Henon-Heiles

Henon und Heiles untersuchten die **Bewegung von Sternen um das Zentrum der Milchstraße**. Sie beschränkten sich in der Untersuchung auf Bewegungen in der x,y-Ebene und verwendeten anstelle des tatsächlichen Potentials der Milchstraße ein sehr einfaches Potential, das der Aufgabenstellung angepasst war. Dieses sog. „Henon-Heiles-Potential“ [1] lautet:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \tag{1}$$

Das Henon-Heiles-System beschreibt aber auch zwei Oszillatoren, die durch drei quadratische Terme miteinander gekoppelt sind. Die Dgln. lauten für $m = 1$ und $\omega = 1$:

$$\ddot{x} = -x - 2xy \tag{2a}$$

$$\ddot{y} = -y + y^2 - x^2 \tag{2b}$$

Das System enthält keine Parameter. Die Energie ist die einzige bekannte Erhaltungsgröße.

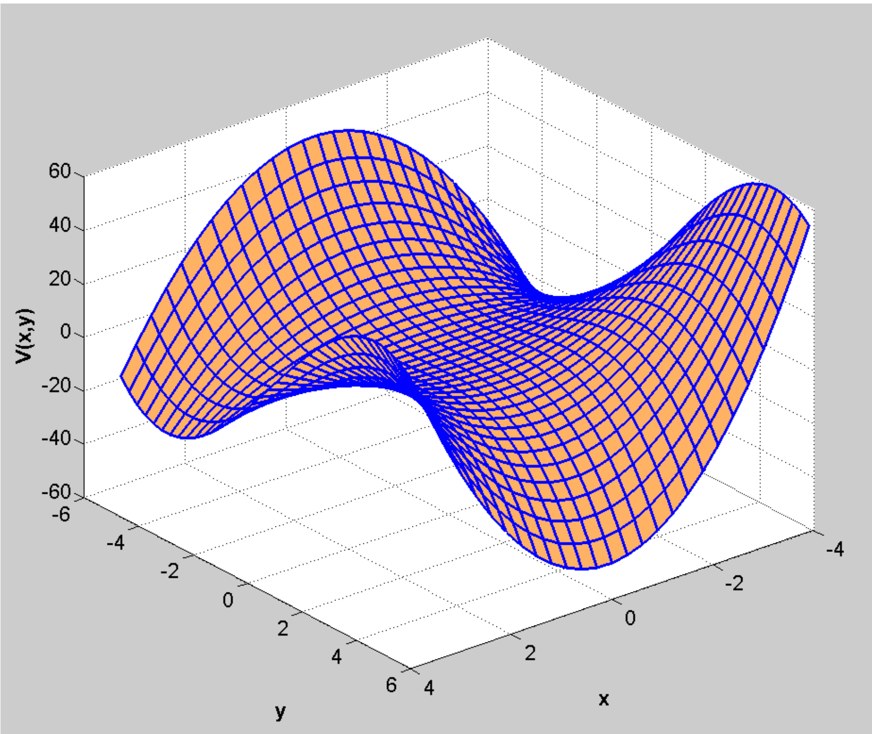

Abb. 1 Potential $V(x, y)$ des Henon-Heiles-Systems

[1] Mit den Transformationsgln. $x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta$

kann das Potential (1) in Polarkoordinaten geschrieben werden: $V(r, \vartheta) = \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}\sin(3\vartheta)$

Das Potential hat die drei Sattelpunkte

$$(0,1) \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

und ein lokales Minimum bei

$$(0, 0)$$

In den 4 genannten Punkten ist

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

so dass diese 4 Punkte stationäre Punkte sind. Nur das Minimum ist ein stabiler Punkt.

In den drei Sattelpunkten ist das Potential $V = 1/6$.

Nur für Energien $E \le 1/6$ sind die Bahnen finit, d. h. gebunden; sie verlaufen in der x,y-Ebene innerhalb des Dreieckes, dessen Eckpunkte mit den drei Sattelpunkten zusammenfallen.

Für größere Energien gibt es neben regelmäßigen Bahnen auch **chaotische Bahnen**.

Literatur

- Goldstein/Poole/Safko: Klassische Mechanik, Wiley-VCH-Verlag
- H. Iro: Klassische Mechanik, Universitätsverlag Rudolf Trauner