Einkaufswagen

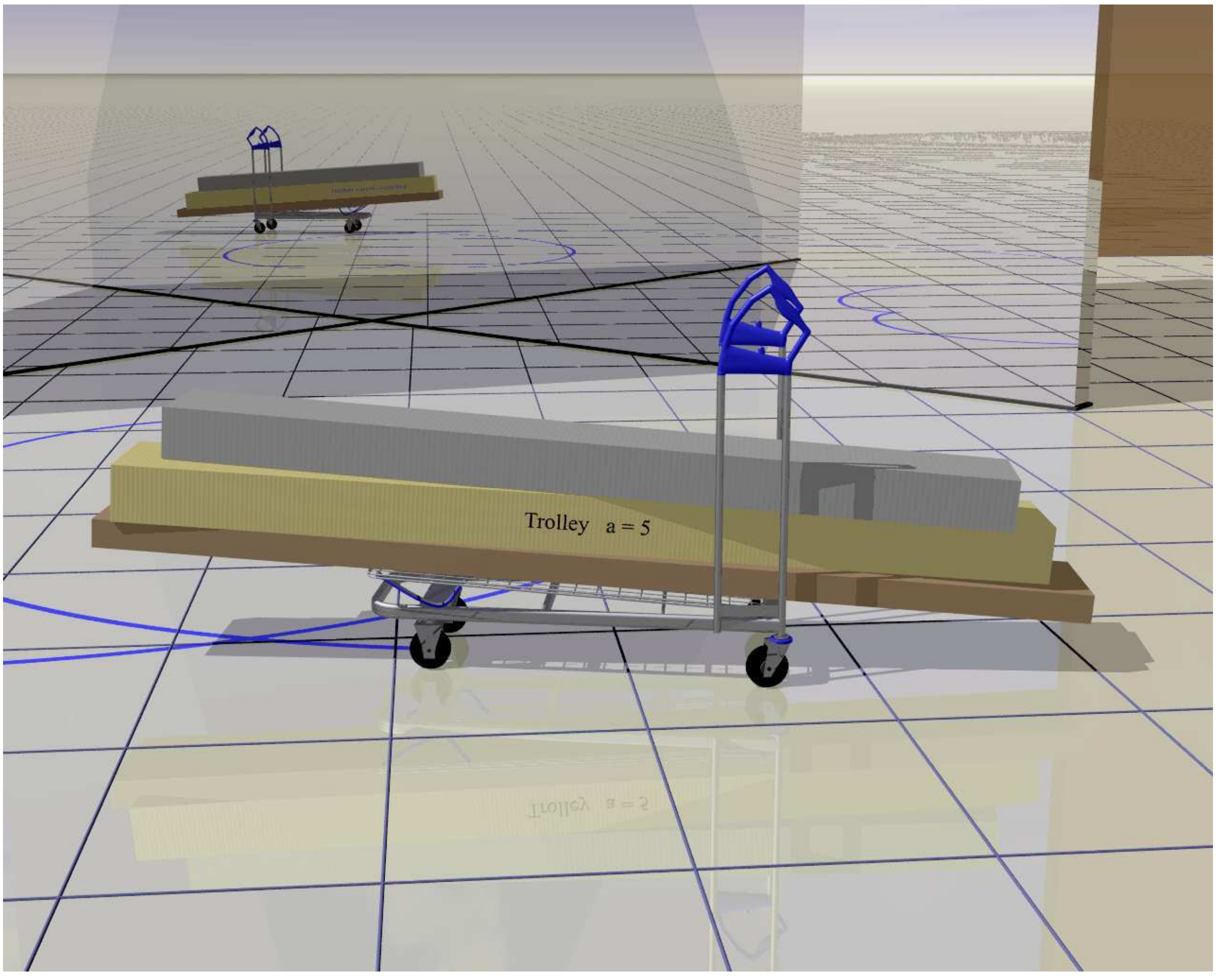

Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Der Einkaufswagen rollt vor zwei Spiegeln, die einen Winkel von 90° einschließen. Zeitweise sind drei Spiegelbilder gleichzeitig sichtbar. Das linke und das rechte Spiegelbild – hier nicht sichtbar – entstehen durch einfache Spiegelungen am linken und am rechten Spiegel; der Drehsinn der beiden Spiegelbilder ist entgegengesetzt zum Drehsinn des Wagens. Das dritte Spiegelbild – hier alleine sichtbar – hat den gleichen Drehsinn wie der Einkaufswagen und wird daher durch zwei aufeinander folgende Spiegelungen erzeugt – eine am rechten und eine am linken Spiegel.

Ein Einkaufswagen rollt **ohne menschliche Führung**, **ohne Schlupf** und mit **konstanter kinetischer Energie** über den horizontalen, ebenen Boden. Beachte, dass unser Einkaufswagen – im Gegensatz zu den meisten Einkaufswagen – **vorne