Sphärisches Pendel

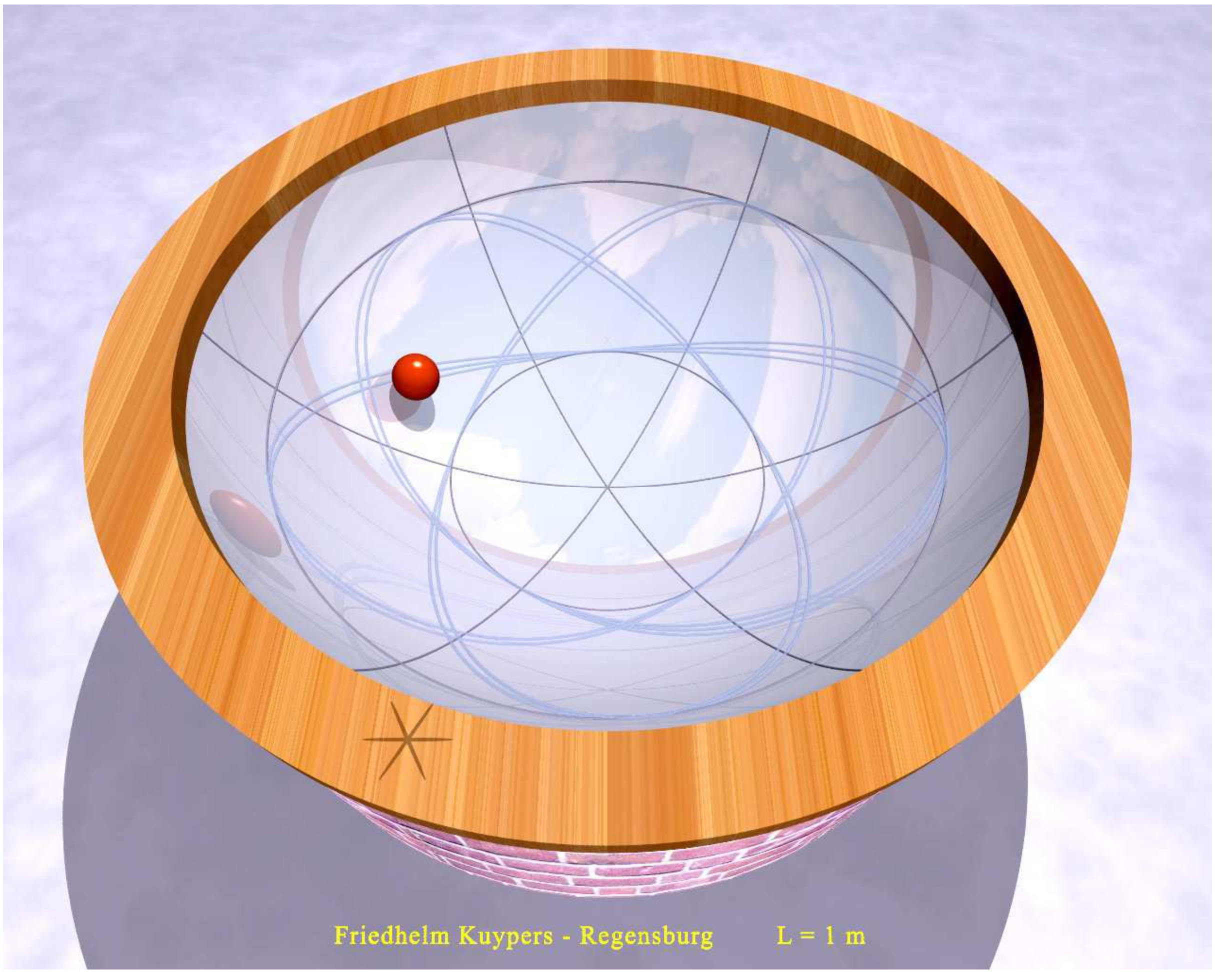

Abb. 1 Einzelbild einer **POV-Ray-Animation**. Eine Kugel mit vernachlässigbarem Trägheitsmoment pendelt ohne Energieverluste an einer masselosen Stange mit Länge $l = 1\,\mathrm{m}$. Die Pendelstange wird nicht dargestellt.

Offensichtlich verläuft die Bahnkurve zwischen einem oberen und einem unteren Grenzkreis.

Ein **reibungsfreies** sphärisches Pendel (Kugelpendel) kann in alle Richtungen schwingen und hängt **o**ben an einer Decke, die harmonisch mit

$$A_\mathrm{o} \cos(\Omega_\mathrm{o}\, t)$$

auf und ab geführt werden kann (siehe Abb. 2). Der Faden wird weiter **u**nten reibungsfrei durch eine Öse geführt, die mit

$$A_\mathrm{u} \cos(\Omega_\mathrm{u}\, t)$$

ebenfalls harmonisch auf und ab bewegt werden kann. Für $A_\mathrm{o} = A_\mathrm{u} = 0$ ergibt sich das normale sphärische Pendel.

