Lösungen der Aufgaben
Theoretische Informatik für Dummies
Teil III - Harte Probleme

Prof. Dr. R. Schmitz*

September 2019

9 Aufgaben zur Komplexität von Algorithmen

9.1

a) Mit der Regel von de L' Hospital gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{cn}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{kn^{k-1}}{ce^{cn}} = \ldots \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{k!}{c^k e^{cn}} = 0.\end{aligned}$$

b) Es gilt $a^n = e^{n\log(a)}$. Damit ist b) ein Spezialfall von a).

9.2

- Für $n > 3$ gilt
$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots 2}^{n \text{ mal}}}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots 1} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \ldots \frac{2}{2} \cdot 2 < \frac{4}{n}.$$
Deshalb ist $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ und $2^n < O(n!)$.
- Für $n > 2$ gilt
$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots 1}{\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots n}_{n \text{ mal}}} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \ldots \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$
Deshalb ist $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ und $n! < O(n^n)$.

9.3

Der Vergleich der Daten und ihr Austausch haben jeweils konstanten Aufwand. Diese beiden Operationen müssen im Rahmen der inneren Schleife $(n-1)$mal durchgeführt werden. Die innere Schleife muss wiederum $n$mal durchlaufen werden, so dass man insgesamt $2n(n-1) \in O(n^2)$ Operationen benötigt.

*Studiengang Medieninformatik, Hochschule der Medien Stuttgart

10 Aufgaben zu P und NP

10.1

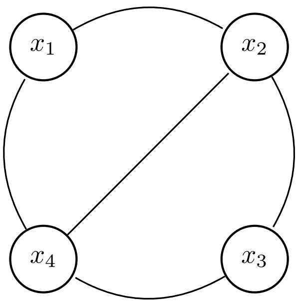
Ein einfacher Algorithmus, um zu prüfen, ob ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit zwei Farben färbbar (man sagt auch **bipartit**) ist:

- Beginne mit einem Knoten $x_0 \in V$ und färbe ihn rot.
- Färbe alle Nachbarknoten von x_0 blau.
- Färbe die Nachbarknoten der Knoten aus dem vorigen Schritt rot.
- Fahre fort, bis alle Knoten gefärbt sind (dann ist der Graph 2-färbbar), oder bis man auf einen Nachbarknoten trifft, der bereits die gleiche Farbe wie der aktuelle Knoten hat (dann ist der Graph nicht 2-färbbar).

Wenn G n Knoten besitzt, müssen im worst case zu jedem der n Knoten $(n-1)$ Nachbarknoten untersucht werden. Der Algorithmus hat also eine Komplexität in $O(n^2)$.

10.2

Hier die boolesche Funktion für den Graph aus Abbildung 10.2(a). Dabei sind die Knoten gegen den Uhrzeigersinn nummeriert, beginnend mit dem Knoten links oben:



