Kettenschwinger

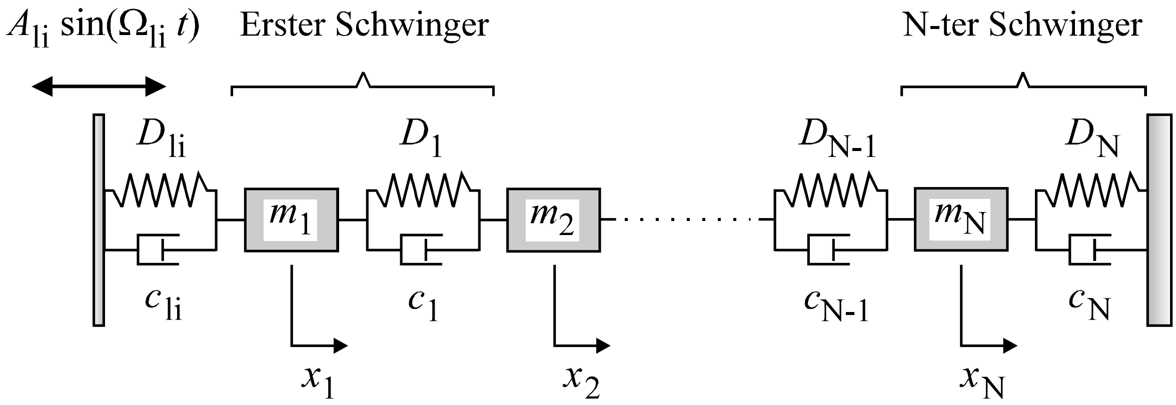


Abb. 1 Der Kettenschwinger besteht aus N harmonischen, gedämpften Oszillatoren, die miteinander gekoppelt sind und **in *x*-Richtung schwingen** können. Die linke Wand kann ruhen, dauernd harmonisch schwingen, eine Halbschwingung oder eine einzelne Sägezahnbewegung machen. Die rechte Wand ist fest, kann aber auch durch ein loses Ende ersetzt werden.

Eine Schwingerkette mit N **gedämpften linearen Oszillatoren** befindet sich zwischen zwei Wänden. Die linke Wand kann ruhen, dauernd harmonisch oder kurzfristig wie eine einzelne Halbwelle oder wie ein einzelner Sägezahn schwingen. Die rechte Wand ist fest. Man kann aber auch ein *loses rechtes* oder ein *loses linkes Ende der Kette* wählen. (Siehe die Beispiele weiter unten.)

Die große Wichtigkeit dieses Modells beruht auf dem Umstand, dass *für große Schwingerzahlen N die Schwingerkette die Ausbreitung von Longitudinal- und Transversalwellen auf Seilen, Saiten oder Schraubenfedern näherungsweise simuliert.* Die Simulation ist umso besser, je größer die Schwingerzahl N ist. Auf der Schwingerkette beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit von longitudinalen Wellen

$$c = \sqrt{\frac{D}{m}}\, l_0$$

Da der Gleichgewichtsabstand l_0 von zwei benachbarten Schwingern in den Dgln. nicht vorkommt, ist für uns die Größe

$$\hat{c} := \frac{c}{l_0} = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (1)$$

von Interesse: $\hat{c} = \sqrt{D/m}$ *ist die Zahl der Schwinger, die pro Zeiteinheit von einer laufenden Wellen erfasst werden* (Die Animationen bestätigen diese Aussage. Siehe Abb. 4).

