Doppelpendel

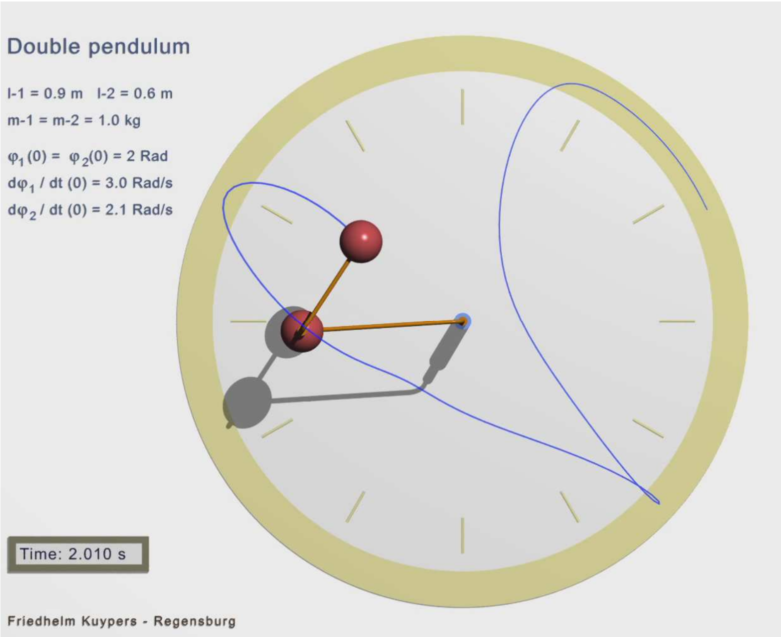

Abb. 1 Momentaufnahme der POV-Ray-Animation eines chaotischen Doppelpendels. Das äußere Pendel hinterlässt einen blauen Kondensstreifen.

Der Aufhängepunkt eines Doppelpendels macht auf der x-Achse und auf der y-Achse harmonische Schwingungen mit verschiedenen Amplituden A_x, A_y und verschiedenen Frequenzen Ω_x, Ω_y.

Die x,y-Koordinaten des Aufhängepunktes lauten:

$$x_A = A_x \cos(\Omega_x t)$$

$$y_A = A_y \cos(\Omega_y t)$$

Zur Zeit $t = 0$ hat der Aufhängepunkt daher die Koordinaten $\left(x_A, y_A\right) = \left(A_x, A_y\right)$.

Die beiden Massen erfahren geschwindigkeitsproportionale **Reibungskräfte**:

$$R_i = c_i v_i \qquad i = 1, 2$$

Die Massen der beiden Pendelstangen und die Trägheitsmomente der beiden Kugeln werden vernachlässigt.

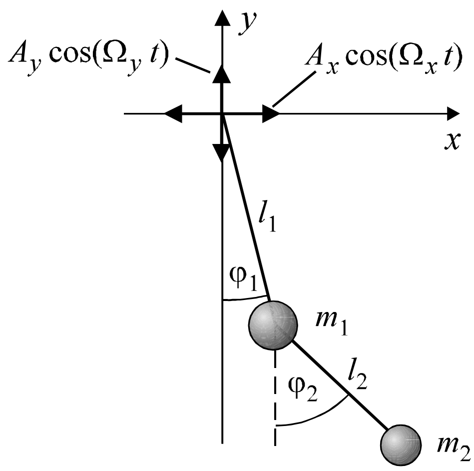

Abb. 2 Das ebene Doppelpendel schwingt mit laminarer Luftreibung. Der Aufhängepunkt kann horizontal und vertikal bewegt werden.

Das Doppelpendel mit festem Aufhängepunkt gehört zu den bekanntesten **chaotischen Systemen** der Mechanik.

Differentialgln.

Die sehr langen Dgln. für die zwei Winkel lauten:

$$l_1\,\ddot{\varphi}_1 - A_x\,\Omega_x^2\cos(\Omega_x\,t)\cos\varphi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,l_2\left[\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] +$$

$$\left[g + \frac{d^2}{dt^2}\left\{A_y\cos(\Omega_y\,t)\right\}\right]\sin\varphi_1 +$$

$$\frac{c_1+c_2}{m_1+m_2}\left(l_1\,\dot{\varphi}_1 - A_x\,\Omega_x\sin(\Omega_x\,t)\cos\varphi_1 - A_y\,\Omega_y\sin(\Omega_y\,t)\sin\varphi_1\right) +$$

$$\frac{c_2}{m_1+m_2}\,l_2\,\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) = 0$$

$$l_2\,\ddot{\varphi}_2 - A_x\,\Omega_x^2\cos(\Omega_x\,t)\cos\varphi_2 + l_1\,\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - l_1\,\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) +$$

$$\left[g + \frac{d^2}{dt^2}\left\{A_y\cos(\Omega_y\,t)\right\}\right]\sin\varphi_2 +$$

$$\frac{c_2}{m_2}\left[l_2\,\dot{\varphi}_2 - A_x\,\Omega_x\sin(\Omega_x\,t)\cos\varphi_2 - A_y\,\Omega_y\sin(\Omega_y\,t)\sin\varphi_2\right] +$$

$$\frac{c_2}{m_2}\,l_1\,\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) = 0$$

Literatur

- Das ebene Doppelpendel mit ruhendem Aufhängepunkt ($A_x = A_y = 0$) wird in dem Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Aufgabe 5–14 behandelt.