Die **Pendellänge** $l(t)$, d. h. die Länge des schwingenden Fadenteils **unterhalb der Öse** lautet

$$l(t) = l_{\text{Faden}} - A_o \cos\left(\Omega_o\, t\right) + A_u \cos\left(\Omega_u\, t\right)$$

Dabei ist l_{Faden} die Fadenlänge, die in MECHANICUS vor numerischen Berechnungen als Parameter eingegeben wird. Für $A_o = A_u = 0$ ist $l(t) = l_{\text{Faden}}$.

In den Animationen hat der Abstand s_{bel} von der Mittellage der schwingenden Decke zur Mittellage der schwingenden Öse hat keinen Einfluss auf die Bewegung und kann daher beliebig gewählt werden, solange kein Zusammenstoss zwischen Decke und Öse erfolgt.

Der **Koordinatenursprung liegt in der Mittellage der schwingenden Öse**. Daher haben Öse, Pendelmasse und Decke folgende z-Koordinaten:

$$z_{\text{Öse}}(t) = A_u \cos(\Omega_u\, t)$$

$$z_{\text{Masse}}(t) = A_u \cos(\Omega_u\, t) - l(t) \cos\vartheta$$

$$z_{\text{Decke}}(t) = s_{\text{bel}} + A_o \cos(\Omega_o\, t)$$

Die drei kartesischen Koordinaten der schwingenden Masse sind in MECHANICUS die ersten drei Zusatzfunktionen.

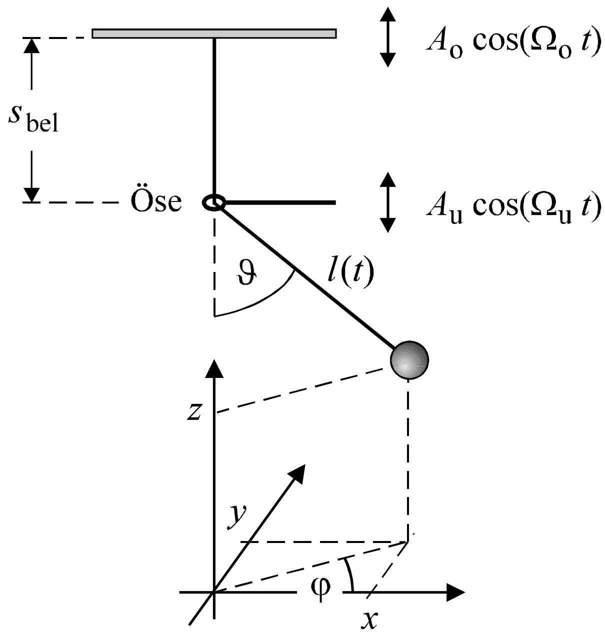

Abb. 2 Das sphärische Pendel kann in alle Richtungen schwingen und hat die beiden unabhängigen Kugelkoordinaten φ, ϑ.

Beachte, dass die x,y-Ebene hier aus zeichnerischen Gründen nach unten verschoben wurde.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die Dgln. für die beiden Kugelkoordinaten φ, ϑ lauten:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\,\dot{\varphi}}{l \sin\vartheta}\left(\dot{l} \sin\vartheta + l\,\dot{\vartheta} \cos\vartheta\right) \tag{1}$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{1}{l}\left[2\,\dot{l}\,\dot{\vartheta} - l\,\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + g \sin\vartheta - A_u\,\Omega_u^2 \sin\vartheta \cos\left(\Omega_u\, t\right)\right] \tag{2}$$

Dabei ist – wie oben bereits geschrieben –

$$l(t) = l_{\text{Faden}} - A_o \cos(\Omega_o\, t) + A_u \cos(\Omega_u\, t)$$

die zeitabhängige Pendellänge, d. h. die Länge des schwingenden Fadenteils zwischen der Öse und der schwingenden Masse.

Die Dgln. haben Singularitäten für $l = 0$ und für $\vartheta = 0$.

Nach Gl. (1) ist der Drehimpuls

$$p_\varphi = m\,l^2\,\dot{\varphi}\sin^2\vartheta$$

eine Erhaltungsgröße. Auflösung nach $\dot{\varphi}$ und Einsetzen in die zweite Gl. ergibt eine zeitabhängige Dgl. 2. Ordnung für den Winkel ϑ.

Besonderheiten des Systems

Die Bahnkurve verläuft zwischen einem oberen und einem unteren Grenzkreis.

Animation

Für $A_\mathrm{u} = A_\mathrm{o} = 0$ läuft in der POV-Ray-Animation eine Kugel in einer kugelförmigen Schale.

Literatur

Literatur für das System mit $A_\mathrm{o} \neq 0$ oder $A_\mathrm{u} \neq 0$ ist mir nicht bekannt.

- Für $A_\mathrm{u} = A_\mathrm{o} = 0$ ergibt sich das bekannte, „normale“ sphärische Pendel mit konstanter Fadenlänge. Es wird in vielen Büchern kurz behandelt, z. B. in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Aufgabe 5–9.
- In dem älteren Lehrbuch „Helmut Volz: Theoretische Mechanik I“, 1971, Seite 120 ff. wird die Bahn des normalen Kugelpendels ausführlich diskutiert.