Lorenz-Gleichungen.

Im Jahre 1963 leitete Lorenz bei der Untersuchung von Konvektionen die nach ihm benannten Gln. aus den Navier-Stokes-Gln. der Strömungslehre ab. Die Lorenz-Gln. sind wohl die bekanntesten Dgln. mit chaotischem Verhalten. Sie sind drei relativ einfache, explizite, nichtlineare Dgln. erster Ordnung und lauten

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma\,(y - x) \\ \dot{y} &= r\,x - y - x\,z \\ \dot{z} &= x\,y - b\,z \end{aligned}} \qquad (1)$$

mit drei Zustandsvariablen

x ~ Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit

y ~ Temperaturdifferenz zwischen auf und ab steigendem Fluid

z ~ Abweichung des vertikalen Temperaturprofils von einem linearen Verlauf

und drei positiven Parametern

σ = Prandtl-Zahl = kinematische Viskosität / Temperaturleitfähigkeit

$r \sim \Delta T$. r dient als externer Kontrollparameter.

b = geometrischer Faktor $= 4\,(1 + a^2)^{-1}$ mit a = Höhe/Breite der Konvektionsrollen.

In den meisten Untersuchungen sind $\sigma = 10$, $b = 8/3$ und r wird als freier Kontrollparameter variiert.

Lorenz entdeckte die *empfindliche Abhängigkeit der Lösungskurven von den Anfangsbedingungen*, nachdem er eine Computerberechnung mit denselben Anfangsbedingungen und denselben Parametern, aber mit weniger Stellen nach dem Komma wiederholte. Dabei stellte er zu seiner Überraschung fest, dass beide Berechnungen nach einiger Zeit keine Ähnlichkeit mehr miteinander hatten.

Alle Lösungen der Lorenz-Gln. sind endlich. Bahnen mit großen Anfangsbedingungen werden in Richtung auf den Nullpunkt gedämpft.

Das Verhalten des Systems hängt entscheidend vom Parameter r ab. Für die in den meisten Untersuchungen verwendeten Parameter

$$\sigma = 10 \qquad b = \frac{8}{3}$$

und für r als freien Kontrollparameter gilt:

- $0 < r < 1$: Der Nullpunkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ ist der einzige Gleichgewichtspunkt. Er zieht alle Lösungen an und ist daher ein Punktattraktor.
- $r > 1$: Der Nullpunkt $\mathbf{0}$ ist nicht länger stabil. Zwei neue Fixpunkte treten auf:

$$x = y = \pm\sqrt{b\,(r-1)} \qquad\qquad z = r - 1 \tag{2}$$

Für $r < r_{\text{krit}} := \sigma\,\dfrac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} = \dfrac{470}{19} \approx 24{,}74$ und $\sigma > b + 1 = \dfrac{11}{3}$

sind diese zwei neuen Fixpunkte stabil und wirken als Punktattraktoren.

- $r > r_{\text{krit}}$: Alle drei Fixpunkte sind instabil.
- $r > 24{,}06$: Hier existiert ein seltsamer Attraktor, auf dem chaotische Bewegungen ablaufen. Beachte: Im schmalen Bereich $24{,}06 < r < 24{,}74$ existieren drei Attraktoren: Die beiden Punktattraktoren nach Gl. (2) und der seltsame Attraktor.

Abb. 1 zeigt die Ergebnisse der numerischen Berechnung für die klassischen, bereits von Lorenz untersuchten Parameter $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Die Kurven oszillieren um die beiden Fixpunkte

