Gleitpendel

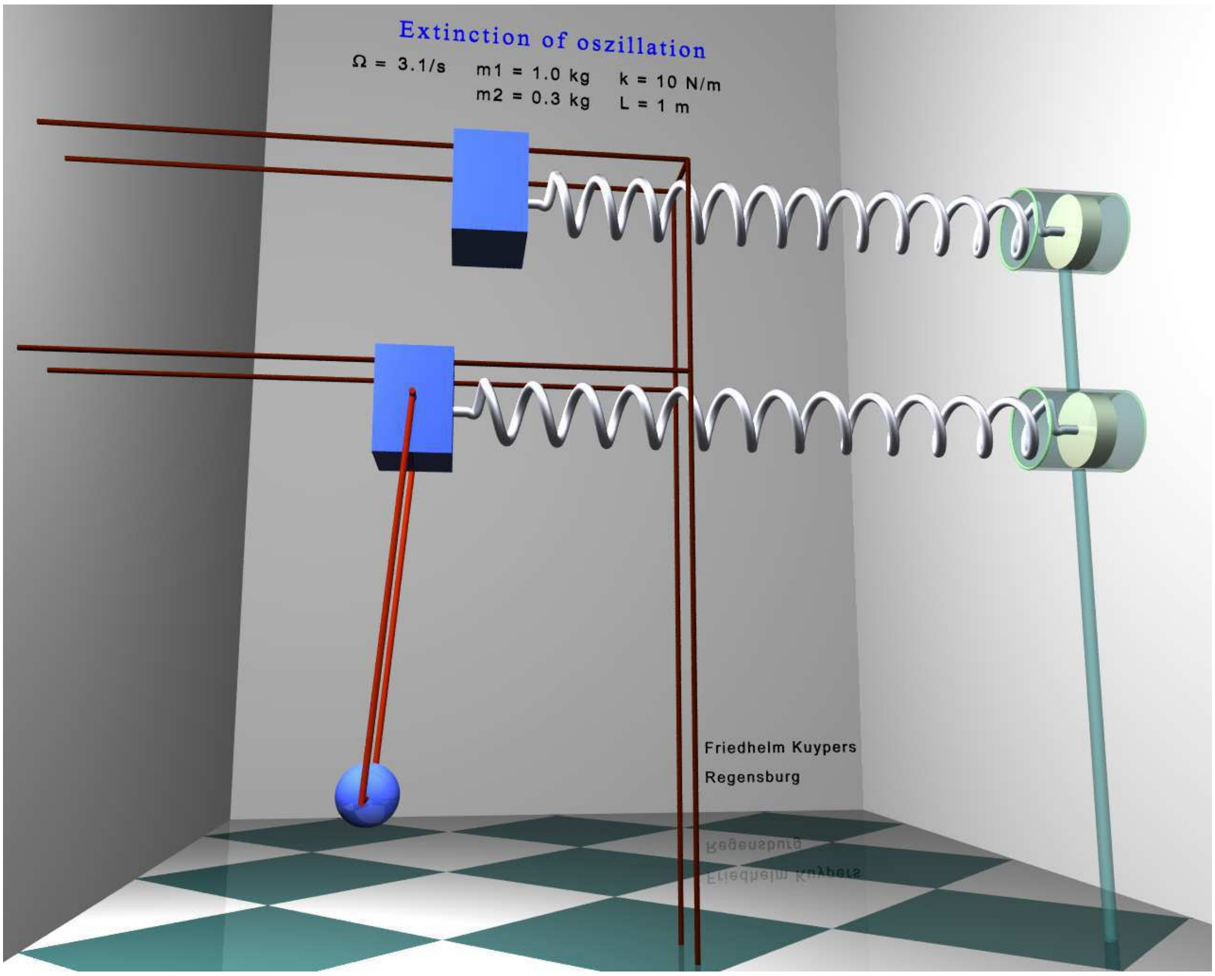

Abb. 1 Die **POV-Ray-Animation** zeigt, wie die Schwingung eines erregten harmonischen Oszillators bzw. wie die Schwingung eines durch Erdbeben oder Wirbelstürme ins Schwanken gebrachten Hochhauses durch ein geeignet abgestimmtes Pendel erheblich gemindert werden kann. Das Pendel schwingt im Gegentakt zur Bewegung des Kolbens im grünen Glaszylinder.

