

Zwei gekoppelte Oszillatoren

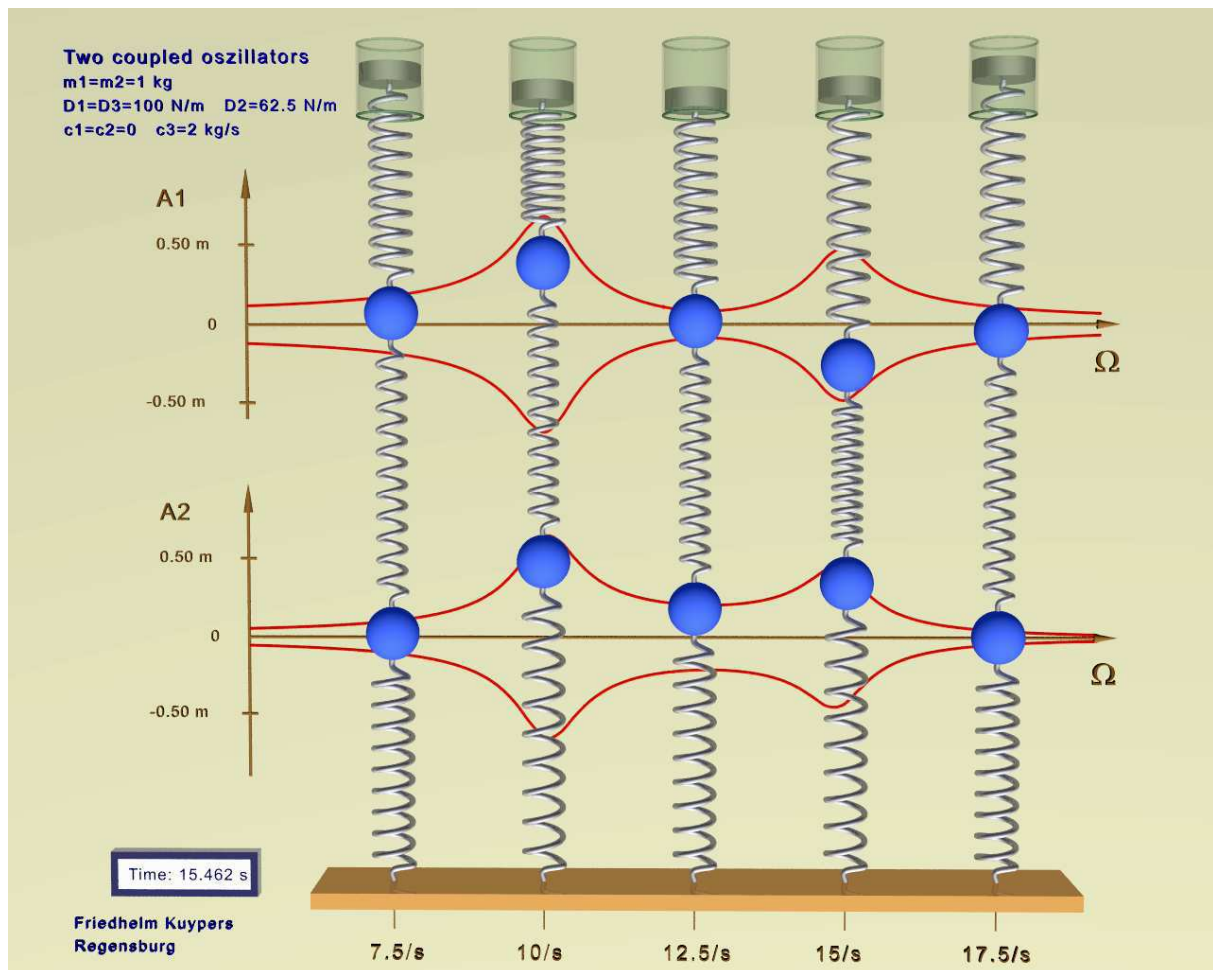


Abb. 1 Bei der POV-Ray-Animation „Von Normalschwingungen zu Resonanzkurven...avi“ werden zuerst die zwei Normalschwingungen für die Parameter (siehe Abb. 2)

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg} \quad D_1 = D_3 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad D_2 = 62,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

gezeigt. Die gleich- und die gegenphasige Schwingung haben die Eigenfrequenzen

$$\omega_{\text{gl}} = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_3}{m_2}} = 10 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_{\text{geg}} = \sqrt{\frac{D_1 + 2 D_2}{m_1}} = 15 \frac{1}{\text{s}}$$

Nach dem Einbringen von drei weiteren Schwingern sollte die Animation kurz gestoppt werden um zu überlegen, wie die Resonanzkurven der beiden Massen in Anbetracht der zwei zuvor gezeigten Eigenschwingungen aussehen könnten. Danach kann die Animation mit fünf erzwungenen Schwingungen weiter laufen – mit $c_3 = 2 \text{ kg/s}$.