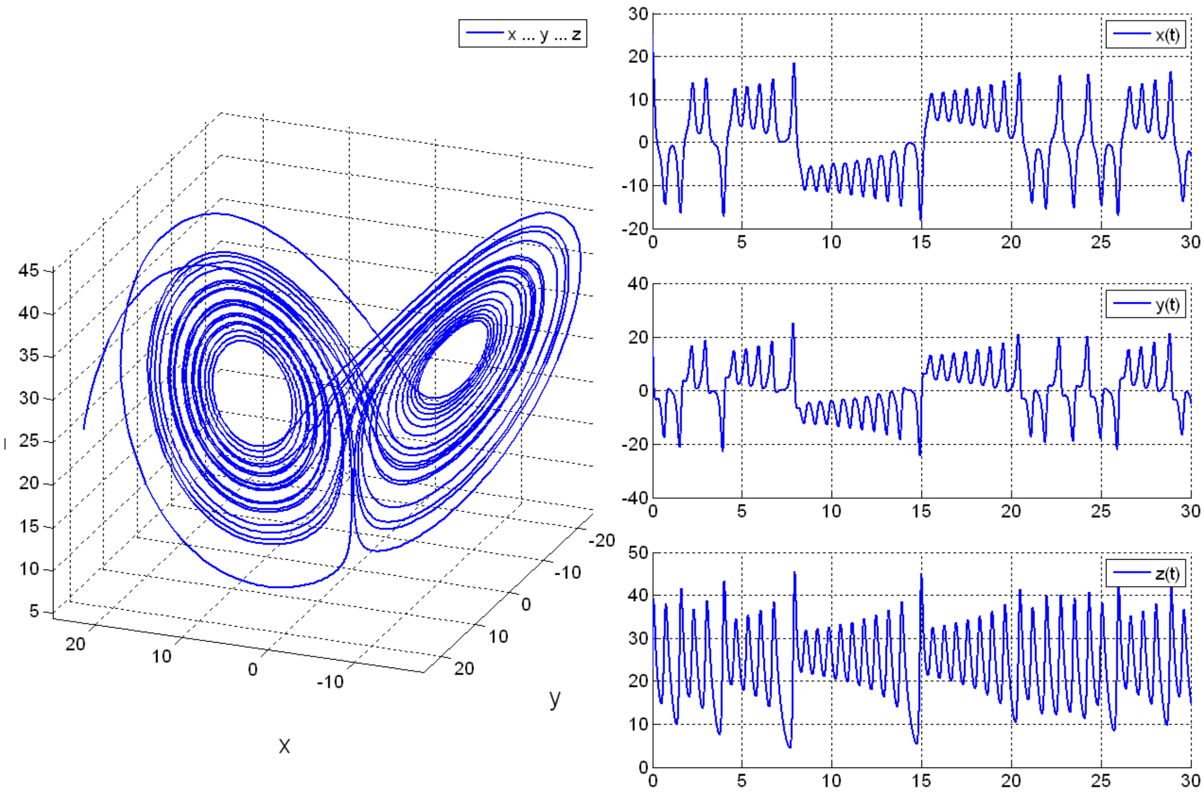

Abb. 1 Die Kurven zeigen links eine perspektivische 3D-Ansicht des Lorenzattraktors und rechts die zugehörigen Kurven $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Die numerische Rechnung wurde für folgende drei klassischen Parameterwerte durchgeführt: $\sigma = 10 \quad b = 8/3 \quad r = 28$

$$x = y = \pm \sqrt{b\,(r-1)} \approx \pm\,8{,}485 \qquad z = r - 1 = 27$$

Während der Schwingung um einen Fixpunkt wachsen die Ausschläge pro Schwingung um etwa 6%. Zu unvorhersehbaren, regellosen Zeiten schlagen die Schwingungen von einem Fixpunkt auf den anderen um. Die Bewegungen sind chaotisch und ähneln dem Flug einer Fliege, die abwechseln um zwei Lampen kreist.

Der linke Teil der Abb. 1 zeigt eine perspektivische, dreidimensionale Ansicht des bekannten Lorenzattraktors, auf den das System wegen Reibung sehr schnell einschwingt. Die Bewegungen innerhalb des Attraktors hängen empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Der Lorenzattraktor besteht aus *zwei Flügeln, die jeweils aus unendlich vielen, sehr dicht beieinander liegenden Blättern zusammengesetzt sind*. Der Lorenzattraktor ist ein seltsamer oder chaotischer Attraktor.

Literatur :

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Aufgabe 8-5.
- R. Mahnke, *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner-Verlag