eine fest eingebaute Achse** hat. Die vorderen Räder können sich nur um diese horizontale, körperfeste Achse drehen; sie können nicht – wie die hinteren beiden Räder, die in Abb. 1 unter den blauen Handgriffen liegen – um eine vertikale Lenkachse schwenken (siehe Abb. 2). Daher kann sich der Punkt A auf der Achse nur parallel zur Längsachse des Einkaufswagens bewegen.

Unser Einkaufswagen wird also wie ein Mähdrescher gelenkt. Diese große Erntemaschine hat vorne zwei große angetriebene Räder und hinten zwei kleine Räder, mit denen gelenkt wird.

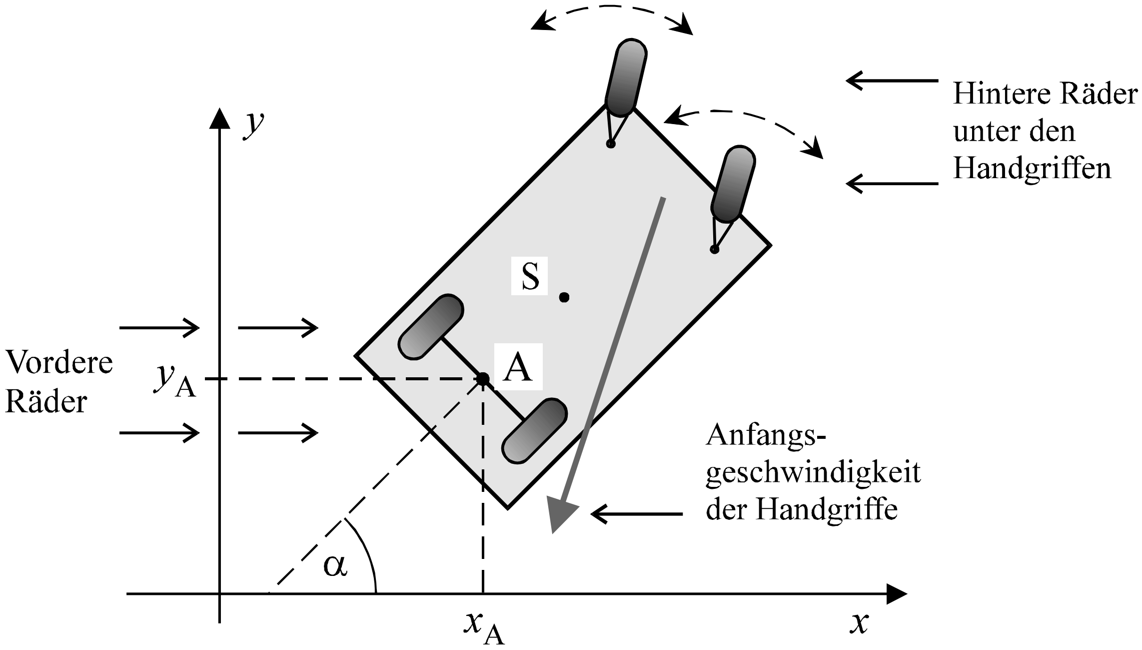

Abb. 2 Aufsicht: Der dargestellte Einkaufswagen mit nicht schwenkbaren Vorderrädern wird so angestoßen, dass die Anfangsgeschwindigkeit der Handgriffe, die über den hinteren Rädern liegen, nicht parallel ist zur Längsachse des Wagens. Dadurch gerät der Einkaufswagen in Rotation und läuft auf einer herzförmigen Kurve.

