Schwingende Doppelmulde

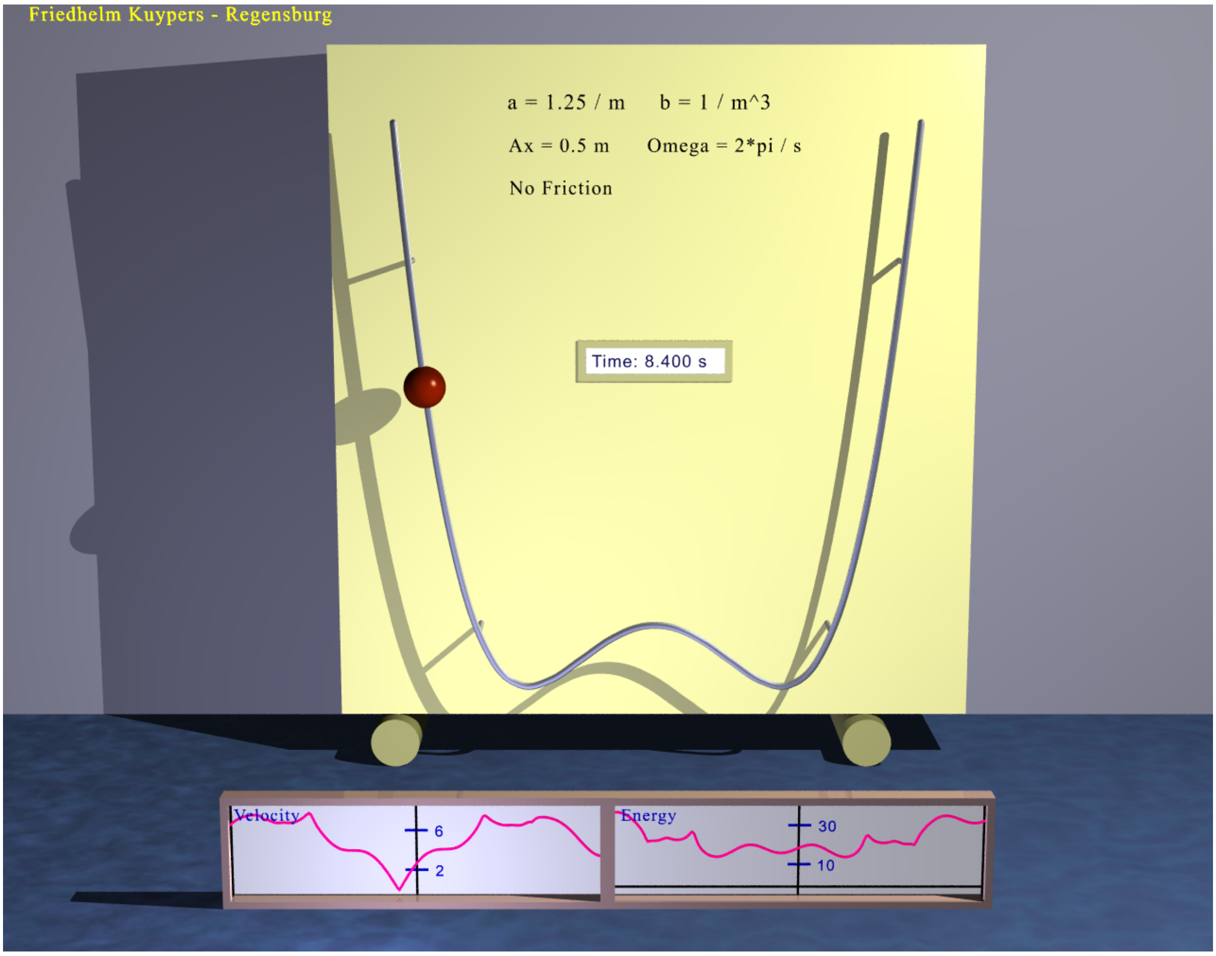

Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Links unten wird die inertiale Geschwindigkeit der Perle in der Einheit $\mathrm{m/s}$ und rechts unten wird die Energie der Perle in der Einheit J gezeichnet.