Der Quader mit Masse m_1 gleitet *ohne Haft- und ohne Gleitreibungskraft* auf der x-Achse hin und her. Er wird von einer Feder, deren rechter Fußpunkt harmonisch mit

$$A_x \sin(\Omega\, t)$$

bewegt wird, und einem angehängten, schwingenden Pendel hin und her gezogen. Beide Körper erfahren laminare, **geschwindigkeitsproportionale Reibungskräfte in der Luft**.

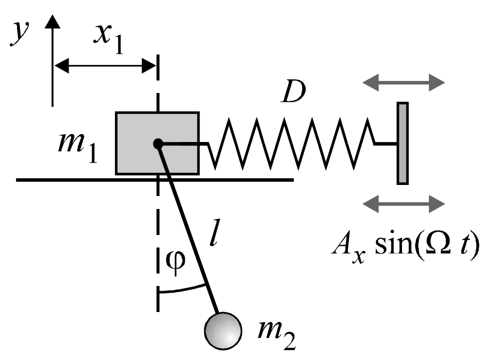

Abb. 2 Der Quader mit Masse m_1 gleitet *reibungsfrei auf einer glatten Schiene*. Er wird durch eine harmonische Federkraft und durch ein hin und her schwingendes Pendel angetrieben.

Die Masse der Pendelstange und das Trägheitsmoment der Pendelkugel werden vernachlässigt.

Die Pendelmasse m_2 kann bei der numerischen Berechnung von Benutzer gleich Null gewählt werden. In diesem Fall werden die Dgln. eines angeregten linearen Oszillators mit laminarer Luftreibung gelöst. Die Variablen $\varphi(t), \dot{\varphi}(t)$ und die Fadenspannung werden gleich Null gesetzt. In diesem Fall wird das Pendel bei der Animation nicht gezeichnet.

Besonderheiten des Systems

Die angeregten Schwingungen des gleitenden Quaders werden durch kleine Pendelschwingungen geschwächt, wenn die Frequenz Ω der Anregung näherungsweise gleich der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ der (kleinen) Pendelschwingung ist. Die Animationen mit MECHANICUS zeigen deutlich, dass in diesem Fall das Pendel im Gegentakt zur äußeren Anregung schwingt, so dass die horizontalen Kräfte auf den gleitenden Quader minimiert werden.

Das Gleitpendel kann die Schwingungstilgung in hohen Bauwerken, die durch Erdbeben oder Wirbelstürme gefährdet sind, veranschaulichen.

Ein besonders spektakuläres Beispiel für die Schwingungstilgung in hohen Gebäuden ist der Wolkenkratzer „Taipei 101“, der im Jahre 2003 in Taipei, der Hauptstadt von Taiwan, fertig gestellt wurde; die Zahl 101 im Namen ist gleich der Zahl der Stockwerke. Ohne Antennen beträgt die Gebäudehöhe 448 m. Zur Tilgung von Schwingungen, die durch Erdbeben und Taifunen angeregt werden können, hat ‚Taipei 101' drei Schwingungstilger; der größte ist ein Pendel mit einer 662 Tonnen schweren Stahlkugel und einer Pendellänge von 42 m. Das Pendel ist im 92-ten Stockwerk aufgehängt und kann Gebäudeschwingungen um bis zu 40% schwächen. Bei kleinen Amplituden ist die Schwingungsdauer

$$T_{\text{Pendel}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 13{,}0\ \text{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega_{\text{Pendel}} \approx 0{,}48\ \frac{1}{\text{s}}$$

