Ball rollt in vertikalem Rohr

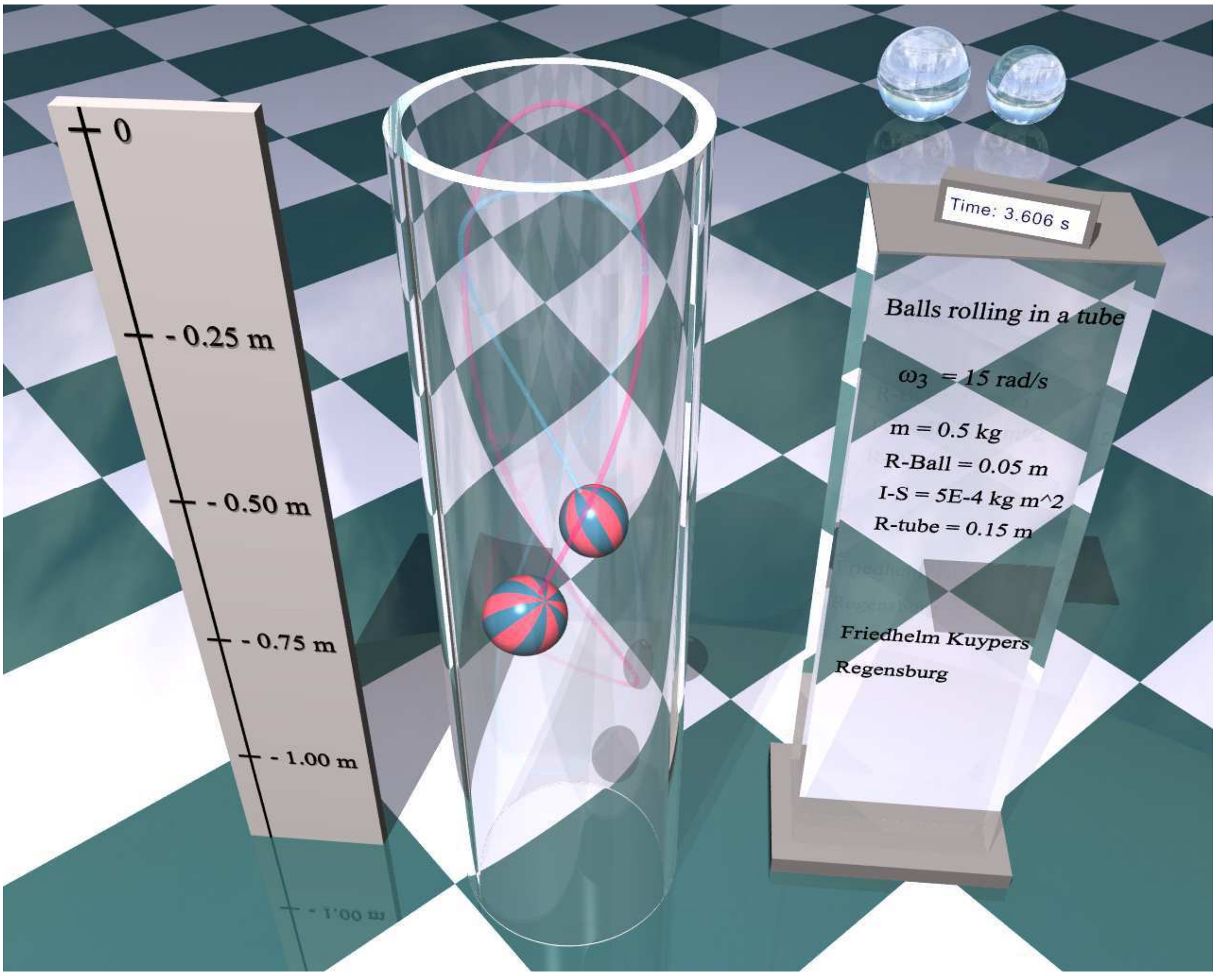

Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Zwei identische Bälle rollen – um 180° gegeneinander versetzt – **ohne Schlupf** und ohne Reibungsverluste auf der Innenseite eines gläsernen, senkrecht stehenden Rohres. Erstaunlicherweise laufen die Bälle periodisch zwischen einem höchsten und einem tiefsten Punkt auf und ab – ohne den Boden zu berühren.

Ein Ball mit Masse m, Radius $R := R_{\text{Ball}}$ und Trägheitsmoment I_S für Drehungen um den Schwerpunkt rollt **ohne Schlupf** und mit konstanter Energie auf der Innenseite eines vertikalen Rohres mit Innenradius R_{Rohr}.