Erwartungsgemäß sind die roten Resonanzkurven $A_1(\Omega)$ und $A_2(\Omega)$ der beiden Massen bei den zwei Eigenfrequenzen der beiden Normalschwingungen maximal.

Hinweis: Die fünf Erregerfrequenzen Ω der auf und ab laufenden Kolben werden unten geschrieben. Der Dämpfer zwischen unterer Masse und Boden wird nicht dargestellt.

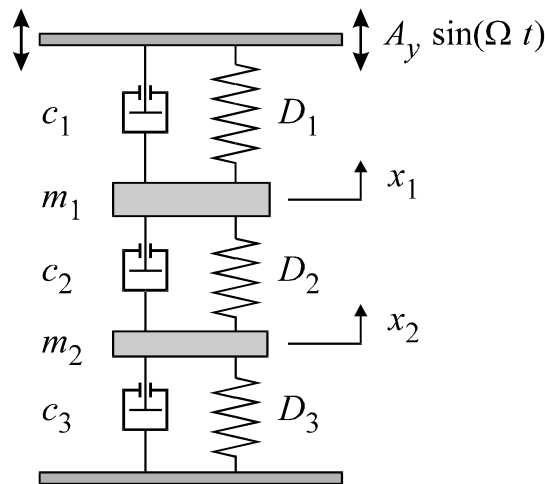


Abb. 2 Zwei lineare, gekoppelte Oszillatoren mit geschwindigkeitsproportionalen Reibungskräften.

Zwei gekoppelte, gedämpfte, harmonische Oszillatoren hängen an der Decke, die harmonisch auf und ab bewegt werden kann. Der untere Oszillator ist mit einem festen Boden verbunden.

Differentialgl.n. (abgekürzt Dgln.)

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 &= -D_1 [x_1 - A_y \sin(\Omega t)] - D_2 [x_1 - x_2] \\
 &\quad - c_1 [\dot{x}_1 - A_y \Omega \cos(\Omega t)] - c_2 [\dot{x}_1 - \dot{x}_2] \\
 m_2 \ddot{x}_2 &= -D_2 [x_2 - x_1] - D_3 x_2 - c_2 [\dot{x}_2 - \dot{x}_1] - c_3 \dot{x}_2
 \end{aligned}$$

Besonderheiten des Systems

1) Eigenschwingungen: Für ungedämpfte identische Oszillatoren, d. h. für $m_1 = m_2$ und $D_1 = D_3$ hat das System offensichtlich folgende zwei Eigenschwingungen:

— **Gleichsinnige Schwingung** $x_1(t) = x_2(t)$ mit der Eigenfrequenz

$$\omega_{\text{gl}} = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_3}{m_2}}$$

— **Gegensinnige Schwingung** $x_1(t) = -x_2(t)$ mit der Eigenfrequenz

$$\omega_{\text{geg}} = \sqrt{\frac{D_1 + 2D_2}{m_1}}$$

2) Schwebungen: Bei geeigneten Anfangsbedingungen, ruhender Decke, verschwindenden Reibungen und *schwacher Kopplung* führen die beiden Oszillatoren **Schwebungen** durch (Siehe Abb. 3). Dabei wandert die Energie ständig zwischen beiden Oszillatoren hin und her.