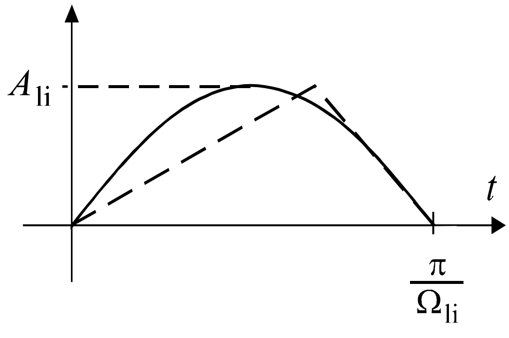
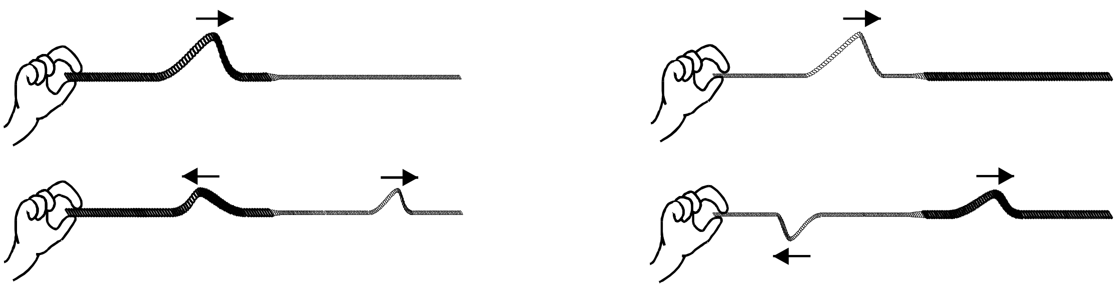


Abb. 2 Hier sind die Halbschwingung und (gestrichelt) die einzelne Sägezahnbewegung der linken Wand dargestellt.



a) b)

Abb. 3 Reflexionen und Transmissionen an der Grenze von zwei verschieden schweren Seilen:

a) Eine auf einem *schweren* Seil einlaufende Welle wird an der Grenze zwischen dem schweren und dem leichten Seil aufgespalten: Ein Teil wird *ohne Inversion* reflektiert, der andere Teil läuft auf dem leichten Seil mit größerer Ausbreitungsgeschwindigkeit weiter.

b) Eine auf einem *leichten* Seil einlaufende Welle wird ebenfalls an der Grenze aufgespalten: Ein Teil wird *mit Inversion* reflektiert, der andere Teil läuft auf dem schweren Seil mit kleinerer Ausbreitungsgeschwindigkeit weiter.

Der durchlaufende Teil der Welle erfährt in keinem Fall eine Inversion.

Mit den in MECHANICUS durchführbaren Animationen lassen sich u. a. folgende Sachverhalte veranschaulichen und belegen:

- *Bei fehlender Dispersion und fehlender Reibung breiten sich Wellen ohne Änderung ihrer Form aus.*
- An einem festen (losen) Ende werden Wellen mit (ohne) Inversion reflektiert.
- Werden zwei Schwingerketten mit verschiedenen „Ausbreitungsgeschwindigkeiten" $\hat{c} = \sqrt{D/m}$ miteinander verbunden, so werden Wellen am Übergang gespalten. Der reflektierte Wellenanteil erfährt an der Grenze zu einem Seil mit größerer (kleinerer) Massenbelegung (Einheit $\mathrm{kg/m}$) eine (keine) Inversion (siehe die Abbn. 3 und 4).

Bei großer Schwingerzahl N könnte der Anwender nur mit erheblichem Aufwand alle $2\,N$ Anfangsbedingungen und alle Parameter *einzeln* eingeben. Zur Vermeidung dieses sehr großen Aufwandes kann der Kettenschwinger maximal in 4 Bereiche unterteilt werden. In jedem Bereich sind jeweils alle Anfangsbedingungen und jeweils alle Parameter Masse m, Federkonstante D und Stoßdämpferkonstante c gleich.

Wir geben *einige Beispiele*:

- **Zahl der Bereiche = 1**

Die Parameterwahl

$$D_{\mathrm{li}} = 0 \qquad c_{\mathrm{li}} = 0$$

liefert eine **Schwingerkette mit offenem linken Ende**. Hier kann die Kette nur durch nicht verschwindende Anfangsbedingungen in Bewegung gesetzt werden.