MECHANICUS berechnet die Bewegung des Punktes A in der Mitte der Achse und den Zeitverlauf des Richtungswinkels $\alpha(t)$.

Besonderheiten des Systems

Wenn man den Wagen – mit den vorderen, auf der körperfesten Achse montierten Rädern voran – *etwas schräg anstößt* (wie in Abb. 2 übertrieben dargestellt), so dass *die Anfangsgeschwindigkeit der Handgriffe nicht genau parallel ist zur Längsachse des Wagens*, so gerät der Einkaufswagen in Rotation, weil der Schwerpunkt S geradeaus weiter laufen möchte, die Vorderräder den Wagen aber parallel zur Längsachse des Wagens führen. Der Einkaufswagen durchläuft „herzförmige“ Kurven und nähert sich nach einigen Drehungen, deren Zahl höchstens gleich

$$\frac{1}{2}a := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I_A}{m l^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I_S}{m l^2}+1} \qquad \text{mit } I_A = \text{Trägheitsmoment für Drehungen um A}$$

ist, asymptotisch wieder einer Geraden an, auf der jetzt aber die *hinteren*, *seitlich schwenkbaren Räder voran* laufen. Die Kurven in Abb. 3 zeigen die Bewegungen des Achsenmittelpunktes A bei drei verschiedenen Beladungen des Wagens, also bei drei verschiedenen Parametern