Mit DIN 1055-4 kann die Schwingungsdauer der kleinsten Eigenfrequenz von Hochhäusern der Höhe h mit der folgenden, empirisch ermittelten Formel äußerst grob abgeschätzt werden:

$$T_1 \approx \frac{h}{46}\ \frac{\text{s}}{\text{m}}$$

Für Taipei 101 folgt $T_1 \approx 9{,}7\ \text{s}$. Dieser Wert liegt in der Größenordnung von $T_{\text{Pendel}} \approx 13\ \text{s}$.

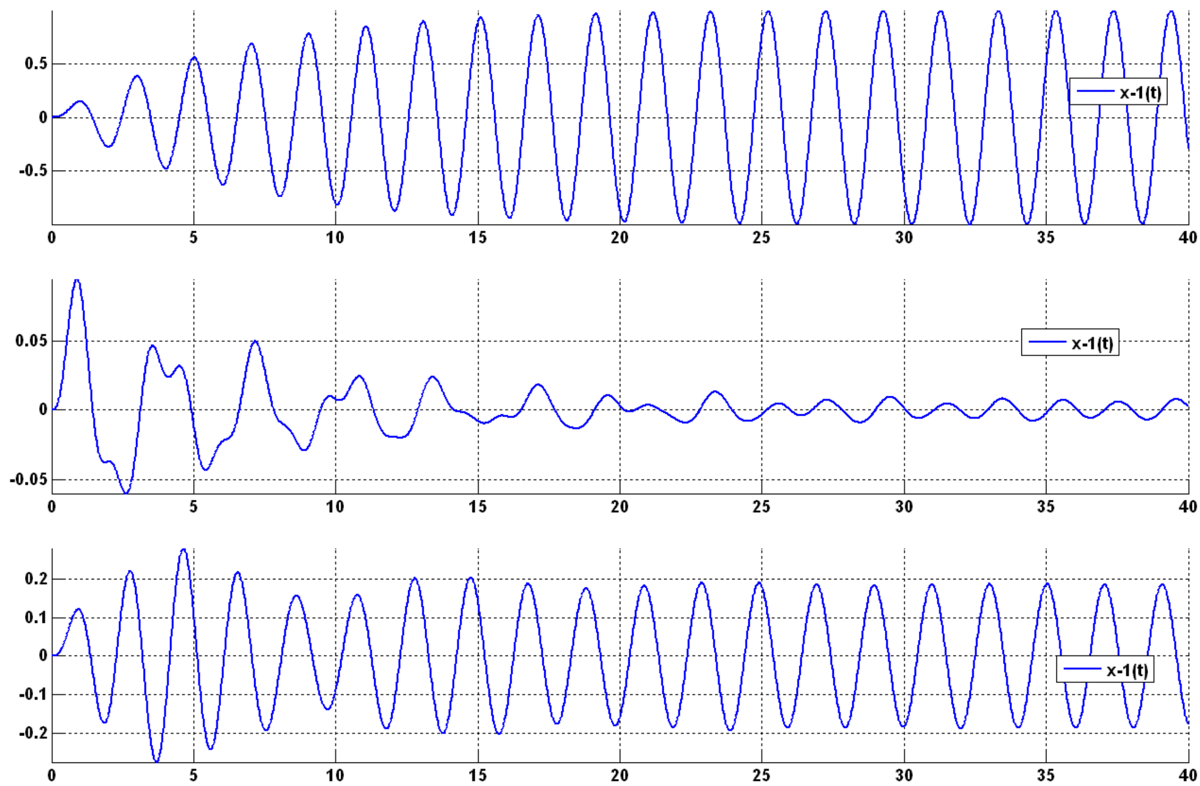

Abb. 3 Die <u>obere</u> <u>Kurve</u> zeigt die Schwingung $x_1(t)$ ohne angehängtes Pendel. Alle vier Anfangsbedingungen sind Null. Die Parameter lauten

