkurrenz überlaufen, sehr niedrig ist, also zum Beispiel bei zehn Prozent liegt, dann können Sie die Tatsache ausnutzen, dass bei der Normalverteilung Mittelwert = Erwartungswert ist. Unter 60 Bratwurstkäufern wären zwölf Kunden zu erwarten, die Senf verlangen. Es wäre also mit zwei enttäuschten (Stamm-)Kunden zu rechnen, von denen Sie wiederum vielleicht zehn Prozent vergraulen würden. Also können Sie auf die Aufstockung des Senfvorrats verzichten, bei 0,2 unzufriedenen Kunden reicht vielleicht auch ein freundliches Lächeln …

(4. Korr.)

Lösung Kapitel 11

Diese Aufgabe können Sie mit dem Zentralen Grenzwertsatz (ZGS) angehen. Gesucht ist eine Wahrscheinlichkeit, sodass das Lösungsschema aus dem Abschnitt *Wahrscheinlichkeiten für* $\hat{p}$ *mit dem ZGS berechnen* in Kapitel 11 anzuwenden wäre – vorausgesetzt, die Bedingung $n \cdot p \geq 10$ ist erfüllt; doch dazu später. Denn bevor Sie die Formeln anwenden können, müssen Sie sich die Angaben noch ein bisschen genauer anschauen, denn Sie benötigen p, den Anteil in einer Population, und $\hat{p}$, den Anteil in einer zufälligen Stichprobe, zu denen Sie jedoch keine direkten Angaben besitzen. Der Stichprobenanteil $\hat{p}$ lässt sich jedoch leicht ermitteln: 20/120 = 1/6.

Wie sieht es jetzt mit $p = P(X \geq 185)$ aus? Gesucht sind junge Männer mit einer Größe von mindestens 1,85 m. Wie groß ist denn die Chance für einen jungen Mann, größer oder gleich 1,85 m zu sein? Um das herauszufinden, brauchen Sie die Normalverteilung und gehen vor wie in Kapitel 10 beschrieben: Anhand des Graphen machen Sie sich zunächst klar, dass Sie eine Größer-als-Wahrscheinlichkeit suchen und deswegen den Wert aus der Z-Tabelle von 1 subtrahieren müssen: $P(X \geq 185) = 1 - P(X < 185)$. Dann rechnen Sie die angegebene Größe von 1,85 m mithilfe der Formel $Z = (X - \mu)/\sigma$ in einen Z-Wert um: $Z = (185 - 181)/7{,}4 \approx 0{,}54$. Aus der Z-Tabelle entnehmen Sie für $Z = 0{,}54$ den Wert $P(Z < 0{,}54) = 0{,}7054$ und deswegen ist $P(X \geq 185) = 1 - 0{,}7054 = 0{,}2946$ oder etwa 29 Prozent. Der Anteil 18–20-jähriger junger Männer in der Bevölkerung mit einer Körpergröße von mindestens 1,85 m liegt bei ungefähr 29 Prozent.

Bevor Sie mit der eigentlichen Rechnung anfangen, dürfen Sie nicht vergessen, die Voraussetzung zur Anwendung des ZGS zu prüfen, also gilt $n \cdot p \geq 10$? Natürlich: $120 \cdot 0,29 = 34,8 \geq 10$.

Mithilfe der Formel im Abschnitt *Wahrscheinlichkeiten für* $\hat{p}$*mit dem ZGS berechnen* in Kapitel 11 können Sie jetzt Ihren Stichprobenanteil $\hat{p}$ =1/6 $\approx 0{,}167$ in einen Z-Wert konvertieren: $Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$. Also in diesem Falle $Z \approx \dfrac{0{,}167 - 0{,}29}{\sqrt{\dfrac{0{,}29(1 - 0{,}29)}{120}}} \approx \dfrac{-0{,}123}{0{,}041} \approx -3$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit lesen Sie aus der Tabelle ab: $P(Z < -3) = 0{,}0013$. Da Sie hier die »Größer als«-Wahrscheinlichkeit suchen, müssen Sie den Wert noch von 1 subtrahieren: $1 - 0{,}0013 = 0{,}9987$. Das Filmteam kann sich bei dieser Auswahl sogar berechtigte Hoffnung auf die Entdeckung eines schauspielerischen Nachwuchstalents machen …