Die Bewegung des Ball-Schwerpunkts wird durch die zwei Polarkoordinaten φ_S, z_S gegeben (Siehe Abb. 2). Der konstante Radius r_S der Ballbahn ist die Differenz aus Innenradius des Rohres R_{Rohr} und Ballradius.

Die bei der Animation benötigte Eigendrehung des Balles wird durch die drei Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ beschrieben.

Besonderheiten des Systems

Die Rollbewegung des Balles ist sehr erstaunlich: Ohne den Boden zu treffen rollt der Ball periodisch zwischen einem höchsten und einem tiefsten Punkt auf und ab.

Wenn man den Ball oben in horizontaler Richtung anstößt, so zeigen Experimente und numerische Berechnungen, dass der Ball umso weiter nach unten rollt, je kleiner seine Anfangsgeschwindigkeit ist.

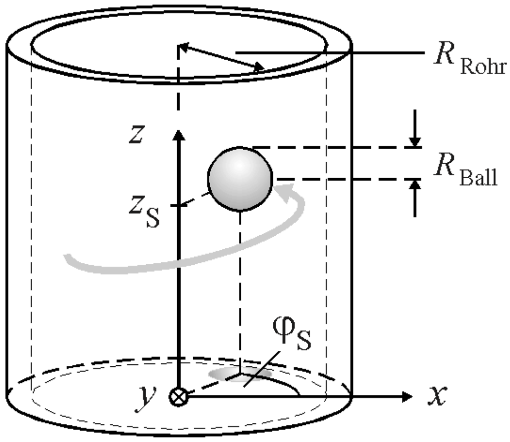

Abb. 2 Ein Ball mit Radius $R := R_{\text{Ball}}$ rollt *ohne Schlupf* und ohne Energieverlust auf der Innenseite eines senkrecht stehenden Rohres mit Innenradius R_{Rohr}.

Hinweise:

1) Wenn man in den Dgln. zusätzlich noch Luftreibung berücksichtigt, so kann der Ball anfangs immer noch mehrmals auf und ab laufen, wobei die Schwerpunkthöhe im zeitlichen Mittel langsam abnimmt. Die zwischenzeitlichen Bewegungen nach oben werden immer schwächer und verschwinden schließlich ganz.

2) Wenn man andere Dgln. aufstellt, die auch ein *Rutschen* des Balles an der Zylinderwand erlauben, so ergeben sich dieselben Ergebnisse, wenn Gleit- und Haftreibungszahl f, f_0 so groß gewählt werden, dass reines Rollen auftritt. Wenn aber Gleit- und Haftreibungszahl so klein sind, dass der Ball nicht mehr an der Zylinderwand haftet, dann rutscht der Ball auf einer spiralähnlichen Kurve immer weiter nach unten. Dabei nimmt die Schwerpunkthöhe $z_S(t)$ monoton ab.

Dgln.

Die Dgln. werden in dem Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, 9-te Auflage, Aufgabe 12–17 aufgestellt.