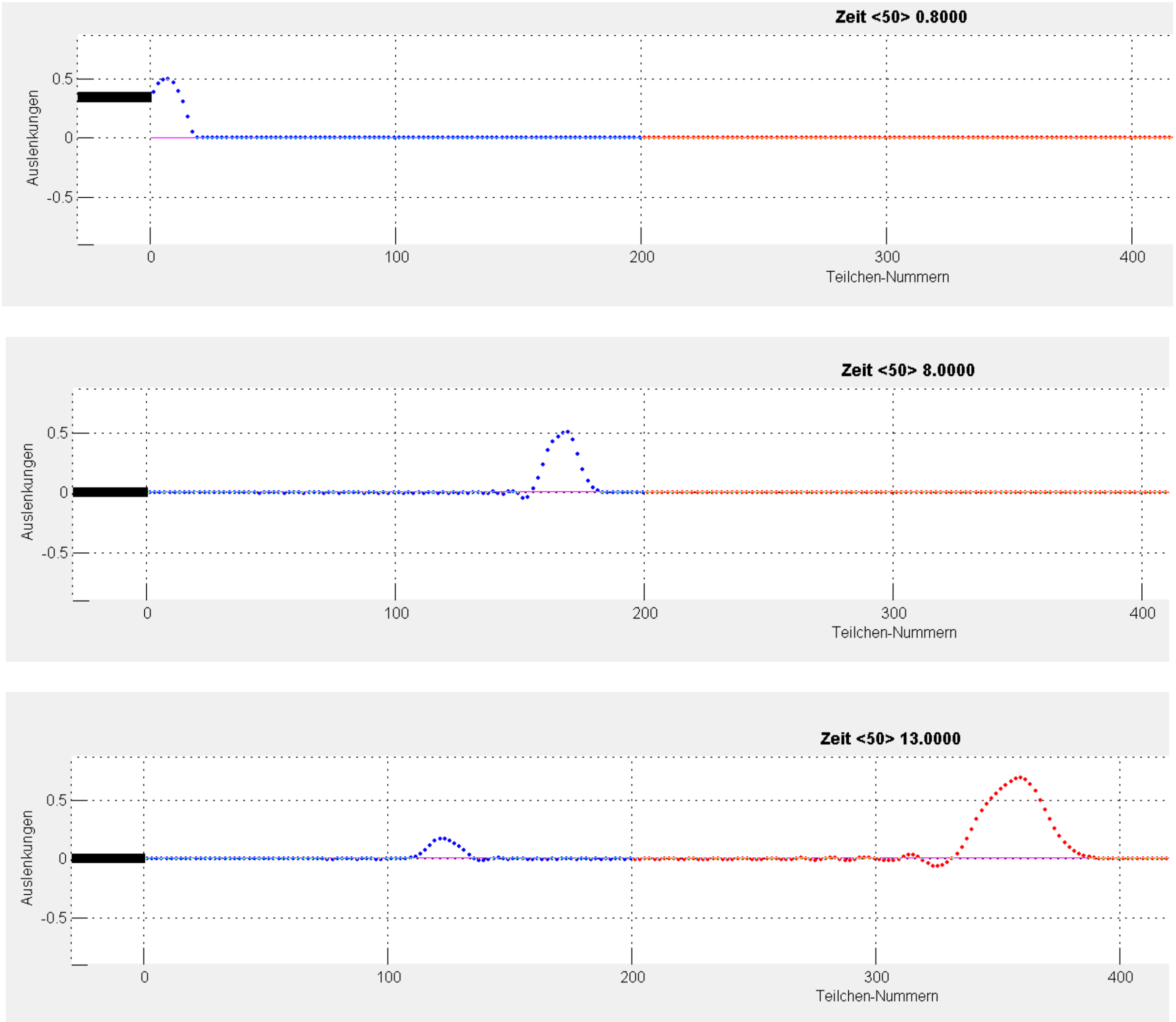


Abb. 4 Hier werden *drei Momentaufnahmen* einer MatLab-Animation gezeigt. Dabei wird jeder zweite Schwinger im Bereich 1 durch einen blauen Punkt und im Bereich 2 durch einen orangen Punkt markiert.