Lösung Kapitel 12

1. Weil der Z-Wert für eine Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent gleich 1,96 ist, erhalten Sie mithilfe der Formel im Abschnitt *Ein Konfidenzintervall für p erstellen* im Kapitel 12:Fehlergrenze $= 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Für $\hat{p}$ = 1/200 = 0,005 und n = 100 ergibt sich die Fehlergrenze $1,96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}005(1-0{,}005)}{100}} \approx 0{,}014$, also etwa 1,4 Prozent. Bei einem erwarteten Ausschuss von 1/200 = 0,5 % ist eine solche Fehlergrenze natürlich ziemlich nutzlos.

   Eine (wenig empfehlenswerte) Möglichkeit zur Erhöhung der Effizienz bei der Qualitätskontrolle wäre, die Qualitätsstandards zu senken (Beachten Sie, dass der Ausdruck $\hat{p}(1-\hat{p})$ bei $\hat{p}$= 0,5 sein Minimum erreicht; das heißt, die geringste Fehlergrenze hätten Sie, wenn die Hälfte der Produktion Ausschuss wäre … Dann könnten Sie sich die Qualitätskontrolle allerdings am besten gleich ganz sparen und den Laden zumachen). Die bessere Alternative bestünde natürlich darin, einfach die Stichproben zu vergrößern. Um herauszufinden, wie groß die Stichproben für eine Fehlergrenze von 0,1 Prozent sein müssten, lösen Sie die obige Formel einfach nach n auf:

$$
\begin{aligned}
n &= 1{,}96^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\text{Fehlergrenze}^2} = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}005(1-0{,}005)}{0{,}001^2} \\
&= 3{,}8416 \cdot \frac{0{,}004975}{0{,}000001}, \quad \text{also} \quad n \approx 19.112.
\end{aligned}
$$

   Eine Stichprobe, bei der man sich zu 95 Prozent sicher sein kann, dass der Ausschuss tatsächlich zwischen 0,4 und 0,6 Prozent (also 0,5 Prozent Ausschuss $\pm 0,1$ Prozent Fehlergrenze) liegt, muss also mindestens 19.112 Tafeln umfassen. Qualität hat halt ihren Preis! (Übrigens: Die Näherungsformel im Abschnitt *Die Kosten einer richtigen Entscheidung abschätzen* in Kapitel 12 funktioniert nur, wenn $\hat{p}$ irgendwo in der Mitte zwischen 0 und 1 liegt. Denn, wenn $\hat{p}$ sich 0 oder 1 annähert, geht der Ausdruck $\hat{p}(1-\hat{p})$ gegen 0.)

2. Bei dieser Frage handelt es sich um einen Hypothesentest. Als Nullhypothese nehmen Sie an, die Maschinen funktionierten einwandfrei. Wie groß ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Maschinen trotz der großen Anzahl an fehlerhaften Schokoladentafeln korrekt arbeiten? Die Teststatistik berechnen Sie, indem Sie die Abweichung vom Erwartungswert durch den Standardfehler teilen und dann wieder in der Z-Tabelle nachschlagen, um die Prozentwerte zu ermitteln:

$$Z \text{ (Teststatistik)} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\mathrm{p}(1-p)}{n}}}$$

$$\text{Also:} \quad Z = \frac{\frac{130}{20.000} - \frac{1}{200}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{200}\left(1 - \frac{1}{200}\right)}{20.000}}} = \frac{\frac{30}{20.000}}{\sqrt{\frac{199}{40.000 \cdot 20.000}}} = \frac{30\sqrt{398}}{199} \approx 3{,}00.$$

Ein Z-Wert von 3,00 oder mehr kommt unter Annahme fehlerfreier Maschinen nur in 0,0013 Prozent der Stichproben vor (laut Z-Tabelle). Das liegt deutlich unter Ihrer Signifikanzstufe von zwei Prozent und damit haben Sie allen Grund, davon auszugehen, dass Ihre Nullhypothese falsch war und die Maschinen dringend überprüft werden müssten, bevor die ersten Kundenbeschwerden eingehen.