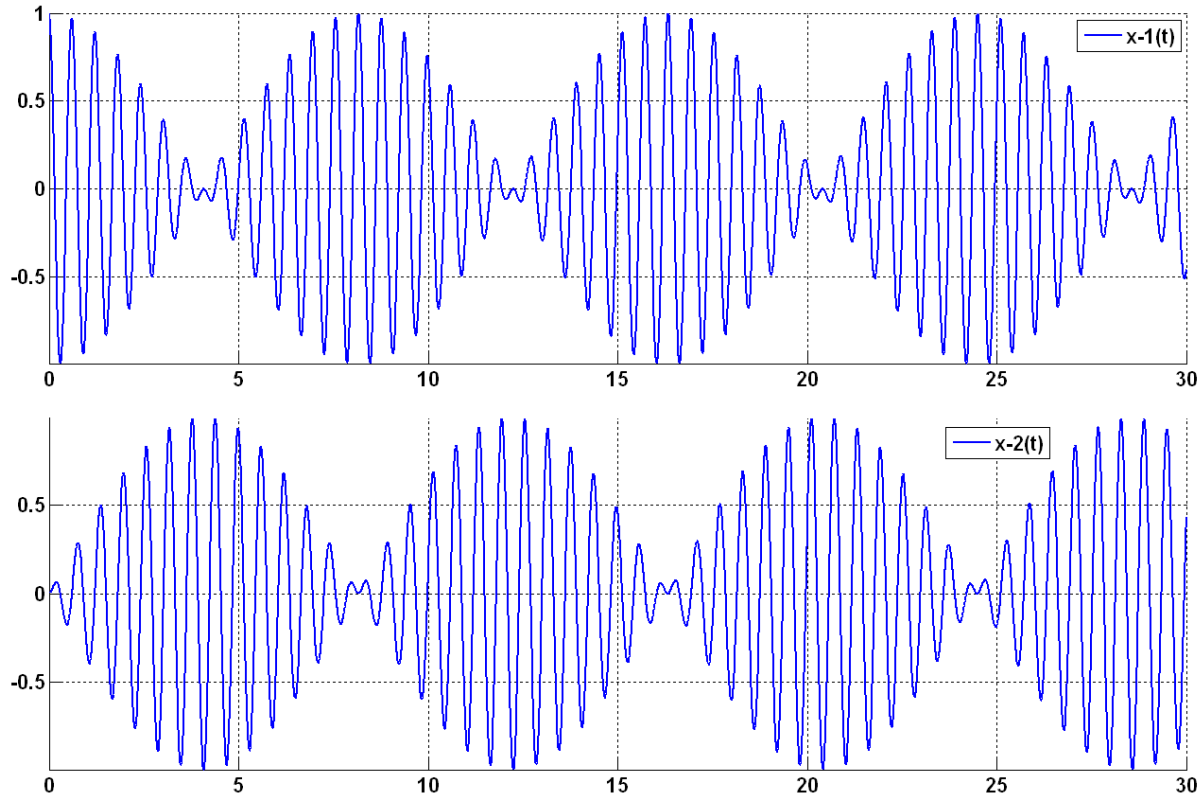


Abb. 3 Die beiden *schwach gekoppelten* Oszillatoren führen **Schwebungen** durch. Folgende Anfangsbedingungen und Parameter wurden für die Kurven gewählt:

$$x_1(0) = 1 \text{ m} \quad x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg} \quad D_1 = D_3 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad D_2 = 8 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$A_y = 0$$

3) Von großer Bedeutung für den Maschinenbau ist die **Schwingungstilgung**. Schwingungstilgungen sind in erster Linie wichtig bei weit gespannten Bauwerken – Brücken, große Treppen, Stadionsdächern, – und bei hohen, schlanken Bauwerken – Wolkenkratzern, Schornsteinen, Fernsehtürmen Die Schwingungen haben meist kleine Eigendämpfungen und können mit Schwingungstilgern wirksam reduziert werden.

Wir betrachten das System in Abb. 4. Bei bewegter Decke bewegt sich der obere Oszillator mit Masse m_1 und Federkonstante D_1 nach Beendigung der Einschwingung nur wenig, wenn die Dämpfer schwach sind und wenn

$$\Omega \approx \sqrt{D_1/m_1} \approx \sqrt{D_2/m_2}$$

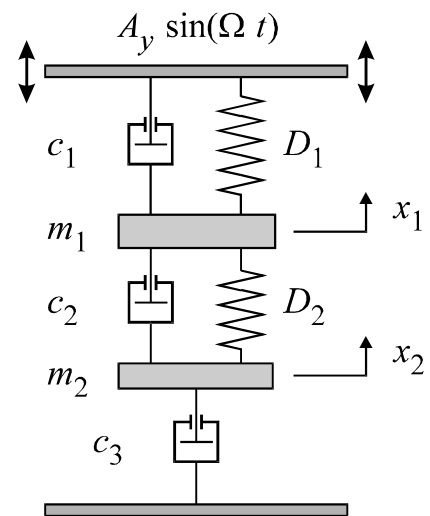


Abb. 4 Für geeignete Parameter wird die Schwingung der oberen Masse m_1 stark getilgt.