Die Schwingerkette besteht aus zwei Bereichen mit den Parametern:

$$N_1 = 200 \qquad m_1 = 1\,\mathrm{kg} \qquad D_1 = 500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \qquad c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{c}_1 = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} \approx 22.36\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$N_2 = 400 \qquad m_2 = 0.25\,\mathrm{kg} \qquad D_2 = 500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \qquad c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{c}_2 = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} = 2\,\hat{c}_1$$

Im Bereich 1 mit schweren Massen läuft eine Halbwelle auf die Grenze zum Bereich 2 zu, in dem die Schwinger viermal leichtere Massen enthalten. Daher ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Bereich 2 doppelt so groß ist wie im Bereich 1. Das obere Bild zeigt die Entstehung der Halbwelle zur Zeit $t = 0.8\,\mathrm{s}$, das mittlere Bild zeigt die nach rechts laufende Halbwelle zur Zeit $t = 8\,\mathrm{s}$, das untere Bild zeigt die zwei nach der teilweisen Reflexion entstandenen Halbwellen zur Zeit $t = 13\,\mathrm{s}$. Deutlich sind die fehlende Inversion der reflektierten Halbwelle und die Beziehung $\hat{c}_2 = 2\,\hat{c}_1$ zu erkennen.

Für die Parameterwahl

$D_{\text{li}} > 0$ oder $c_{\text{li}} > 0$

wird eine harmonische Welle, eine Halbwelle oder ein Sägezahn durch die Bewegung der linken Wand erzeugt. Die Welle läuft ohne Änderung der Form mit der „Ausbreitungsgeschwindigkeit" $\hat{c} = \sqrt{D/m}$ über die Schwingerkette und wird an der festen rechten Wand mit Inversion reflektiert.

- **Zahl der Bereiche = 2**

Die Parameterwahl

$N_2 = 1$ (d. h. nur ein einziger Schwinger im zweiten Bereich)

$m_2 = m_1$ (d. h. die Masse im Bereich 2 ist genauso groß wie die N_1 Massen im Bereich 1)

Federkonstante $D_2 = 0$

Stoßdämpferkonstante $c_2 = 0$

ergibt eine **Schwingerkette mit offenem rechten Ende**. Die Zahl der Schwinger beträgt insgesamt $N_1 + 1$.

Die Parameterwahl

$N_1 > 1 \qquad m_1 > 0 \qquad D_1 > 0$

$N_2 > 1 \qquad m_2 = m_1 > 0 \qquad D_2 > D_1 > 0$

beschreibt eine Kette mit N_1 Schwingern, die mit einer zweiten Kette mit N_2 Schwingern verbunden ist; die zweite Teilkette hat einer größere „Ausbreitungsgeschwindigkeit" $\hat{c}$.

- **Zahl der Bereiche = 3 oder 4**

Hier können ähnliche Parameterwahlen getroffen werden.

Differentialgln.

Wir betrachten nur den einfachsten Fall: Die Schwingerkette besteht nur aus einem einzigen Bereich mit *N* identischen, ungedämpften Schwingern ($c = 0$). Die linke Wand bewegt sich harmonisch hin und her und ist nur über eine Feder mit Federkonstante D_{li} mit der Kette verbunden. Dann lauten die *N* Dgln. für **horizontale Schwingungen in x-Richtung**:

%--

% Dgl. für den ersten Schwinger an der bewegten Wand.

%--

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{m}\left[D_{\text{li}}\left(x_1 - A_{\text{li}} \sin\left(\Omega_{\text{li}}\, t\right)\right) + D\left(x_1 - x_2\right)\right]$$

%--

% N – 2 Dgln. für die Schwinger in der Mitte

%--

for $i = 2 : N-1$

$$\ddot{x}_i \; = \; -\frac{D}{m}\left(2\,x_i \; - \; x_{i-1} \; - \; x_{i+1}\right)$$

