Oszillator mit 4 Federn

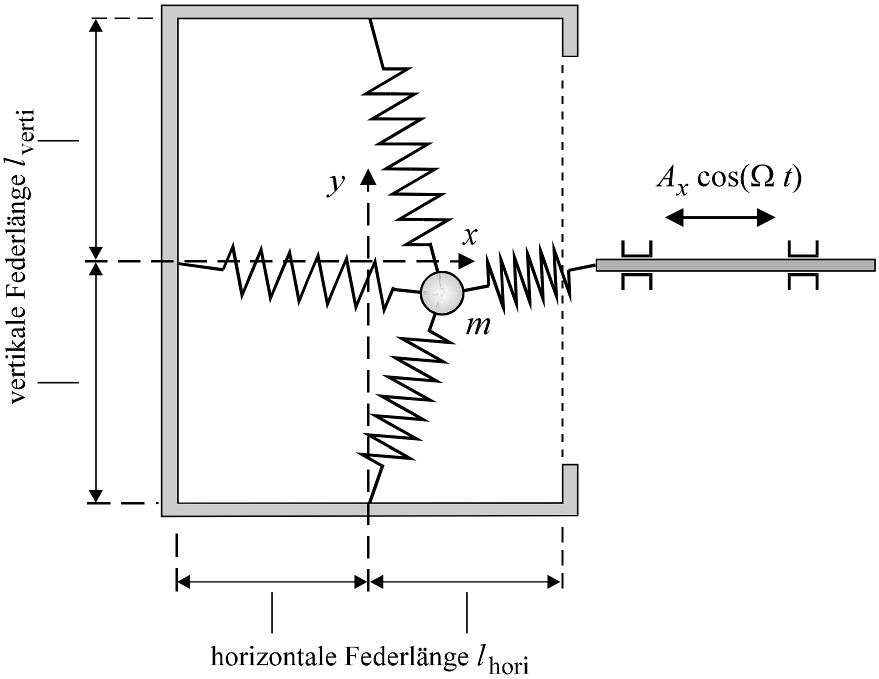

Abb. 1 Die Masse m schwingt reibungsfrei in der horizontalen x,y-Ebene. Die Schwingung wird angeregt durch die Fußpunktbewegung der rechten Feder.

Ein Körper mit Masse m ist mit vier Federn verbunden und schwingt **reibungsfrei** in der **horizontalen x,y-Ebene**; daher treten keine Gravitationskräfte auf. Eine geschwindigkeitsproportionale Luftreibung wird angesetzt.

Im Koordinatenursprung $x = y = 0$ sind bei ruhender Anregung ($A_x = 0$) alle vier Federn entspannt. Die beiden vertikalen Federn haben die gleiche Federkonstante D_{verti} und die gleiche ungedehnte Länge l_{verti}. Die beiden horizontalen Federn haben ebenfalls die gleiche Federkonstante D_{hori} und die gleiche ungedehnte Länge l_{hori}.

Das äußere Ende der rechten Feder kann mit der harmonischen Auslenkung $A_x \cos(\Omega\, t)$ hin und her bewegt werden. Für $A_x = 0$ befindet sich das linke Ende des Schiebers auf der gestrichelten vertikalen Linie.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Mit der Dissipationsfunktion

$$P = \frac{c}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

und der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + D_{\text{hori}}\, A\, x \cos(\Omega\, t)$$

$$- D_{\text{hori}}\left[x^2 + y^2 - l_{\text{hori}}\left\{\sqrt{\left(l_{\text{hori}} + x\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(l_{\text{hori}} + A\cos(\Omega\, t) - x\right)^2 + y^2}\right\}\right]$$

$$- D_{\text{verti}}\left[x^2 + y^2 - l_{\text{verti}}\left\{\sqrt{\left(l_{\text{verti}} + y\right)^2 + x^2} + \sqrt{\left(l_{\text{verti}} - y\right)^2 + x^2}\right\}\right]$$

ergeben sich die Bewegungsgln. zu

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\,\dot{x}$$

$$-\frac{D_{\text{hori}}}{m}\left[2\,x - A_x \cos(\Omega\, t) - \frac{l_{\text{hori}}\left(l_{\text{hori}} + x\right)}{\sqrt{\left(l_{\text{hori}} + x\right)^2 + y^2}} + \frac{l_{\text{hori}}\left[l_{\text{hori}} + A_x \cos(\Omega\, t) - x\right]}{\sqrt{\left[l_{\text{hori}} + A_x \cos(\Omega\, t) - x\right]^2 + y^2}}\right]$$

$$-\frac{D_{\text{verti}}}{m}\left[2\,x - \frac{l_{\text{verti}}\, x}{\sqrt{\left(l_{\text{verti}} + y\right)^2 + x^2}} - \frac{l_{\text{verti}}\, x}{\sqrt{\left(l_{\text{verti}} - y\right)^2 + x^2}}\right]$$

$$\ddot{y} = -\frac{c}{m}\,\dot{y}$$

$$-\frac{D_{\text{hori}}}{m}\left[2\,y - \frac{l_{\text{hori}}\; y}{\sqrt{\left(l_{\text{hori}} + x\right)^2 + y^2}} - \frac{l_{\text{hori}}\; y}{\sqrt{\left[l_{\text{hori}} + A_x \cos(\Omega\, t) - x\right]^2 + y^2}}\right]$$

$$-\frac{D_{\text{verti}}}{m}\left[2\,y - \frac{l_{\text{verti}}\left(l_{\text{verti}} + y\right)}{\sqrt{\left(l_{\text{verti}} + y\right)^2 + x^2}} + \frac{l_{\text{verti}}\left(l_{\text{verti}} - y\right)}{\sqrt{\left(l_{\text{verti}} - y\right)^2 + x^2}}\right]$$

In den expliziten Dgln. tritt die Division „Null/Null“ auf, wenn die Masse durch eine der vier äußeren Aufhängepunkte der Federn schwingt:

1)	$x = -\,l_{\text{hori}}$	$y = 0$	2)	$x = l_{\text{hori}} + A_x \cos(\Omega\, t)$	$y = 0$
3)	$y = -\,l_{\text{verti}}$	$x = 0$	4)	$y = l_{\text{verti}}$	$x = 0$

Für $c_1 = c_2 = 0$, $A_x = 0$ folgen für kleine Schwingungen ($x, y << l_{\text{hori}}, l_{\text{verti}}$) die linearisierten Bewegungsgln.

$$\ddot{x} = -\frac{2\,D_{\text{hori}}}{m}\,x \qquad\qquad \ddot{y} = -\frac{2\,D_{\text{verti}}}{m}\,y$$

Für den Spezialfall $D_{\text{hori}} = D_{\text{verti}}$ ist die Bahnkurve eine Ellipse.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage. In Aufgabe 8–2 wird ein vereinfachtes Modell mit vier gleichen Federn und $A_x = 0$ vorgestellt, das nur auf der x-Achse schwingen kann. Fixpunkte und ihre Stabilität werden untersucht, ein Bifurkationsdiagramm wird gezeichnet.
- R. Mahnke: Nichtlineare Physik in Aufgaben, Teubner Verlag