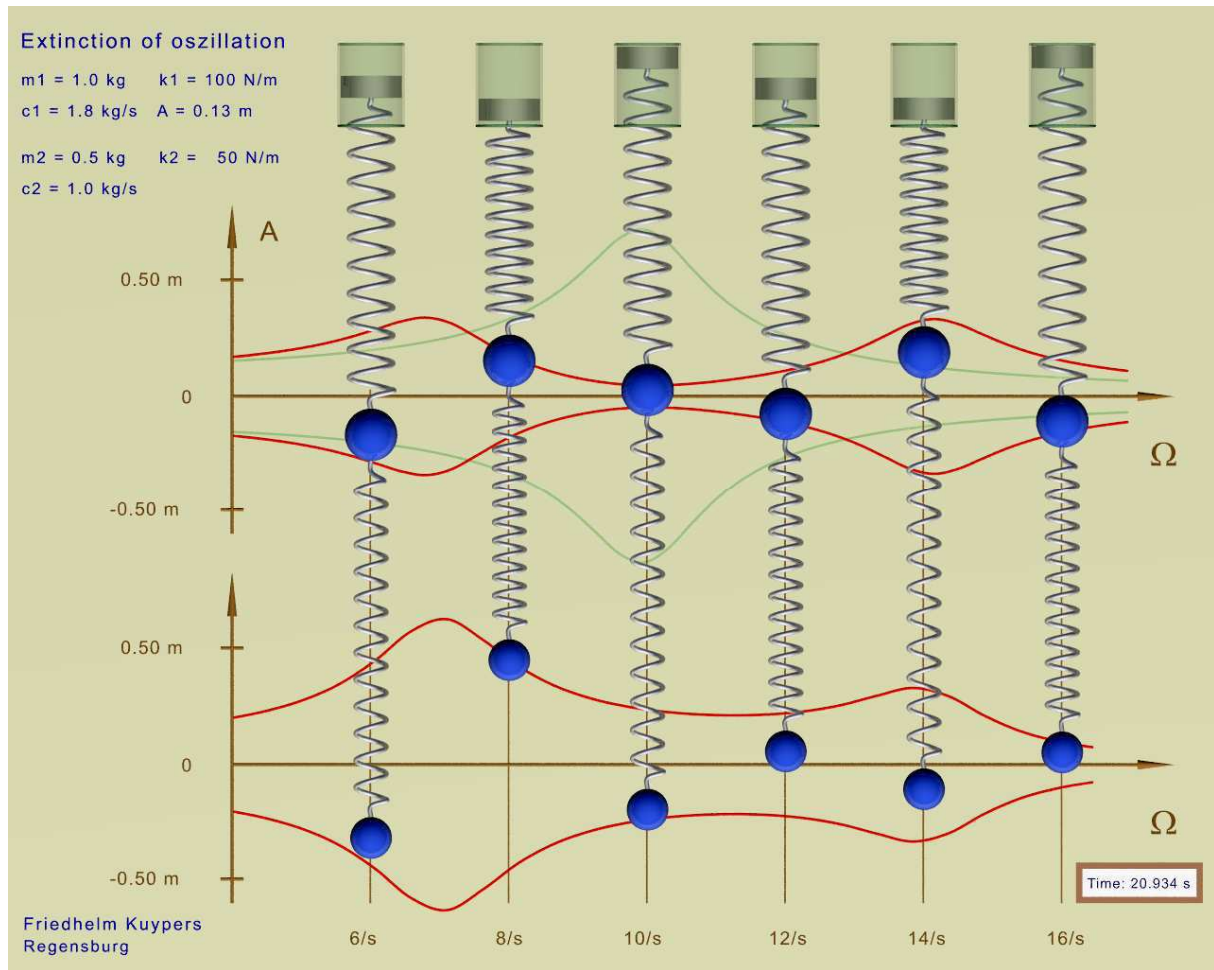


Abb. 5 Bei der POV-Ray-Animation „Von einer Resonanzkurve zur Schwingungstilgung....avi“ werden zuerst die angeregten Schwingungen eines *einzelnen* Oszillators mit den Parametern

$$m_1 = 1 \text{ kg} \quad D_1 = k_1 = 100 \text{ N/m} \quad c_1 = 1,8 \text{ kg/s} \quad A = 0,13 \text{ m}$$

gezeigt; die Resonanzkurve wird hier grün dargestellt. Anschließend werden *unten* sechs weitere Oszillatoren angehängt mit den Parametern

$$m_2 = 0,5 \text{ kg} \quad D_2 = k_2 = 50 \text{ N/m} \quad c_2 = 1,0 \text{ kg/s}$$

