Lösungen der Aufgaben
Theoretische Informatik für Dummies
Teil IV - Mathematische Grundlagen

Prof. Dr. R. Schmitz*

September 2019

12 Aufgaben zu logischen Grundlagen

12.1

x	y	$\neg x$	$\neg(\neg x)$	$\neg y$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$\neg(x \vee y)$	$\neg x \wedge \neg y$	$\neg(x \wedge y)$	$\neg x \vee \neg y$
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0

12.2

Hier ist leider ein Fehler in der Aufgabenstellung passiert. Korrekterweise lautet der Modus Ponens:

$$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B.$$

Wir beweisen die Aussage, indem wir die Identität $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$ und die deMorgan'schen Regeln nutzen:

$$\begin{aligned}
((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B &= \overline{(\bar{A} \vee B) \wedge A)} \vee B \\
&= (\neg(\bar{A} \vee B) \vee \bar{A}) \vee B \\
&= (A \wedge \bar{B} \vee \bar{A}) \vee B \\
&= (A \vee \bar{A}) \wedge (B \vee \bar{B}) \\
&= \texttt{true}.
\end{aligned}$$

12.3

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ lautet die Aussage: $1^3 - 1 = 0$ ist durch 3 teilbar, was offenbar wahr ist.
- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage "$A(n) : n^3 - n$ ist durch 3 teilbar" sei wahr.

*Studiengang Medieninformatik, Hochschule der Medien Stuttgart

- Induktionsschluss: Zeige $A(n) \Rightarrow A(n+1)$: Es gilt

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(n^3 - n)$ durch 3 teilbar, also ist der gesamte Ausdruck durch 3 teilbar.

13 Aufgaben zu Mengen und Relationen

13.1

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang: Eine einelementige Teilmenge $M_1 = \{x\}$ besitzt die zwei Teilmengen $\emptyset$ und $\{x\}$.
- Induktionsvoraussetzung: Eine n-elementige Menge M_n besitze 2^n Teilmengen.
- Induktionsschluss: Wir betrachten eine $(n+1)$-elementige Menge M_{n+1}. Dann läßt sich M_{n+1} in dieser Form schreiben:

$$M_{n+1} = M_n \cup \{x\},$$

wobei M_n n Elemente besitzt und $x \notin M_n$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt M_n genau 2^n Teilmengen T_i. Jedes T_i ist natürlich auch Teilmenge von M_{n+1}. Weitere 2^n Teilmengen $U_i \subseteq M_{n+1}$ erhält man, indem man x in jedes T_i mit hinein nimmt:

$$U_i = T_i \cup \{x\}.$$

Insgesamt haben wir also $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

13.2

Die Elemente von $S \times T$ sind geordnete Paare aus Elementen von S und T:

$$S \times T = \{(x, y) | x \in S, y \in T\}.$$

Für den ersten Eintrag in jedem Paar haben wir also s Möglichkeiten, für den zweiten Eintrag t Möglichkeiten. Durch Kombination aller Möglichkeiten erhalten wir $s \cdot t$ Elemente.

13.3

Die Schlußweise aus der Aufgabenstellung

$$\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \Rightarrow (x, x) \in R$$

ist korrekt. Sie gilt aber **nur** für solche $x \in M$, die tatsächlich ein Partnerelement $y \in M$ besitzen, so dass $(x, y) \in R$. Für alle anderen $x \in M$ ist die Schlussweise nicht anwendbar und die Reflexivität muss hier eigens nachgewiesen werden.

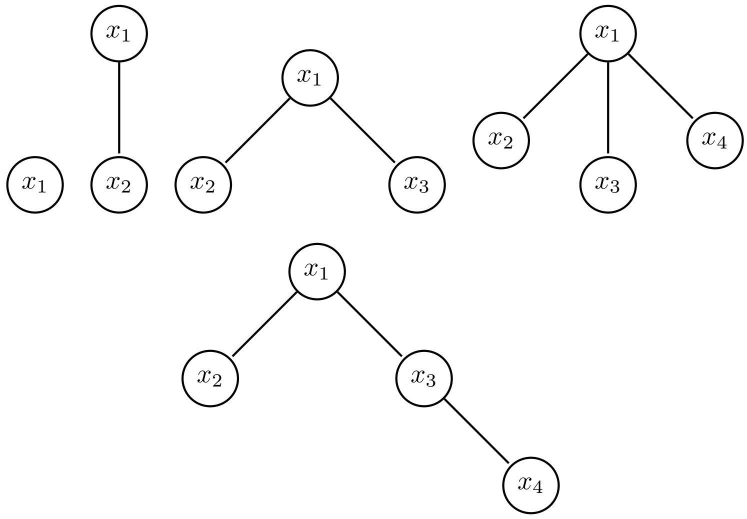


Abbildung 1: Alle Bäume mit weniger als fünf Knoten

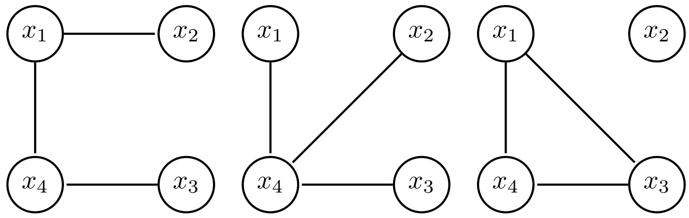
14 Aufgaben zu Graphen und Bäumen

14.1

Zeichnet man alle Bäume mit weniger als fünf Knoten, so ist die Anzahl der Kanten immer um eins kleiner als die Anzahl der Knoten. Das schränkt die Zahl der Auswahlmöglichkeiten stark ein (siehe Abbildung 14.1).

14.2

Die einfachen Graphen mit vier Knoten haben zwischen $0 \leq k \leq 6$ Kanten. Zwei Graphen können nur dann nicht isomorph sein, wenn sich ihre Knoten hinsichtlich der Knotengrade unterscheiden. Bei der Verteilung der Knotengrade auf die vier Knoten ist man durch die Bedingung $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2k$ eingeschränkt. Als Beispiel zeigt Abbildung 14.2 (bis auf Isomorphie) alle einfachen Graphen mit vier Knoten und drei Kanten.



(a) $2+2+1+1=6$ (b) $3+1+1+1=6$ (c) $2+2+2+0=6$

Abbildung 2: Alle einfachen Graphen mit vier Knoten und drei Kanten

14.3

Die maximale Weglänge in einem Graphen mit n Knoten ist $n-1$. Dementsprechend ist die maximale Länge eines Kreises n. Um zu prüfen, ob in einem gerichteten Graph G keine Kreise der Länge $1 \leq \ell \leq n$ vorhanden sind, müssen wir also nur die Potenzen A^ℓ der Adjazenzmatrix A von

G für $1 \leq \ell \leq n$ bilden. Da Kreise Knoten mit sich selbst verbinden, müssen für einen kreisfreien Graph alle Diagonalelemente dieser Matrizen Null sein.