$$m_1 = 1\,\mathrm{kg} \qquad D = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \qquad A_x = 0{,}1\,\mathrm{m} \qquad \Omega = 3{,}1\,\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad c_1 = 0{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Die <u>mittlere</u> <u>Kurve</u> zeigt die getilgte Schwingung $x_1(t)$, wenn ein Pendel eingehängt wird, dessen Eigenfrequenz ω_0 ungefähr gleich der anregenden Frequenz Ω ist. Die vier Anfangsbedingungen sind Null. Die Parameter sind mit den oben genannten Parametern identisch. Das eingehängte Pendel hat die (zusätzlichen) Parameter

$$m_2 = 1\,\mathrm{kg} \qquad l = 1\,\mathrm{m} \qquad c_2 = 0{,}2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kleine} \\ \text{Schwingungen}}}{=} \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 3{,}13\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Man erkennt unschwer, dass – unter Berücksichtigung der Einschwingung – das Pendel über 90% der Schwingungen von x_1 tilgt.

Die <u>untere</u> <u>Kurve</u> zeigt die getilgte Schwingung für die Pendellänge $l = 3\,\mathrm{m}$ gesetzt. Da die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l} \approx 1{,}81/\mathrm{s}$ jetzt stark von der Anregungsfrequenz $\Omega = 3{,}1/\mathrm{s}$ abweicht, werden hier nur etwa 70% der Schwingungen getilgt.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die zwei *expliziten* Dgln. lauten:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l\left(1-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\varphi\right)} *$$

$$* \left[\frac{m_2}{m_1+m_2}\, l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi - \frac{D}{m_1+m_2}\left\{x_1 - A_x \sin(\Omega\, t)\right\}\cos\varphi \right.$$

$$- \frac{c_1+c_2}{m_1+m_2}\,\dot{x}_1\cos\varphi - \frac{c_2}{m_1+m_2}\, l\,\dot{\varphi}\cos^2\varphi + \frac{c_2}{m_2}\left(\dot{x}_1\cos\varphi + l\,\dot{\varphi}\right) \qquad \text{(1a)}$$

$$\left. + g\sin\varphi \right]$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{\cos\varphi}\left[l\,\ddot{\varphi} + g\sin\varphi + \frac{c_2}{m_2}\left(\dot{x}_1\cos\varphi + l\,\dot{\varphi}\right)\right] \qquad \text{(1b)}$$

Die Dgl. (1b) hat bei $\varphi = \pi/2$ eine Singularität.

Beachte, dass Gl. (1b) eine nicht-explizite Gl. sein darf, weil $\ddot{\varphi}$ bereits zuvor in Gl. (1a) berechnet wurde.

Hinweis: Für numerische Lösungen können die Dgln. in Form der Gln. (1a/b) in MatLab eingegeben werden, wobei allerdings Gl (1a) *vor* Gl. (1b) stehen muss.

Bei äußerer Anregung und großen Pendelausschlägen ist das System **chaotisch**. Die Dgln. (1a/b) können daher nicht allgemein analytisch gelöst werden. Für kleine Pendelausschläge ($\varphi << 1$) können die Dgln. aber linearisiert werden. Dann ist eine analytische Lösung mit dem bekannten Exponentialansatz für gekoppelte, lineare Schwingungen relativ leicht möglich und die Schwingungstilgung kann an Hand der berechneten Lösungen $\varphi(t)$, $x_1(t)$ mathematisch untersucht werden.

Ohne Reibung ($c_1 = c_2 = 0$) und ohne Feder ($D = 0$) hat das System zwei Erhaltungsgrößen: Energie E und Impuls p. Dieses System ist nicht chaotisch.

Literatur

Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 9–10 (hier ist D = 0) und vor allem Aufgabe 13–9, Teil c.