Lösung Kapitel 13

1. Zuerst untersuchen Sie, ob die Voraussetzungen für die Verwendung der Poissonverteilung erfüllt sind:

   Werden Ereignisse innerhalb einer bestimmten Zeit oder eines bestimmten Raumes gezählt? Ja.

   Sind die Ereignisse unabhängig? Ja. (Zumindest im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

   Können die Ereignisse gleichzeitig eintreten? Im Prinzip schon, sie tun es aufgrund der Seltenheit tatsächlich aber nicht.

   Dann müssen Sie die Ereignisrate λ für Deutschland bestimmen. Der Anteil Deutschlands an der Erdoberfläche ist $360.000/510.000.000 \approx 1/1.417$. Die Anzahl der zu erwartenden Meteoriten pro Jahr ist daher $21.000 \cdot 1/1.417 \approx 15$.

   Nach der Formel für die Poissonverteilung ist für $\lambda = 15$ und $X = 8$ die Wahrscheinlichkeit für acht Meteoriten $P(X) = \frac{e^{-15} \cdot 15^8}{8!} \approx 0{,}02$, also etwa 2 Prozent.

2. Die Frage lässt sich leicht mithilfe der Poisson-Tabelle beantworten. In der Spalte für $\lambda = 15$ und der Zeile $X = 25$ finden Sie den Wert 0,994. Da Sie eine »größer als«-Wahrscheinlichkeit suchen, müssen Sie den Wert von 1 subtrahieren und erhalten 0,006. Mehr als 25 Meteoriten pro Jahr dürfen Sie in Deutschland nur mit einer Wahrscheinlichkeit von etwas mehr als einem halben Prozent erwarten. Irgendwie beruhigend, oder?

3. Sie ahnen natürlich sofort, dass bei einer Rate von zwei Sternschnuppen pro Minute Ihr Erwartungswert für eine halbe Stunde viel zu groß für die Poissonverteilung werden würde und Sie auf die Annäherung durch die Normalverteilung zurückgreifen müssen. Die Vorgehensweise finden Sie im Abschnitt *Die vollständigen Schritte für die Annäherung der Poissonverteilung an die Normalverteilung* in Kapitel 13 erklärt. Zur Berechnung benötigen Sie die Standardabweichung und Ihren Erwartungswert. Für Letzteren gilt ja $\mu = \lambda$, also $\mu = (1/2) \cdot 2 \cdot 30 = 30$. (Haben Sie berücksichtigt, dass Sie nur den halben Himmel beobachten, das aber 30 Minuten lang?)

   Da die Standardabweichung gleich der Wurzel aus dem Erwartungswert ist, berechnen Sie diese als: $\sigma = \sqrt{30} \approx 5{,}5$.

   Als Nächstes übertragen Sie die Frage in eine Wahrscheinlichkeitsnotation. Da nach der Wahrscheinlichkeit für eine Sternschnuppenzahl kleiner als 20 gefragt ist, suchen Sie also: $P(X < 20)$. Um den Näherungsfehler zu minimieren, nehmen Sie am besten noch eine Stetigkeitskorrektur vor und addieren zu Ihren 20 noch 0,5 hinzu, das heißt, Sie suchen also $P(X < 20{,}5)$.

   Jetzt berechnen Sie den Z-Wert nach der bekannten Formel $Z = (X - \mu)/\sigma$.

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

$Z = (20{,}5 - 30)/5{,}5 = -9{,}5/5{,}5 \approx -1{,}73$. Nachschauen in der Tabelle liefert für $Z = -1{,}73$ den Wert 0,0418.

Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb einer halben Stunde weniger als 20 Sternschnuppen sehen zu können, beträgt also etwa 4,2 Prozent. Da $\lambda = 30$ ist, halten Sie diese Näherungslösung für zulässig.