$$
\begin{aligned}
\phi \quad = \quad & \neg(R_{x_1} \wedge R_{x_2}) \wedge \neg(G_{x_1} \wedge G_{x_2}) \wedge \neg(B_{x_1} \wedge B_{x_2}) \wedge \\
& \neg(R_{x_1} \wedge R_{x_4}) \wedge \neg(G_{x_1} \wedge G_{x_4}) \wedge \neg(B_{x_1} \wedge B_{x_4}) \wedge \\
& \neg(R_{x_2} \wedge R_{x_3}) \wedge \neg(G_{x_2} \wedge G_{x_3}) \wedge \neg(B_{x_2} \wedge B_{x_3}) \wedge \\
& \neg(R_{x_2} \wedge R_{x_4}) \wedge \neg(G_{x_2} \wedge G_{x_4}) \wedge \neg(B_{x_2} \wedge B_{x_4}) \wedge \\
& \neg(R_{x_3} \wedge R_{x_4}) \wedge \neg(G_{x_3} \wedge G_{x_4}) \wedge \neg(B_{x_3} \wedge B_{x_4}) \wedge \\
& ((R_{x_1} \wedge \bar{G}_{x_1} \wedge \bar{B}_{x_1}) \vee (G_{x_1} \wedge \bar{R}_{x_1} \wedge \bar{B}_{x_1}) \vee (B_{x_1} \wedge \bar{R}_{x_1} \wedge \bar{G}_{x_1})) \wedge \\
& ((R_{x_2} \wedge \bar{G}_{x_2} \wedge \bar{B}_{x_2}) \vee (G_{x_2} \wedge \bar{R}_{x_2} \wedge \bar{B}_{x_2}) \vee (B_{x_2} \wedge \bar{R}_{x_2} \wedge \bar{G}_{x_2})) \wedge \\
& ((R_{x_3} \wedge \bar{G}_{x_3} \wedge \bar{B}_{x_3}) \vee (G_{x_3} \wedge \bar{R}_{x_3} \wedge \bar{B}_{x_3}) \vee (B_{x_3} \wedge \bar{R}_{x_3} \wedge \bar{G}_{x_3})) \wedge \\
& ((R_{x_4} \wedge \bar{G}_{x_4} \wedge \bar{B}_{x_4}) \vee (G_{x_4} \wedge \bar{R}_{x_4} \wedge \bar{B}_{x_4}) \vee (B_{x_4} \wedge \bar{R}_{x_4} \wedge \bar{G}_{x_4}))
\end{aligned}
$$

10.3

$$\phi(x, y) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$$

10.4

Da der Ausdruck $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5$ aus vier $\vee$-Klauseln besteht, müssen wir vier Hilfsvariablen y_1, y_2, y_3, y_4 einführen. Der Teilausdruck $(x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu

$$(x_1 \vee y_1 \vee y_3) \wedge (x_2 \vee \bar{y}_1 \vee y_3) \wedge (x_3 \vee y_2 \vee \bar{y}_3) \wedge (x_4 \vee \bar{y}_2 \vee \bar{y}_3).$$

Deshalb ist $((x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4)) \vee \bar{x}_5$ erfüllbarkeitsäquivalent zu der Formel

$$(x_1 \vee y_1 \vee y_3 \vee y_4) \wedge (x_2 \vee \bar{y}_1 \vee y_3 \vee y_4) \wedge (x_3 \vee y_2 \vee \bar{y}_3 \vee y_4) \wedge (x_4 \vee \bar{y}_2 \vee \bar{y}_3 \vee y_4) \wedge (\bar{x}_5 \vee \bar{y}_4).$$

Wir haben damit KNF erreicht. Da keine der fünf Teilklauseln die Länge 3 hat, müssen wir für die 3-KNF noch weitere fünf Variablen z_i hinzufügen. Zum Beispiel ist der Teilausdruck $(x_1 \vee y_1 \vee y_3 \vee y_4)$ erfüllbarkeitsäquivalent zu

$$(x_1 \vee y_1 \vee z_1) \wedge (y_3 \vee y_4 \vee \bar{z}_1),$$

und $(\bar{x}_5 \vee \bar{y}_4)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu

$$(\bar{x}_5 \vee \bar{y}_4 \vee z_5) \wedge (\bar{x}_5 \vee \bar{y}_4 \vee \bar{z}_5).$$