end

%---
% Dgl. für den letzten Schwinger vor der rechten Wand.
%---

$$\ddot{x}_{100} \; = \; -\frac{D}{m}\left(2\,x_{100} \; - \; x_{99}\right)$$

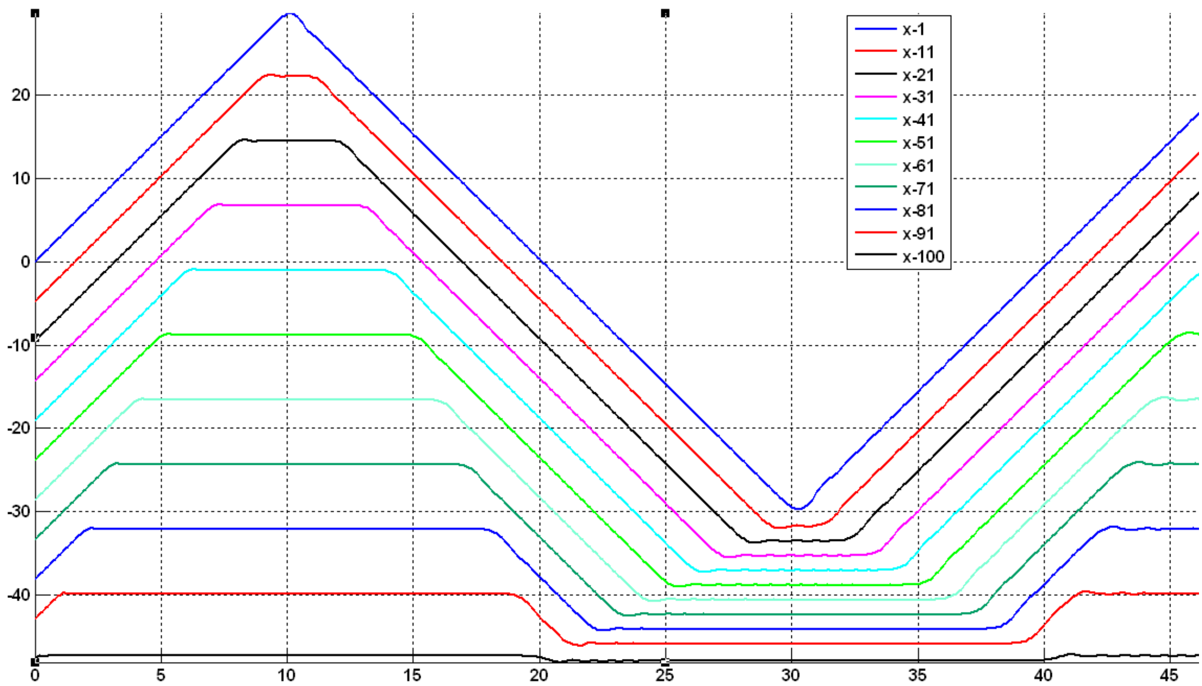


Abb. 5 In der Regel hat die Grafik beim Kettenschwinger wesentlich weniger Aussagekraft als die Animation. Das gilt aber nicht, wenn der Kettenschwinger als ganzes gegen die feste, rechte Wand läuft. Hier wurde ein Kettenschwinger mit $N = 100$ Schwingern berechnet, die folgende Anfangsbedingungen und Parameter haben:

$$D_{\text{li}} = 0 \qquad c_{\text{li}} = 0 \qquad x_i(0) \; = \; 0 \qquad \dot{x}_i(0) \; = \; 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \text{mit } \; i \; = \; 1, \ldots 100$$

$$N_1 \; = \; 100 \qquad m_1 \; = \; 1 \qquad D_1 \; = \; 100\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \qquad c_1 \; = \; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{c} \; = \; \sqrt{\frac{D}{m}} \; = \; 10\,\frac{1}{\text{s}}$$

Nur jede 10-te Auslenkung $x_i(t)$ wird in der Abb. 5 dargestellt. Zwischen den einzelnen Schwingern besteht ein Abstand von 50 cm. Offensichtlich dauert es 10 s, bis der Schwinger Nr. 1, der am weitesten von der festen Wand entfernt ist, abgebremst wird.

Zur Zeit $t = 10\,\text{s}$ ruht die Schwingerkette nahezu und alle 100 Federn sind wider Erwarten nahezu gleich stark zusammen gedrückt.

Diese interessante Bewegung wird ausführlich in Aufgabe 13–4 berechnet und diskutiert.

Numerische Lösungsverfahren

Das Verfahren ode113 rechnet schnell und ist empfehlenswert. Das Verfahren ode45 ist langsamer. Das steife Verfahren ode15s kann mehr als die zehnfache Rechenzeit benötigen und ist daher überhaupt nicht empfehlenswert.

Animation

Bei der MatLab-Animation werden die longitudinalen Schwingungen durch transversale Schwingungen in vertikaler Richtung animiert (siehe Abb. 4); die N Oszillatoren schwingen also bei der Animation senkrecht zur x-Richtung.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Unterkapitel 13.3 und Aufgabe 13–4.