Zentralkraft

Ein **punktförmiger** Körper mit der Masse m bewegt sich in einem Zentralkraftfeld mit dem Potential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^3}$$

Dieses Potential kann bei genaueren Berechnungen von Planetenbahnen und Satellitenbahnen verwendet werden. Seine drei Anteile sind wie folgt begründet:

- Der dominante erste Term ist das bekannte Kepler-Potential $V(r) = -\alpha/r$. Es beschreibt die Anziehungskraft einer kugelförmigen Sonne auf die Planeten oder einer kugelförmigen Erde auf die Satelliten. Dieser Term führt zu elliptischen Planeten- bzw. Satellitenbahnen ohne Periheldrehung.
- Jeder Planet wird nicht nur von der Sonne, sondern in weit geringerem Maß auch von den anderen Planeten angezogen. Die relativ schwache Wechselwirkung zwischen den Planeten verursacht ein kleines zusätzliches Potential der Form β/r^2.

  Auch die Allgemeine Relativitätstheorie ist für ein kleines Zusatzpotential $V \sim 1/r^2$ verantwortlich.
- Sonne und Erde sind nicht genau kugelförmig, sondern leicht abgeplattet. Diese Abplattung ruft ein weiteres kleines Zusatzpotential der Form γ/r^3 hervor.

Für $\beta \neq 0$ oder für $\gamma \neq 0$ treten **Periheldrehungen** auf. Die gegenseitige Wechselwirkung der Planeten, die Allgemeine Relativitätstheorie und die leichte Abplattung der Sonne sind daher für kleine Periheldrehungen der Planetenbahnen verantwortlich. Die Abplattung der Erde führt auf kleine Periheldrehungen der Satellitenbahnen. In unserem Sonnensystem hat der innerste Planet Merkur die größte Periheldrehung. Sie beträgt nur 574 sec / Jahrhundert.

Bewegungen in Zentralkraftfeldern sind immer *ebene Bewegungen* und werden daher am besten mit den Polarkoordinaten φ, r beschrieben.

Bei fehlender Dämpfung sind die Energie und der Drehimpuls p_φ für alle Zentralkraftfelder Erhaltungsgrößen. Da die Zahl 2 der Erhaltungsgrößen gleich der Zahl 2 der Freiheitsgrade ist, sind Bewegungen in Zentralkraftfelder *nicht chaotisch*.

In unserem Modell wird noch eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft ermöglicht, die proportional zu einem Parameter c ist. Bei vorhandener Reibung stürzt das Teilchen in das Zentrum des Zentralkraftfeldes.

Differentialgln.

Die Dgln. für den Winkel φ und den Bahnradius r lauten:

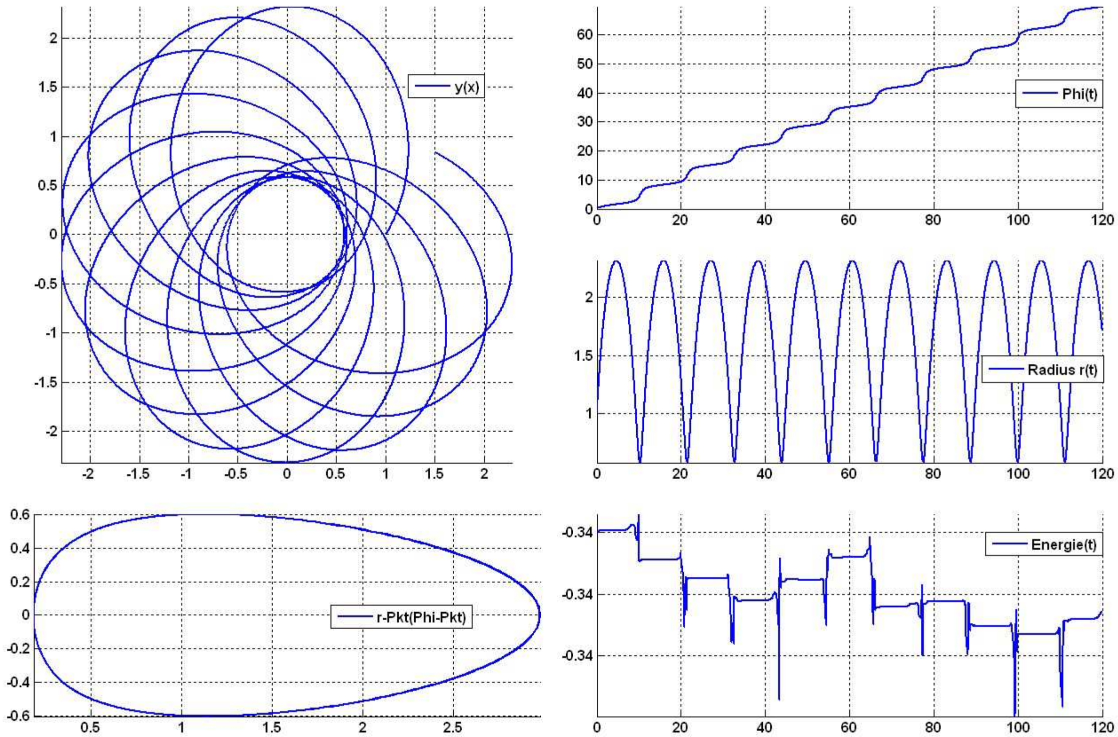

Abb. 1 Numerisch berechnete Planetenbahn mit Periheldrehung. Die Energie ist in den angegebenen Nachkommastellen konstant.

Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi_0 = 0 \qquad \dot{\varphi}_0 = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad r_0 = 1\ \text{m} \qquad \dot{r}_0 = 0.6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = 1\ \text{kg} \qquad \alpha = 1\ \text{N m}^2 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = -\,0.02\ \text{N m}^4$$

$$\ddot{\varphi} = -\,2\,\frac{\dot{\varphi}\,\dot{r}}{r}$$

$$\ddot{r} = r\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{m\,r^2} + \frac{2\,\beta}{m\,r^3} + \frac{3\,\gamma}{m\,r^4}$$

Literatur

Zentralkraftbewegungen im Potential $V(r) = -\,\alpha/r$ werden in allen Lehrbüchern behandelt. Einige Berechnungen und Angaben zu Periheldrehungen sind in folgenden Lehrbüchern zu finden:

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Beispiel 11.4–1 und Aufgabe 11–5.
- R. J. Jelitto, *Theoretische Physik* 2, Aula-Verlag