Beachte, dass gilt

$$\sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} = 10 \frac{1}{\text{s}}$$

An dieser Stelle – also noch *vor* dem folgenden Einbringen der roten Resonanzkurven – sollte die Animation kurz gestoppt werden, um zu überlegen, mit welchen *Phasen* die beiden gekoppelten Oszillatoren, die mit der Frequenz $\Omega = 10/\text{s}$ angetriebenen werden, schwingen. Warum schwingt die untere Masse m_2 im Gegentakt zum Kolben? Warum ist hier eine Schwingungstilgung der Bewegung der Masse m_1 zu erwarten?

Danach kann die Animation fortgesetzt werden. Hinweis: Bei der Animation sind die Parameter $D_3 = c_3 = 0$, so dass die Dgln. der gekoppelten Oszillatoren lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (D_1 + D_2) x_1 = D_1 A \sin(\Omega t) + c_1 A \Omega \cos(\Omega t) + D_2 x_2 + c_2 \dot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + D_2 x_2 = D_2 x_1 + c_2 \dot{x}_1 \quad D_3 = c_3 = 0$$

gilt, wenn also die Decke ungefähr mit den nahezu gleichen Eigenfrequenzen der beiden Oszillatoren schwingt. In diesem Fall ist sowohl die Phasenverschiebung zwischen den Bewegungen der Decke und der oberen Masse als auch die Phasenverschiebung zwischen den Bewegungen der beiden Massen jeweils nahezu 90° .

Daher schwingt der untere Oszillator ungefähr *im Gegentakt zur Decke*. Rechnungen zeigen, dass für die untere Schwingungsamplitude A_2 näherungsweise gilt:

$$A_2 \approx \frac{D_1}{D_2} A_y \quad \Leftrightarrow \quad D_2 A_2 \approx D_1 A_y$$

Daher üben die Decke und der untere Oszillator in etwa entgegengesetzt gleich große Feder-