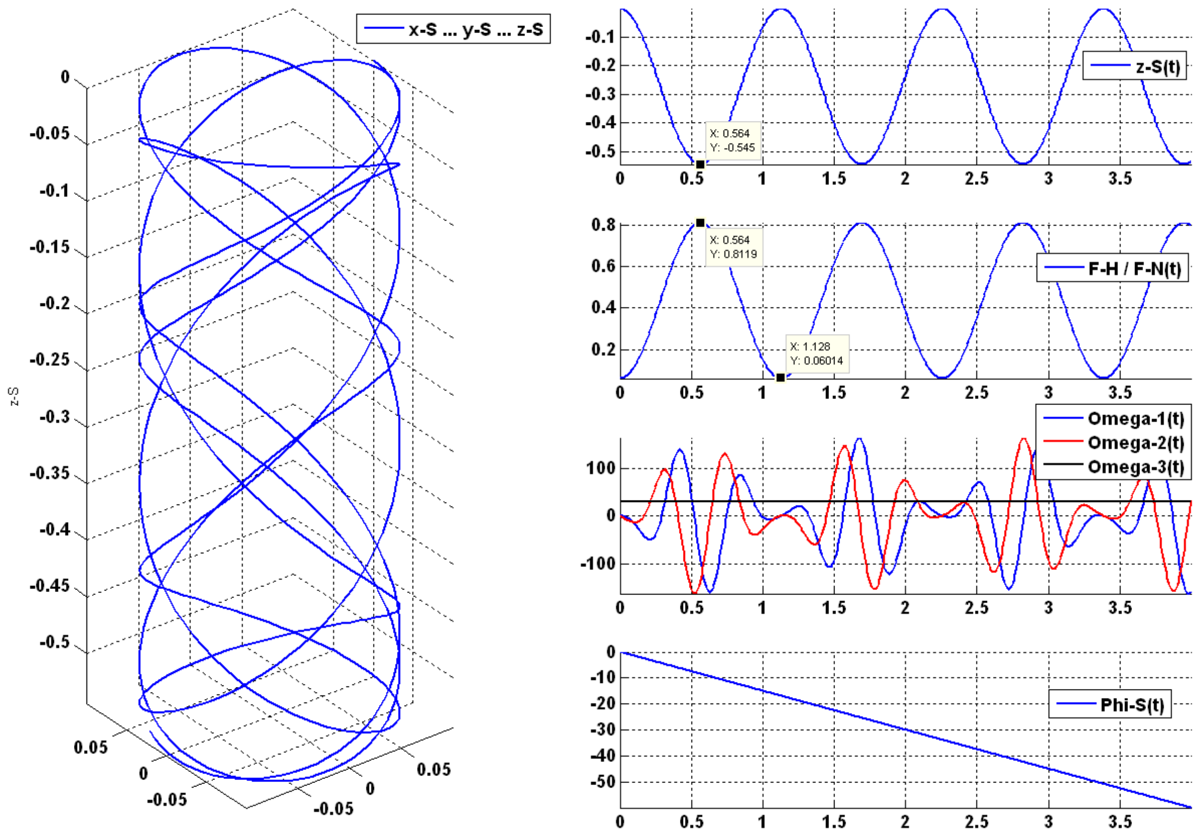

Abb. 3 Eine homogene Kugel startet im Punkt $[x_S, y_S, z_S] = [0{,}1\,\text{m}, 0, 0]$ und läuft dann – von oben gesehen – im Uhrzeigersinn um die Symmetrieachse des Rohres bis etwa -0,54 m hinab. Anschließend rollt sie wieder bis auf die Ausgangshöhe hoch usw.

Das numerisch berechnete Kräfteverhältnis

$$\frac{F_H}{F_N} = \frac{\text{Haftkraft}}{\text{Normalkraft}} = \frac{\text{Haftkraft}}{\text{Fliehkraft}} = \frac{m\left(\ddot{z}_S + g\right)}{m\, r_S\, \dot{\varphi}_S^2}$$

erreicht im tiefsten Punkt der Bahn den maximalen Wert 0,812. Daher ist Rollen ohne Schlupf bei einer hohen Haftreibungszahl $\mu_0 \geq 0{,}82$ möglich. Bei größeren Anfangs-Winkelgeschwindigkeiten $\omega_3(0)$ ist dieses Verhältnis kleiner; dann rollt der Ball aber auch nicht so weit hinab.

Anfangsbedingungen und Parameter der Berechnung lauten wie folgt:

$$\varphi(0) = 0 \qquad \vartheta(0) = \pi \qquad \psi(0) = 0 \qquad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \qquad \omega_3(0) = 30\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi_S(0) = 0 \qquad z_S(0) = 0$$

$$m = 0{,}5\text{ kg} \qquad R\text{–Ball} = 0{,}05\text{ m} \qquad I_S = 0{,}0002\text{ kg m}^2 \qquad \text{Rohr–Innenradius} = 0{,}15\text{ m}$$