Wer da noch behauptet, noch nie eine Sternschnuppe gesehen zu haben, weiß es nur nicht …

(4. Korr.)

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Lösung Kapitel 14

Zunächst müssen Sie die Angaben in Prozentwerte umrechnen: 105,76/205,76 $\approx$ 0,514. Also besteht eine 51,4%ige Wahrscheinlichkeit für eine Jungengeburt und eine 48,6%ige Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt.

Die Zufallsvariable X gibt an, bei welcher Geburt erstmals ein Junge geboren wurde. Sie ist geometrisch verteilt (vergewissern Sie sich in Kapitel 14, Abschnitt *Die Bedingungen für eine geometrische Verteilung*), und zur Lösung der Aufgabe müssen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 5)$ berechnen.

Laut Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion (WMF) gilt $P(X = 5) = 0{,}514^4 \cdot 0{,}486 \approx 0{,}034$. Es besteht also eine 3,4%ige Wahrscheinlichkeit, erst beim fünften Kind ein Mädchen zu bekommen. (Zum Vergleich: Wären die beiden Wahrscheinlichkeiten gleich, läge die Chance bei 3,1 Prozent.)

Für die Varianz verwenden Sie die Formel $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Daher gilt $V(X) = \dfrac{1-0{,}514}{(0{,}514)^2} \approx 1{,}84$.

Und für die Standardabweichung: $\sqrt{1{,}84} \approx 1{,}36$.

(4. Korr.)

Lösung Kapitel 15

1. Laut dem Abschnitt *Die Bedingungen für eine negative Binomialverteilung* in Kapitel 15 sind die Voraussetzungen für die Anwendung der negativen Binomialverteilung erfüllt: Unabhängigkeit, Erfolg-Misserfolg, gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit (laut Aufgabenstellung); außerdem werden die Versuche bis zum k-ten Erfolg gezählt.

   Daher können Sie die Formel der negativen Binomialverteilung anwenden:

   $$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{x-k}$$

   X ist die Gesamtzahl der Versuche, für die Sie die Wahrscheinlichkeit suchen (5), k ist die Anzahl der Erfolge (3) und p die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg pro Versuch (0,45). Also erhalten Sie:

   $$P(X = x) = \binom{5-1}{3-1} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{5-3} = 6 \cdot 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^2 \approx 0{,}165$$

   Die Wahrscheinlichkeit, nach fünf Neueinstellungen den dritten geeigneten Mitarbeiter eingestellt zu haben, beträgt daher etwa 16,5 Prozent.

2. Hierzu benötigen Sie den Erwartungswert: $E(X) = k/p = k \cdot 1/p$. Für $k = 10$, $p = 0{,}45$ erhalten Sie: $E(X) = 10/0{,}45 \approx 22$. Also im Durchschnitt müssen Sie 22 Mitarbeiter einstellen, um zehn geeignete gefunden zu haben. Kein Wunder, dass so viele Bewerbungsschreiben verfasst werden!

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Lösung Kapitel 16

In der Aufgabe zu Kapitel 6 haben Sie die hypergeometrische Verteilung bereits einmal angewandt. Schlagen Sie noch einmal zurück, um sich das Prinzip zu vergegenwärtigen.

Diesen Fall lösen Sie im Prinzip analog zu Kapitel 6, beachten Sie aber Folgendes:

Die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung setzt sich aus der Wahrscheinlichkeit für die Annahme nach der ersten Stichprobe ($P(1)$) und der Wahrscheinlichkeit für die Annahme nach der zweiten Stichprobe ($P(2)$) zusammen. Die Wahrscheinlichkeit der Annahme nach der ersten Stichprobe besteht ihrerseits wiederum aus zwei Fällen.

Für beide Fälle, $P(1)$ und $P(2)$, gilt: Anzahl der Möglichkeiten, aus 100 Melonen zehn auszuwählen: $\binom{100}{10} = \frac{100!}{10!90!}$.