Auf einem glatten Draht, der gemäß

$$y(x) = -a\,x^2 + b\,x^4$$

gebogen ist, gleitet eine Perle der Masse m hin und her. **Zwischen der Perle und dem glatten Draht besteht keine Reibung.** Für $a, b > 0$ hat der Draht im Koordinatenursprung ein relatives Maximum und bei

$$x_{\min} = \pm\sqrt{\frac{a}{2\,b}} \qquad \text{für } a, b > 0$$

zwei absolute Minima mit der Höhe

$$y_{\min} = y\left(x_{\min}\right) = -\frac{a^2}{4\,b} \qquad \text{für } a, b > 0$$

Der Draht ist auf einem Wagen befestigt, der harmonisch mit

$$x_{\text{Wagen}} = A \sin(\Omega t)$$

hin und her bewegt wird.

Die Perle erfährt **in der Luft eine Reibungskraft** proportional zu ihrer Geschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante ist c.

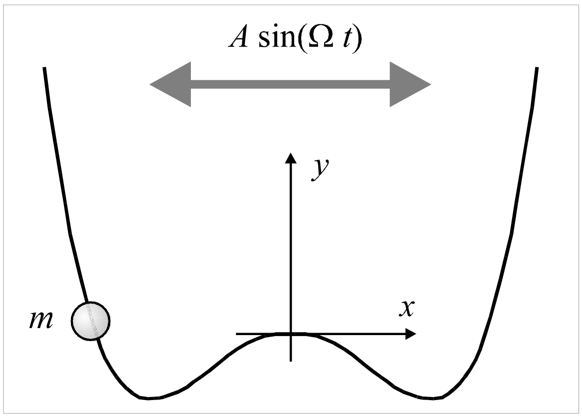

Abb. 2 Auf einem gebogenen, glatten Draht, der harmonisch hin und her bewegt wird, gleitet eine Perle der Masse m.

Differentialgl. (abgekürzt Dgl.)

Die x,y-Koordinaten sind fest mit dem gebogenem Draht verbunden (siehe Abb. 2). Wir wählen die x-Koordinate als unabhängige Koordinate. Die inertialen Koordinaten der Perle lauten:

$$x_{\text{I}} = x + A \sin(\Omega t) \qquad y_{\text{I}} = -a\, x^2 + b\, x^4$$

Dann ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + 2 A \Omega\, \dot{x} \cos(\Omega t) + 4 a^2 x^2 \dot{x}^2 + 16 b^2 x^6 \dot{x}^2 - 16\, a\, b\, x^4 \dot{x}^2\right]$$

$$+ m g \left(a x^2 - b x^4\right)$$

Die Dgl. für die x-Koordinate der Perle auf dem Draht lautet:

$$\ddot{x} = \frac{1}{1 + x^2 \left(2a - 4 b x^2\right)^2} * \ldots$$

$$\left[A_x \Omega^2 \sin(\Omega t) + 4 x \dot{x}^2 \left(a^2 - 8 a b x^2 + 12 b^2 x^4\right) + 2 g x \left(a - 2 b x^2\right) - \frac{c}{m} A_x \Omega \cos(\Omega t)\right]$$

$$- \frac{c}{m}\dot{x}$$

Die starken Schwankungen der Energie (siehe die rechte untere Kurve in Abb. 3) können wie folgt erklärt werden: Die Kraft $\mathbf{F}_{\text{Draht}}$ des Drahtes auf die Perle steht wegen der verschwindenden Gleitreibungskraft immer genau senkrecht auf dem Draht. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{Perle}}$ der Perle im Inertialsystem setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit relativ zum Draht – sie steht senkrecht auf $\mathbf{F}_{\text{Draht}}$ – und aus der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{Draht}} = A \Omega\, \mathbf{e}_x \cos(\Omega t)$$