$$a = \sqrt{I_A/(m l^2)}\,.$$

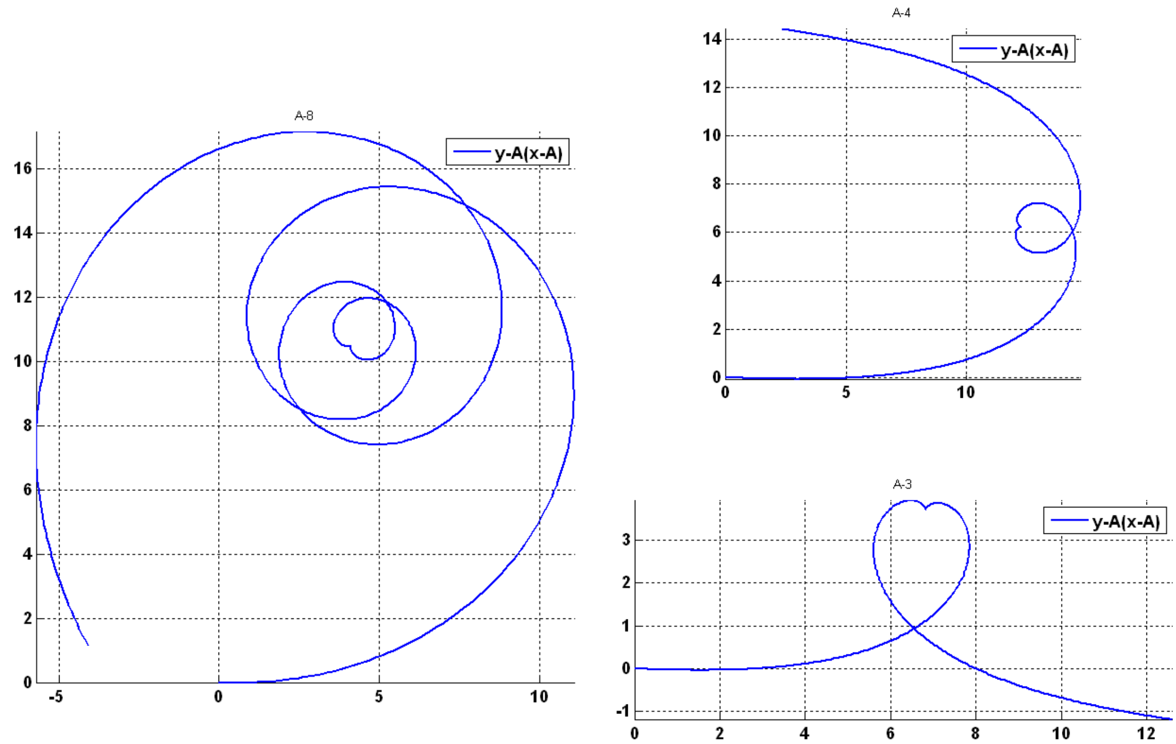

Abb. 3 Die Kurven zeigen die numerisch berechnete Bewegung $y_A(x_A)$ des Punktes A auf der Achse für die drei Parameter

$$a := \sqrt{\frac{I_A}{m\,l^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Steiner}}}{=} \sqrt{\frac{I_S}{m\,l^2} + 1} = 10 \;;\; 4 \;;\; 3$$

Dabei sind I_A bzw. I_S die Trägheitsmomente für Drehungen um die vertikale Hochachse, die durch den Achsen-Punkt A bzw. den Schwerpunkt S läuft. Die Kurven $y_A(x_A)$ werden bei der Animation auf den Fußboden gezeichnet.

Die Anfangsbedingungen wurden so gewählt, dass der Wagen anfangs mit den Vorderrädern voran *nahezu auf einer Geraden* läuft. Da der Schwerpunkt geradeaus laufen möchte, weicht der Wagen langsam von der (nahezu) geradlinigen Bewegung ab und nähert sich asymptotisch wieder einer Geraden, nachdem der Punkt A auf der Achse eine herzförmige Kurve gefahren ist und sich dabei um den Winkel $\pi\, a$ gedreht hat. Am Ende laufen die hinteren, seitlich schwenkbaren Räder voran.

Literatur

Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 9-14.

Hinweis: Die in Abb. 4 dargestellten Winkel β_1 und β_2 der Lenkräder werden nur für die Animation benötigt. Sie müssen bei gegebener Bewegung des Einkaufswagens durch die Lösung von sog. „Verfolgungskurven" ermittelt werden. Diese Dgln. werden aber von MECHANICUS nicht gelöst, da die beiden Winkel auch wie folgt in guter Näherung berechnet werden können, wenn die beiden Lenkräder dicht neben ihren vertikalen Lenkachsen 1 und 2 liegen.

Die Ortsvektoren der beiden Lenkachsen 1 und 2 lauten:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_A + L\cos\alpha - \frac{b}{2}\sin\alpha \\ y_A + L\sin\alpha + \frac{b}{2}\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_A + L\cos\alpha + \frac{b}{2}\sin\alpha \\ y_A + L\sin\alpha - \frac{b}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_A - L\dot{\alpha}\sin\alpha - \frac{b}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \dot{y}_A + L\dot{\alpha}\cos\alpha - \frac{b}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \dot{x}_A - L\dot{\alpha}\sin\alpha + \frac{b}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \dot{y}_A + L\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{b}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha \end{pmatrix}$$

mit L = Abstand der Lenkachsen 1 und 2 von der fest eingebauten Achse mit dem Mittelpunkt A.
b = Gegenseitiger Abstand der beiden Lenkachsen 1 und 2.