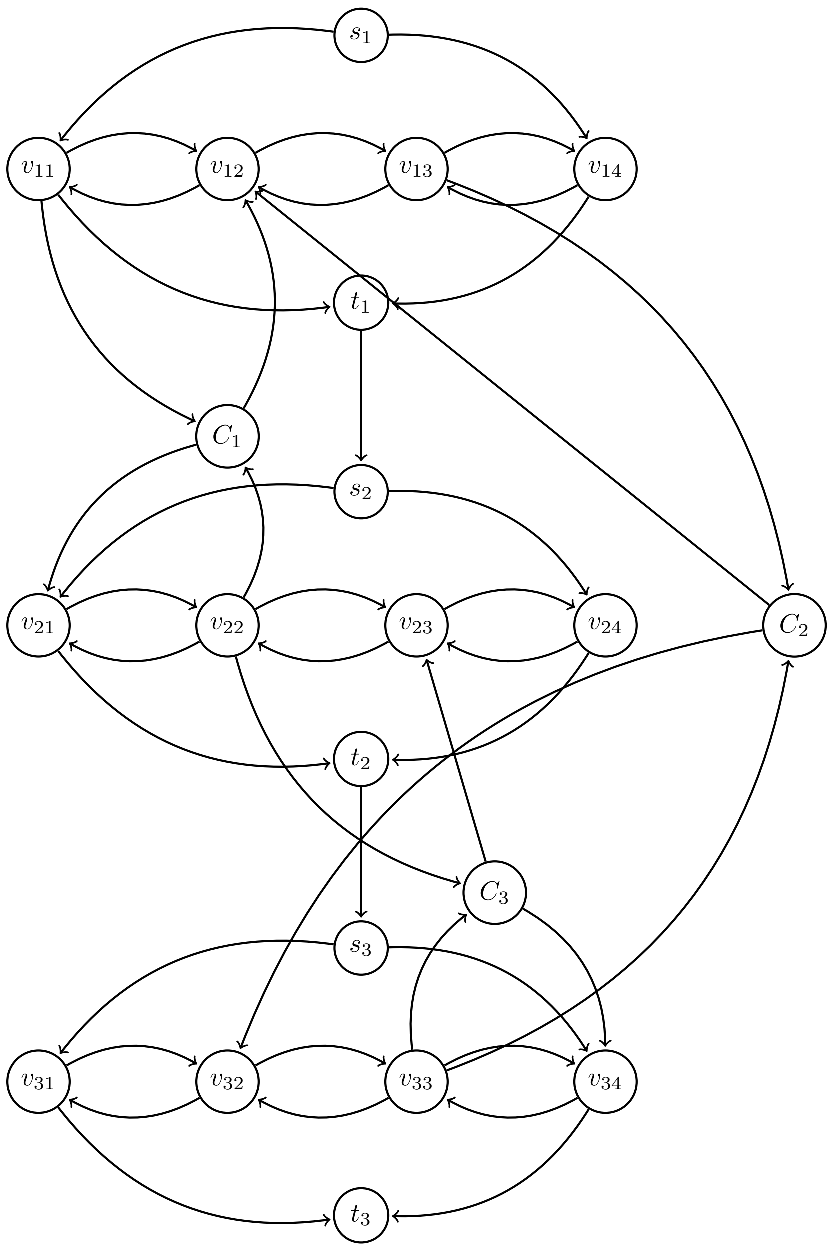
Insgesamt erhält man die 3-KNF

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} \quad = \quad & (x_1 \vee y_1 \vee z_1) \wedge (y_3 \vee y_4 \vee \bar{z}_1) \\
\wedge \quad & (x_2 \vee \bar{y}_1 \vee z_2) \wedge (y_3 \vee y_4 \vee \bar{z}_2) \\
\wedge \quad & (x_3 \vee y_2 \vee z_3) \wedge (\bar{y}_3 \vee y_4 \vee \bar{z}_3) \\
\wedge \quad & (x_4 \vee \bar{y}_2 \vee z_4) \wedge (\bar{y}_3 \vee y_4 \vee \bar{z}_4) \\
\wedge \quad & (\bar{x}_5 \vee \bar{y}_4 \vee z_5) \wedge (\bar{x}_5 \vee \bar{y}_4 \vee \bar{z}_5).
\end{aligned}$$

11 Aufgaben zur NP-Vollständigkeit

11.1

Der zu $F = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$ gehörige gerichtete Graph sieht so aus (der Übersichtlichkeit halber wurde die Kante von t_3 nach s_1 weggelassen):