des Drahtes. Folglich erbringt der Draht an der Perle die Leistung

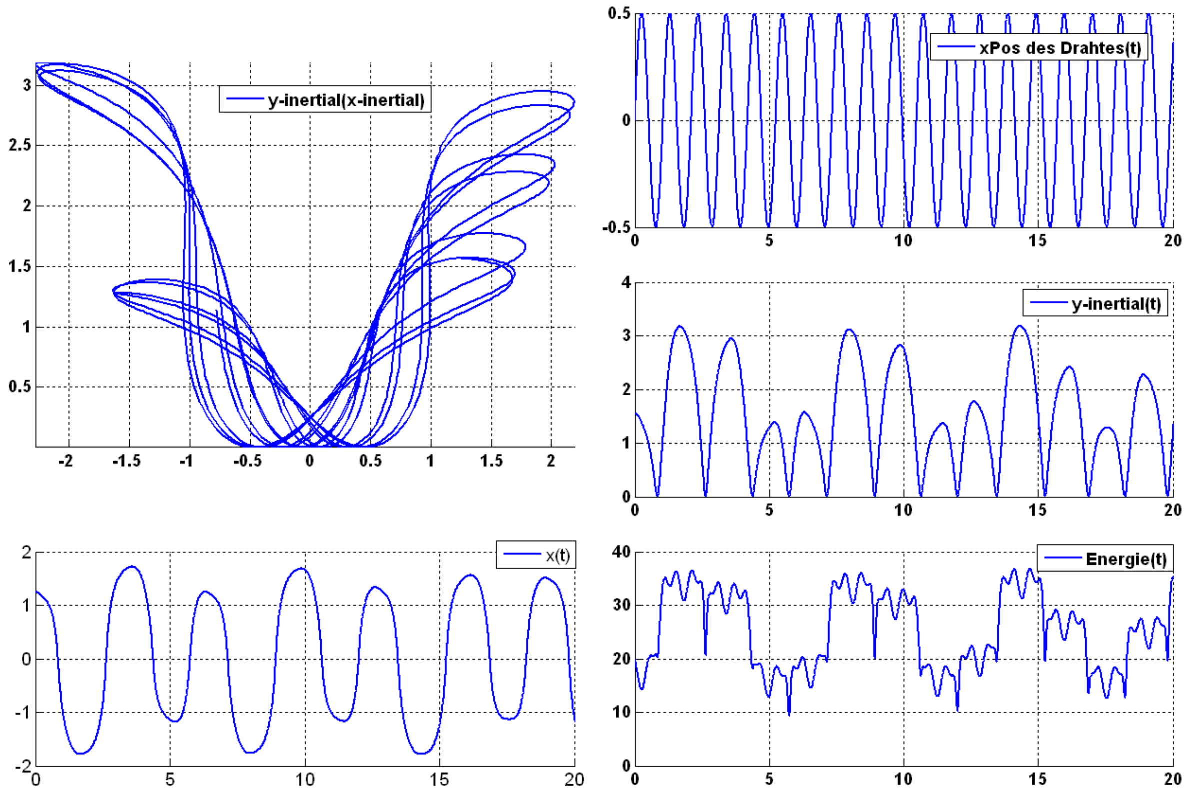

Abb. 3 Diese Kurven beschreiben die reibungsfreie Bewegung einer Perle auf einem Draht, der wegen $a < 0$, $b = 0$ *parabelförmig* gebogen ist. Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$x_0 \; = \; 1{,}25 \text{ m} \qquad \dot{x}_0 \; = \; 0$$

$$m = 1 \text{ kg} \qquad a = -1\,\frac{1}{\text{m}} \qquad b = 0 \qquad \text{Reibung } c = 0 \qquad A_x = 0{,}5 \text{ m} \qquad \Omega = 6\,\frac{1}{\text{s}}$$

$$P(t) \; = \; \mathbf{F}_{\text{Draht}} \cdot \mathbf{v}_{\text{Perle}} \; = \; \mathbf{F}_{\text{Draht}} \cdot \mathbf{v}_{\text{Draht}}$$

In Abb. 4 ist die Leistung in Punkt A der Bewegung negativ und in Punkt B positiv.

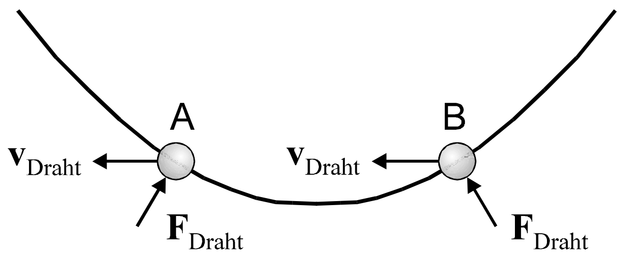

Abb. 4 In der hier dargestellten Momentaufnahme bewegt sich der Draht mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{Draht}}$ nach links. Die Kraft des glatten Drahtes auf die Perle steht immer senkrecht auf dem Draht.

In der Position A ist $\mathbf{F}_{\text{Draht}} \cdot \mathbf{v}_{\text{Draht}} < 0$, so dass die Energie der Perle abnimmt.

In der Position B hingegen überträgt der Draht wegen $\mathbf{F}_{\text{Draht}} \cdot \mathbf{v}_{\text{Draht}} > 0$ Energie auf die Perle.

