Pendel mit harmonisch zeitabhängiger Länge

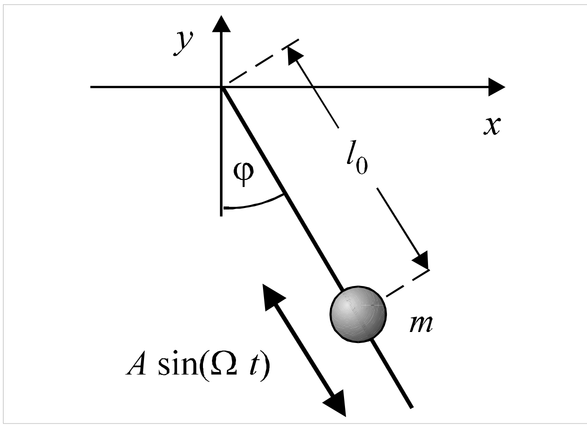

Abb. 1 Ebenes Pendel, dessen Pendellänge $l(t) = l_0 + A\sin(\Omega t)$ eine harmonische Funktion der Zeit ist.

Ein ebenes Pendel hat eine Kugel mit Masse $m > 0$ und Trägheitsmoment $I_S > 0$ (für Drehungen um ihren Schwerpunkt). Masse und Trägheitsmoment der Pendelstange werden vernachlässigt. Die Kugel wird durch einen Antrieb harmonisch auf der Pendelstange hin und her geschoben, so dass die Pendellänge lautet

$$l(t) = l_0 + A\sin(\Omega t) \qquad \text{mit} \quad l_0 \geq 0$$

Die Kugel erfährt eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft.

Das System ist für $l(t) \neq \text{const}$ **chaotisch**.

Differentialgl. (abgekürzt Dgl.)

Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = \frac{I_S}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left[l_0 + A\sin(\Omega t)\right]^2\dot{\varphi}^2 + m\,g\left[l_0 + A\sin(\Omega t)\right]\cos\varphi$$

Hinweis: Der rein zeitabhängige Term $0{,}5 \cdot m\left[A\,\Omega\cos(\Omega t)\right]^2$ wird in der Lagrangefunktion nicht aufgeführt.

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{m\,l(t)}{I_S + m\,l(t)^2}\left[2\,A\,\Omega\cos(\Omega t)\,\dot{\varphi} + g\sin\varphi\right] - c\,\dot{\varphi}$$

mit $\quad l(t) = l_0 + A\sin(\Omega t)$

Wegen $I_S > 0$ hat die Dgl. keine Singularität.

Nur für konstante Pendellänge, d. h. für $A\sin(\Omega t) = 0$ und für fehlende Reibung ist die Energie eine Erhaltungsgröße.

Numerische Lösungsverfahren

Die Dgl. wird sehr gut mit dem Standardverfahren ode45 gelöst.

Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.