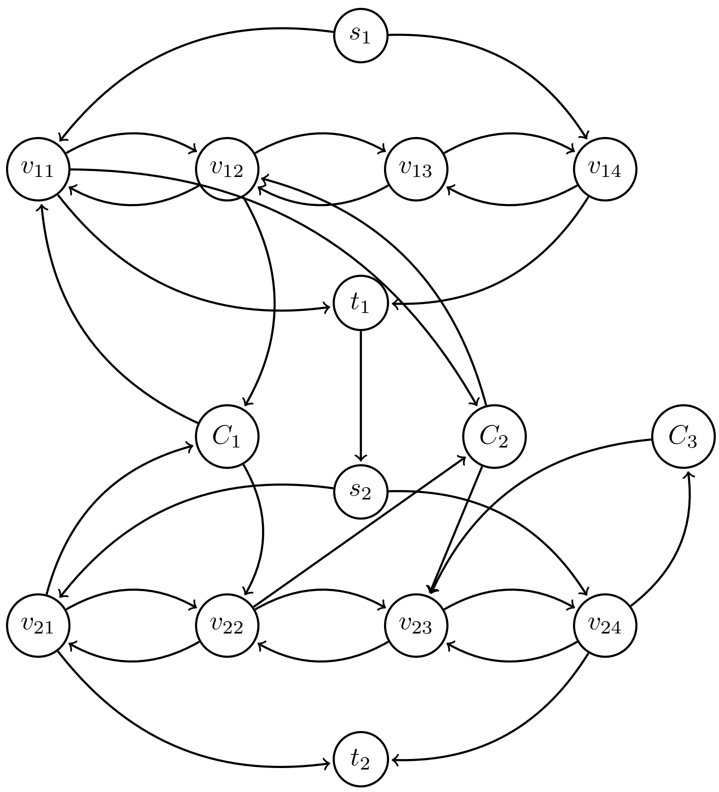
Der Graph enthält einen Hamiltonkreis H:

$$\begin{array}{lll} s_1 & \to & v_{11} \to C_1 \to v_{12} \to v_{13} \to v_{14} \to t_1 \to \\ s_2 & \to & v_{21} \to v_{22} \to C_3 \to v_{23} \to v_{24} \to t_2 \to \\ s_3 & \to & v_{34} \to v_{33} \to C_2 \to v_{32} \to v_{31} \to t_3 \to s_1 \end{array}$$

Dazu gehört die erfüllende Belegung $x_1 = \texttt{true}, x_2 = \texttt{true}, x_3 = \texttt{false}$.

11.2

Der zu $F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2)$ gehörige gerichtete Graph sieht so aus (der Übersichtlichkeit halber wurde die Kante von t_2 nach s_1 weggelassen):



C_3 ist nur erreichbar, wenn der untere Diamant von rechts nach links durchlaufen wird. Also müssen C_1 und C_2 beide vom oberen Diamanten aus erreicht werden. Um C_1 zu erreichen, muss der obere Diamant von rechts nach links durchlaufen werden, dann kann aber C_2 nicht erreicht werden. Also enthält der Graph keinen Hamiltonkreis.

Die Zahlen für das entsprechende Subset-Sum Problem sehen so aus:

Zahl	$i = 1$	$i = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
t_1	1	0	0	1	0
f_1	1	0	1	0	0
t_2	0	1	1	1	0
f_2	0	1	0	0	1
p_1	0	0	1	0	0
q_1	0	0	1	0	0
p_2	0	0	0	1	0
q_2	0	0	0	1	0
p_3	0	0	0	0	1
q_3	0	0	0	0	1
s	1	1	3	3	3

Damit die letzte Ziffer von s gleich 3 sein kann, muss offenbar gelten $f_2, p_3, q_3 \in T$. Wegen der zweiten Ziffer von s folgt daraus $t_2 \notin T$. Wegen der dritten Ziffer von s muss nun gelten $f_1, p_1, q_1 \in T$. Wegen $f_1 \in T$ und der ersten Ziffer von s folgt $t_1 \notin T$. Dann kann aber die vorletzte Ziffer von s nicht mehr drei ergeben. Das Subset-Sum-Problem ist also unlösbar.

11.3

$\pi(x_1) = y_4, \pi(x_2) = y_2, \pi(x_3) = y_1, \pi(x_4) = y_6, \pi(x_5) = y_5, \pi(x_6) = y_3$.