Beginnen Sie mit der Wahrscheinlichkeit für die Annahme nach der ersten Lieferung, $P(1)$:

N (Größe der Lieferung) = 100, M (Gesamtzahl der ungenießbaren Melonen) = 5,
X (ungenießbare Melonen in der Stichprobe) $\in \{0,1\}$

- Fall a) keine ungenießbare Melone, $X = 0$:

  Die Anzahl der Möglichkeiten, aus fünf ungenießbaren Melonen null auszuwählen, ist

  $$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = 1\,.$$

  Für diese Möglichkeit gibt es in der Stichprobe (nach Voraussetzung im Durchschnitt)

  $$\binom{95}{10} = \frac{95!}{10!(95-10)!} = \frac{95!}{10!85!} = 10.104.934.117.421$$

  Möglichkeiten, zehn genießbare Melonen auszuwählen.

  Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Stichprobe keine ungenießbare Melone enthält, ist daher: $1 \cdot \frac{\frac{95!}{10!85!}}{\frac{100!}{10!90!}} \approx 0{,}58.$

  Sie liegt also bei 58 Prozent.

(4. Korr.)

- ✓ Fall b) Eine ungenießbare Melone, $X = 1$:

  Die Anzahl der Möglichkeiten, aus fünf ungenießbaren Melonen genau eine auszuwählen, ist

  $$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5.$$

  Für jede dieser Möglichkeiten gibt es in der Stichprobe

  $\binom{95}{9} = \frac{95!}{9!(95-9)!} = \frac{95!}{9!86!} = 1.174.992.339.235$ Möglichkeiten, neun genießbare Melonen auszuwählen.

  Die Wahrscheinlichkeit einer ungenießbaren Melone bei der ersten Stichprobe ist daher:

  $$5 \cdot \frac{\frac{95!}{9!86!}}{\frac{100!}{10!90!}} \approx 0{,}34.$$

  Damit gilt: $P(1) = 0{,}58 + 0{,}34 = 0{,}92$

  Anders ausgedrückt: Mit 92%iger Wahrscheinlichkeit nehmen Sie die Lieferung nach der ersten Stichprobe schon an.

Berechnen Sie nun noch die Wahrscheinlichkeit für die Annahme nach der zweiten Lieferung $P(2)$:

Da die zweite Stichprobe nicht unabhängig von der ersten ist, können Sie hier die Multiplikationsregel aus Kapitel 2 wieder mal zu Ehren kommen lassen: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

Dafür benötigen Sie die Wahrscheinlichkeiten der ersten und zweiten Stichprobe.

$N = 100, M = 5, X = 2, n = 10$ (erste Stichprobe)

$N = 90, M = 3, X = 0, n = 10$ (zweite Stichprobe)

Sie berechnen also einfach das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit von zwei ungenießbaren Melonen in der ersten Stichprobe $\frac{\binom{5}{2}\binom{95}{8}}{\binom{100}{10}}$ und der Wahrscheinlichkeit für keine ungenießbaren Melonen in der zweiten Stichprobe unter der Bedingung zweier ungenießbarer

W:/p_3/vc/318vc/9783527713257/b4/b4.3d vom 21.6.2016
((S. 1–28)) 3B2-Version9.1/Unicode; Bearbeiter: Weishaar
2162138 Wahrscheinlihckeitsrechnung für Dummies – Bearbeitung in: VmWare Universal-XP CS3
Seitenformat: 176.00 x 240.00 mm

Melonen in der ersten Stichprobe $\frac{\binom{3}{0}\binom{87}{10}}{\binom{90}{10}}$ und erhalten:

$$\frac{\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{95!}{8!87!}}{\frac{100!}{10!90!}}\cdot\frac{\frac{3!}{0!3!}\cdot\frac{87!}{10!77!}}{\frac{90!}{10!80!}}\approx 0{,}05$$

Für die Gesamtwahrscheinlichkeit, die Lieferung anzunehmen, addieren Sie schließlich beide Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(1) + P(2) = 0{,}92 + 0{,}05 = 0{,}97$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, bei diesem Test die Ladung zu akzeptieren, liegt daher bei 97 Prozent. Das ist ziemlich hoch, entspricht aber relativ genau der Qualität der Lieferung (95 Prozent) und scheint daher auch gerechtfertigt. Rein praktisch betrachtet müsste man sich in diesem Falle jedoch fragen, ob unter diesen Bedingungen der Aufwand einer Qualitätskontrolle in einem vernünftigen Verhältnis zum Nutzen steht … außer natürlich, Sie gehören zu den Experten, die eine gute Melone am Klang erkennen.