Mit der Nebenbedingung $\dot{y}_A = \dot{x}_A \tan\alpha$ folgt:

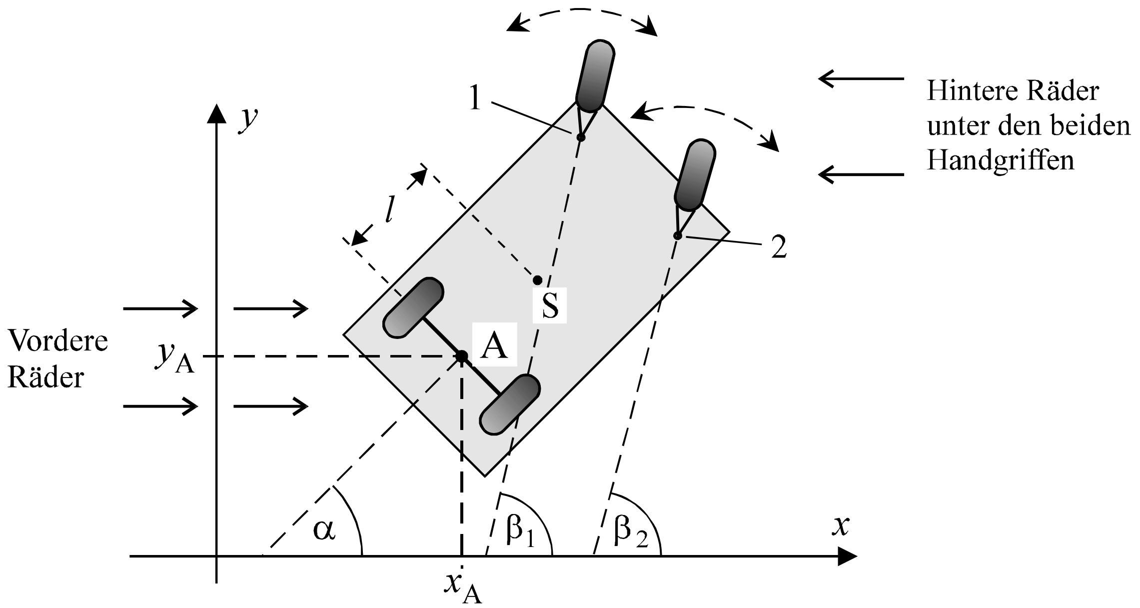

Abb. 4 Aufsicht auf einen Einkaufswagen. Neben den berechneten Variablen x_A, y_A, α werden die Lenkwinkel β_1, β_2 mit den Lenkachsen 1 und 2 dargestellt. Die Handgriffe zum Lenken des Wagens befinden sich über den Lenkachsen.

Beachte, dass sich die beiden vorderen Räder (links unten) nur um die gemeinsame, fest eingebaute Achse drehen können, nicht aber um eine vertikale Hochachse.

$$\beta_1 = \arctan \frac{v_{1;y}}{v_{1;x}} = \arctan \frac{\dot{x}_A \tan\alpha + \dot{\alpha}\left(L\cos\alpha - \frac{b}{2}\sin\alpha\right)}{\dot{x}_A - \dot{\alpha}\left(L\sin\alpha + \frac{b}{2}\cos\alpha\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \beta_2 = \arctan \frac{v_{2;y}}{v_{2;x}} = \arctan \frac{\dot{x}_A \tan\alpha + \dot{\alpha}\left(L\cos\alpha + \frac{b}{2}\sin\alpha\right)}{\dot{x}_A - \dot{\alpha}\left(L\sin\alpha - \frac{b}{2}\cos\alpha\right)}$$

Für $v_{1,x} < 0$ wird der Lenkwinkel β_1 wie folgt korrigiert:

- Für $\dot{\alpha} > 0$ (Wagen fährt Linkskurve) wird β_1 um π erhöht.
- Für $\dot{\alpha} < 0$ (Wagen fährt Rechtskurve) wird β_1 um π verkleinert.

Der zweite Lenkwinkel β_2 wird entsprechend korrigiert. Nach diesen Korrekturen machen die beiden Funktionen β_1, β_2 Sprünge um 2π, die für die Animation bedeutungslos sind.