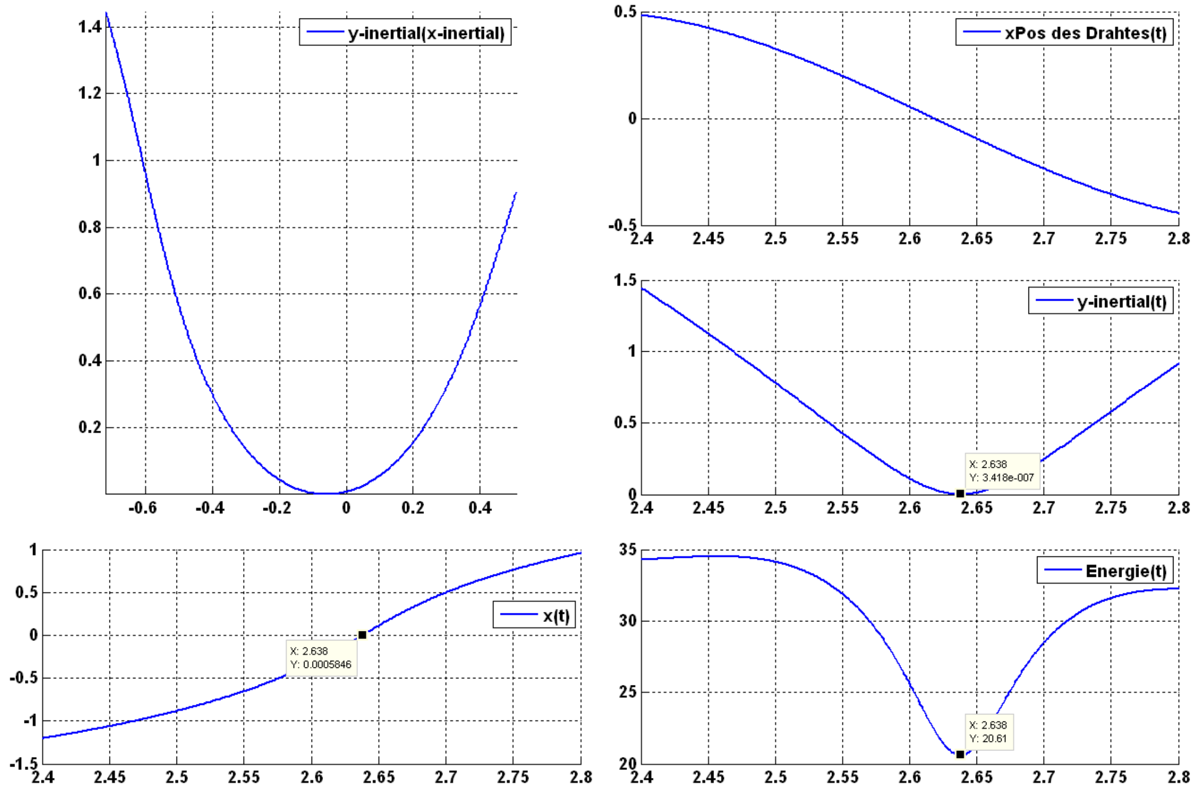

Abb. 5 Hier werden die Kurven in Abb. 3 nur in dem kleinen Zeitintervall $t \in [2{,}4\,\mathrm{s}\;;\;2{,}8\,\mathrm{s}]$ betrachtet. Folgende Erkenntnisse werden mit Hilfe der Kurven gewonnen:

- Nach der rechten oberen Kurve bewegt sich der Draht im gesamten Zeitintervall nach links.
- Nach den rechten mittleren Kurve $y_\mathrm{I}(t)$ und der unteren linken Kurve $x(t)$ gleitet die Perle anfangs die linke Seite des parabelförmig gebogenen Drahtes herab und verliert dabei Energie. Zur Zeit $t = 2{,}638\,\mathrm{s}$ durchläuft die Perle den Scheitelpunkt des Drahtes. Anschließend gleitet die Perle die rechte Seite des Drahtes hinauf und gewinnt Energie.

Ursache für die Energieschwankungen kann nur die Bewegung des Drahtes sein. Der Motor, der den Draht harmonisch hin und her bewegt, nimmt anfangs Energie auf und gibt anschließend wieder Energie an die Perle zurück. Weitere Erläuterungen sind unter Abb. 4 zu finden.

Literatur

- Literatur ist mir nicht bekannt.