Faden-Doppelpendel

An der Decke ist eine sehr kleine Rolle befestigt, die sich reibungsfrei um eine horizontale Achse drehen kann. **Masse** und **Ausdehnung der Rolle** können **vernachlässigt** werden. Über die Rolle wird ein masseloser, nicht-dehnbarer Faden der **Länge *l*** gelegt. An die beiden Enden des Fadens werden zwei Punktmassen m_1, m_2 befestigt.

Die beiden Punktmassen können **in der x,y-Ebene reibungsfrei schwingen**, wobei wir annehmen, dass sie nicht zusammenstoßen können. Bei den Schwingungen kann der Faden ohne Reibungsverluste über die trägheitslose Rolle laufen, so dass die Teil-Längen des Fadens auf beiden Seiten der Rolle jeweils nicht konstant sind. Daher gilt:

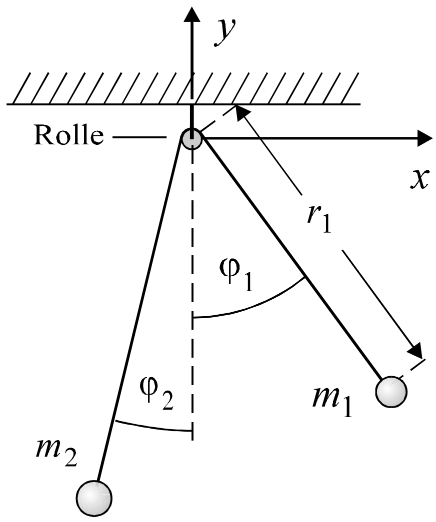

Abb. 1 Die beiden Punktmassen können sowohl hin und her als auch (bei sich drehender Rolle) auf und ab schwingen.

$$r_2(t) = l - r_1(t)$$

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die Lagrangefunktion für die generalisierten Koordinaten $r_1, \varphi_1, \varphi_2$ lautet:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\,\dot{r}_1^2 + \frac{m_1}{2}\,r_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(l - r_1\right)^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$+\ g\left[m_1\,r_1\cos\varphi_1 + m_2\left(l - r_1\right)\cos\varphi_2\right]$$

Daraus folgen die Lagrangegln.:

$$\ddot{\varphi}_1 \;=\; -\frac{1}{r_1}\left(2\,\dot{r}_1\,\dot{\varphi}_1 \;+\; g\,\sin\varphi\right) \tag{1}$$

$$\ddot{r}_1 \;=\; \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1\,r_1\,\dot{\varphi}_1^2 \;-\; m_2\left(l - r_1\right)\dot{\varphi}_2^2 \;+\; g\left(m_1\cos\varphi_1 - m_2\cos\varphi_2\right)\right] \tag{2}$$

$$\ddot{\varphi}_2 \;=\; -\frac{1}{l - r_1}\left(-\,2\,\dot{r}_1\,\dot{\varphi}_2 \;+\; g\,\sin\varphi_2\right) \tag{3}$$

Hinweis: Beim Vergleich der Dgln. (1) und (3) ist zu beachten, dass $-\,\dot{r}_1 = \dot{r}_2$.

Wenn eine der beiden Punktmassen durch die Mitte der Rolle schwingt – also für $r_1 = 0$ und für $r_2 = l - r_1 = 0$ – treten Singularitäten auf.

Beachte, dass die Anfangsbedingung $r_1(0)$ kleiner sein muss als die Fadenlänge. Andernfalls liefert die numerische Berechung unsinnige Kurven und die Animation stürzt ab.

Das System ist **chaotisch**.

Animation

Bei der Animation dürfen die Massen nicht zusammen stoßen. Daher wird anstelle der Rolle ein horizontales, kleines, hohles Rohr mit abgerundeten Enden verwendet, durch das der Faden reibungsfrei geführt wird und das senkrecht zur Schwingungsebene der beiden Masse steht. Die Massen stoßen nicht zusammen, wenn die Länge des Rohres größer ist als die Summe der beiden Kugelradien der bewegten Massen. Die in der Animation verwendete Fadenlänge ist um die Rohrlänge größer als die bei der numerischen Berechnung verwendete Fadenlänge *l*.

Literatur

- R. Mahnke, *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner-Verlag. Mahnke untersucht dieses System nur für den Spezialfall $\varphi_2(t) = 0$ und gibt ihm den Namen „Schwingende Atwood-Maschine". Die ausführlichen und teilweise sehr interessanten Betrachtungen haben einen Umfang von über 40 Seiten.
- In dem Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Unterkapitel 21.3 werden einige Aussagen aus dem Lehrbuch von R. Mahnke vorgestellt.

Weitere Literatur ist mir nicht bekannt.