(4. Korr.)

Lösung Kapitel 17

1. Da in diesem Falle eine »größer als«-Wahrscheinlichkeit für eine Gleichverteilung vorliegt, können Sie das Problem geometrisch lösen. Gehen Sie hierzu vor wie im Buch in Kapitel 17, Abschnitt *»Größer als«-Wahrscheinlichkeiten berechnen* beschrieben und fertigen Sie eine Skizze (analog zu Abbildung 17.6) an:

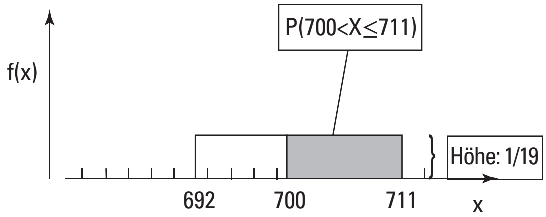

Abbildung 17.1: Beachten Sie, dass die Höhe des Rechtecks gleich 1/(711 – 692) = 1/19 sein muss und Ihr Definitionsbereich, das heißt die Länge des Rechtecks, zwischen 692 und 711 liegt.

Sie suchen den Teil der Rechteckfläche, der rechts von $x = 700$ liegt. Hierzu berechnen Sie $f(X > 700) = f(700) \cdot (b - 700)$ oder verwenden die Formel $P(X > 700) = (b - 700)/(b - a)$. Wie auch immer, Sie erhalten $11 \cdot (1/19) = 11/19 \approx 0,58$. In den meisten Fällen bekommen Sie also mehr für Ihr Geld, als Sie dachten!

2. Da hier eine Gleichverteilung vorliegt, befindet sich der Erwartungs- oder Mittelwert eben genau in der Mitte zwischen a und b. Sie rechnen also einfach $E(X) = (692 + 711)/2 = 701{,}5$.

   Was die Varianz betrifft, so verwenden Sie die entsprechende Formel für die stetige Gleichverteilung:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

   In unserem Fall mit $b = 711$ und $a = 692$ ergibt sich also

$$V(X) = \frac{(711-692)^2}{12} = \frac{361}{12}$$

   und damit berechnen Sie die Standardabweichung als $SD(X) = \sqrt{\frac{361}{12}}$ oder etwa 5,5 Milliliter.

Lösung Kapitel 18

1. Hier liegt offensichtlich eine »Größer als«-Wahrscheinlichkeit vor, deshalb gehen Sie vor wie auf im Buch in Kapitel 18 Abschnitt *»Größer als«-Wahrscheinlichkeiten für eine Exponentialverteilung berechnen* beschrieben. Verwenden Sie die Formel für die stetige Exponentialverteilung:

   $$P(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

   λ ist nicht direkt gegeben, aber Sie wissen, dass es dem Kehrwert des Erwartungswerts entspricht: $\lambda = 1/E(X)$. Den Erwartungswert kennen Sie jedoch: zwei Jahre. λ ist daher ½. Da Ihr $X = 3$ ist, müssen Sie nur noch einsetzen und rechnen:

   $P(X > 3) = e^{-3/2} \approx 0{,}22$. Ihr Handy wird mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 22 Prozent älter als drei Jahre werden … natürlich vorausgesetzt, Sie nehmen damit nicht an Handyweitwurfmeisterschaften teil.

Auch hier könnten Sie alternativ das Integral von null bis drei berechnen und dann von eins abziehen. Sie wissen ja, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich eins sein muss, beziehungsweise die Fläche unter der Dichtefunktion den Wert eins hat.

2. Das ist ganz einfach. Die Formel für die Varianz der Exponentialverteilung lautet:

   $$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}\ .$$

   Entsprechend rechnen Sie $V(X) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$ und $SD(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.