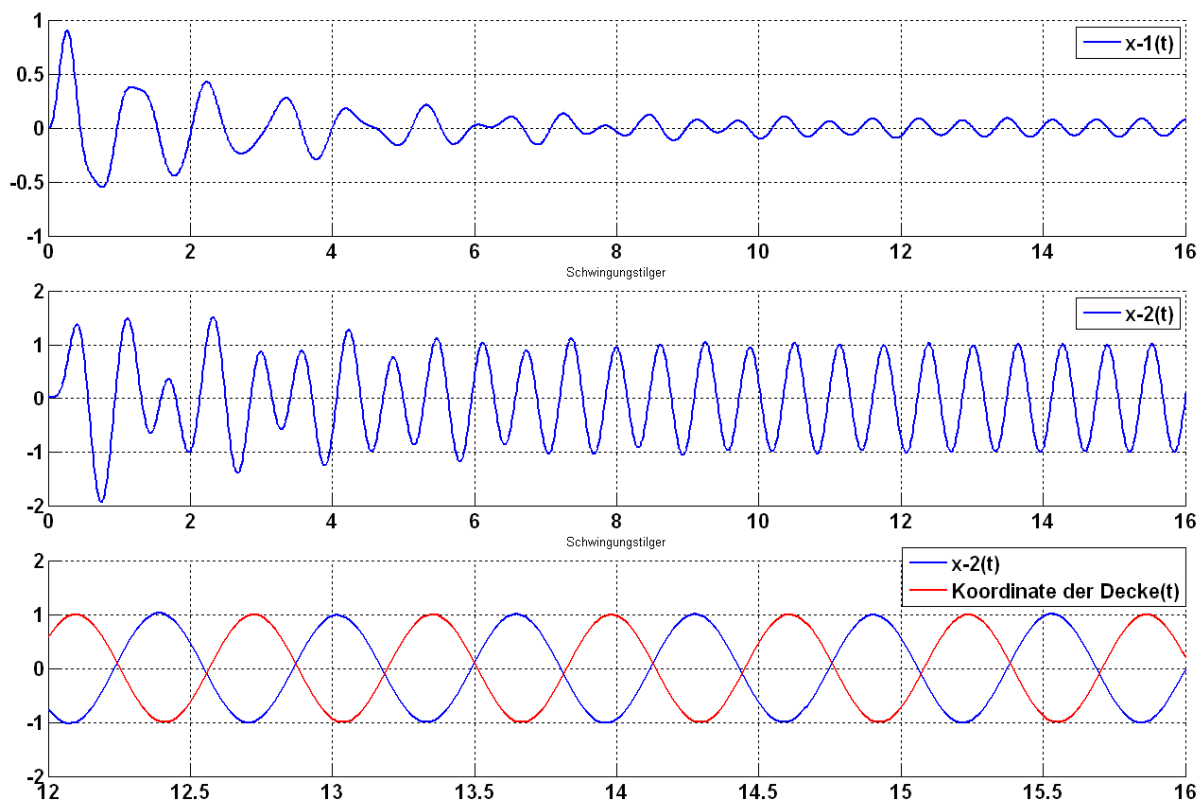


Abb. 6 Nach einer Einschwingung von etwa 10 Sekunden schwingt der obere Oszillator mit einer kleinen Amplitude von etwa 8 cm. Der untere Oszillator hingegen schwingt mit der großen Amplitude der Decke ungefähr im Gegentakt zur Decke, so dass sich die beiden Federkräfte auf die obere Masse fast gegenseitig aufheben.

Beachte, dass die beiden Kurven im unteren Fenster nur für die letzten 4 Sekunden der Bewegung, also nur im Zeitintervall $[12 \text{ s}, 16 \text{ s}]$ gezeichnet wurden.

Folgende Anfangsbedingungen und Parameter wurden für die Kurven gewählt:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg} \quad D_1 = D_2 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad c_1 = 2 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad c_2 = 0,8 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$D_3 = 0 \quad c_3 = 0 \quad A_y = 1 \text{ m} \quad \Omega = 10 \frac{1}{\text{s}}$$

kräfte auf die obere Masse m_1 aus. Folglich bewegt sich die obere Masse kaum; die untere Masse wirkt als **Schwingungstilger** (Siehe Abb. 5 und 6).

Je stärker die unteren beiden Stoßdämpferkonstanten c_2 und c_3 in Abb. 4 sind, desto mehr Energie schlucken sie. Die Energiezufuhr muss von der Decke aus über die Bewegung der oberen Masse m_1 erfolgen. Daher ist eine Schwingungstilgung nur erfolgreich, wenn die beiden unteren Stoßdämpfer schwach sind. Auch bei Erhöhung der oberen Stoßdämpferkonstante c_1 wird die Schwingungstilgung geschwächt.

Leider ist eine Schwingungstilgung nur in einem *kleinen Frequenzbereich* möglich. Bei anderen Frequenzen kann sogar eine Verstärkung der unerwünschten Schwingung eintreten (vergleiche die grünen und roten Resonanzkurven in Abb. 5).

Torsionsschwingungen, die vor allem in Verbrennungsmotoren auftreten, können mit sog. Torsions-Schwingungstilgern gedämpft werden, die auf die Kurbelwelle aufgesetzt werden. Ein massiver äußerer Ring kann hier auf einem Gummiring sitzen, der die Kurbelwelle umschließt.

Siehe auch die Schwingungstilgung in dem in MECHANICUS eingebetteten System „**Gleitpendel**“. Dort verdeutlicht eine POV-Ray-Animation, wie Pendel unerwünschte, durch Erdbeben oder Wirbelstürme verursachte Schwingungen von Hochbauten großenteils tilgen können.

Beachte: Die Schwingungstilgung darf nicht mit einer *Schwingungsisolierung* verwechselt werden. Bei einer Schwingungsisolierung ruhen unruhige Maschinen – z. B. Dieselmotoren, Pumpen, Turbinen – oder empfindliche Anlagen – z. B. Präzisions- und Prüfmaschinen, Mikroskope, – auf **elastischen Lagern**. Die Schwingungsisolierung ist umso wirksamer, je größer folgendes Verhältnis ist:

$$\frac{\text{Störfrequenz } \Omega}{\text{Eigenfrequenz } \omega_0} = \frac{\Omega}{\sqrt{D/m}}$$

mit D = Federkonstante der elastischen Lagerung

und m = Masse des Körpers, der auf der Lagerung liegt.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 13-9.