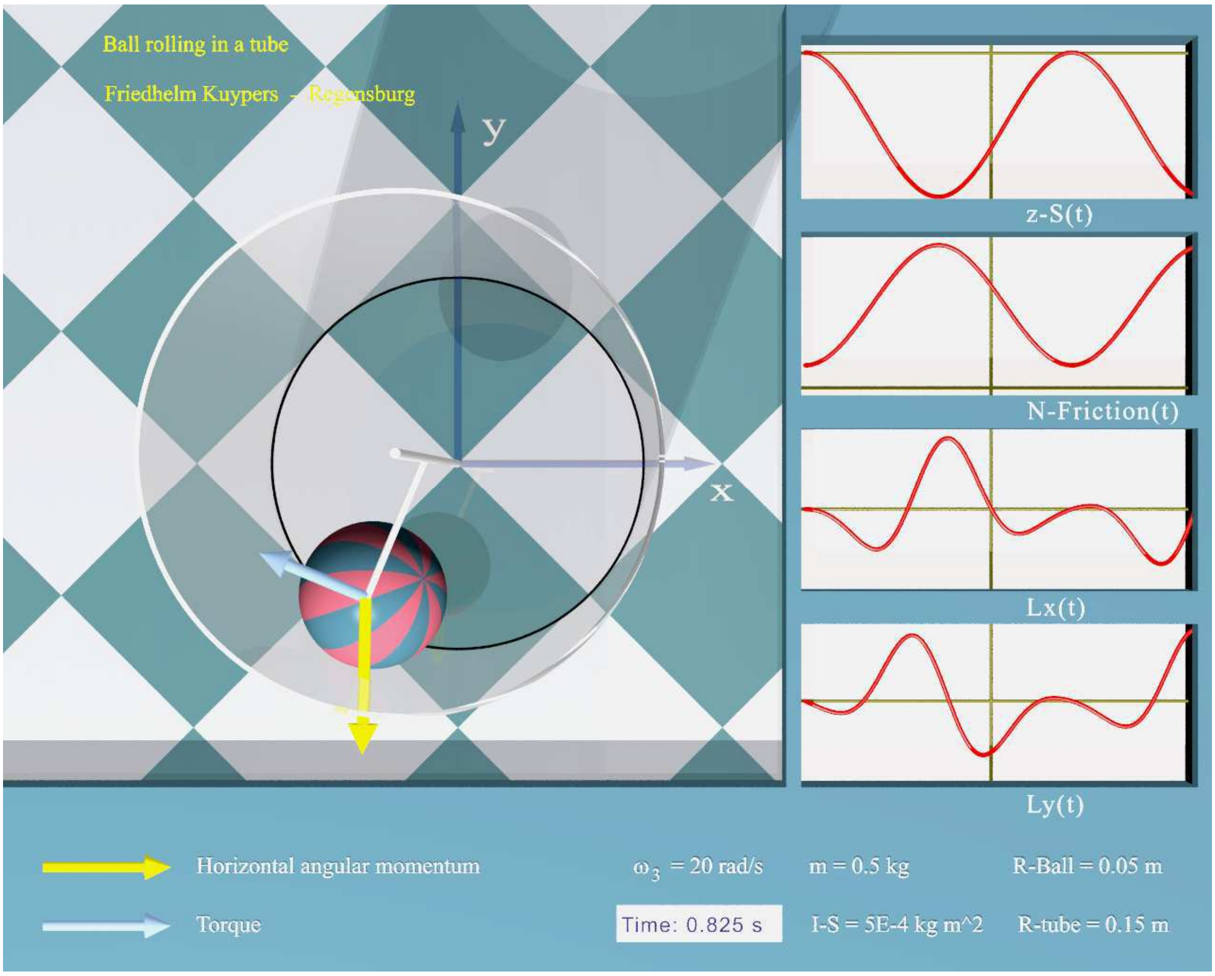

Abb. 4 Bei dieser POV-Ray-Animation blickt der Zuschauer schräg von oben in das Hohlrohr hinein.

Die Animation bestätigt folgende Aussagen:

1) Das blau dargestellte Drehmoment **N** (englisch: Torque) ist immer horizontal und wird durch die vertikale Haftreibungskraft $F_{H\,z}$ der Rohrwand auf den Ball erzeugt: $N = N_{\text{Friction}} = F_{H\,z}\, R_{\text{Ball}}$. Dabei gilt

$$m\,\ddot{z}_S = F_{H\,z} - m\,g \qquad \Rightarrow \qquad F_{H\,z} = m\,\ddot{z}_S + m\,g$$

Somit ist das Drehmoment am größten (kleinsten) im unteren (oberen) Umkehrpunkt der Bewegung.

2) Wegen der horizontalen Richtung des Drehmomentes **N** sind die *vertikalen* Komponenten des Drehimpulses $\mathbf{L} = I\,\vec{\omega}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ konstant. Daher umrundet der Ball die Symmetrieachse des Rohres mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit.

3) In der Animation wird in gelber Farbe nur die horizontale Komponente des Drehimpulses eingetragen. Der Verlauf der beiden dargestellten Vektoren bestätigt die Drehimpulsgl. $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$.

4) Diejenige Komponente von **L** bzw. von $\vec{\omega}$, die parallel zur Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist, sagt dem Betrachter, ob der Ball momentan die Rohrwand hinauf oder hinunter rollt.

Literatur :

- Friedhelm Kuypers: *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage, Aufgabe 12–17.