Seilschwinger

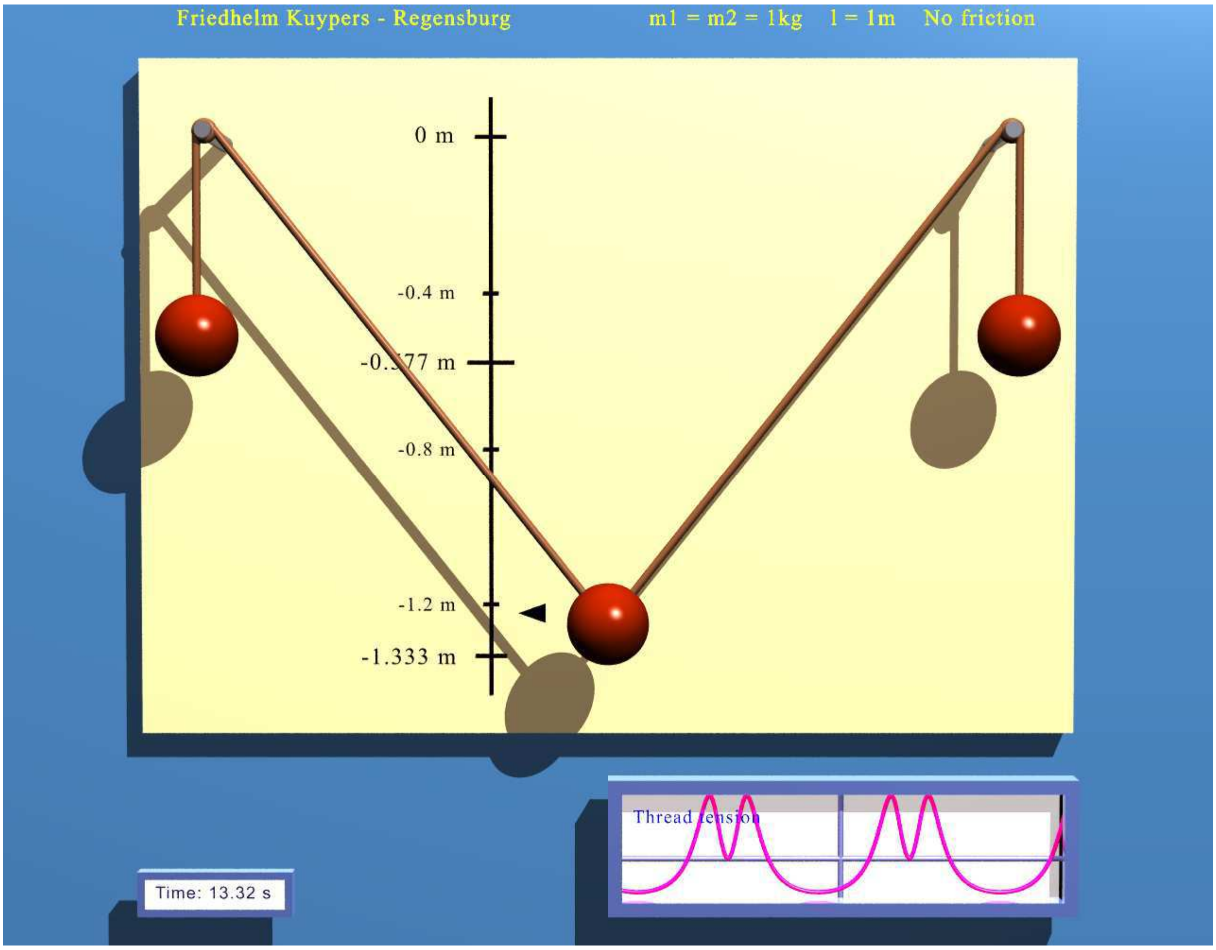

Abb. 1 **POV-Ray-Animation** des ungedämpften Seilschwingers mit drei gleich schweren Kugeln. Die zugehörigen numerisch berechneten Kurven werden in Abb. 4 weiter unten dargestellt.

Der Kurvenschreiber rechts unten in der Abb. zeigt die Seilspannung (Thread tension) als Funktion der Zeit. Auf der Abszisse ist die Seilspannung gleich der Gewichtskraft der äußeren Kugel (siehe Abb. 4).

Zwei kleine, masselose Rollen im Abstand $2\,l$ liegen auf gleicher Höhe. Über die Rollen werden zwei masselose, nicht dehnbare Seile mit genügend großer Länge gelegt. Die Seile verbinden die beiden äußeren Kugeln mit jeweiliger Masse m_2 mit der inneren Kugel mit Masse m_1. Alle drei Kugeln schwingen aufgrund der Anfangsbedingungen nur parallel zur vertikalen x-Achse auf und ab.

Die Perle mit Masse m_1 unterliegt einer geschwindigkeitsproportionalen Luft-Reibungskraft $F_R = -\,c_1\,\dot{x}_1$. Der Einfachheit halber werden für die beiden äußeren Kugeln keine Reibungskräfte unterstellt.

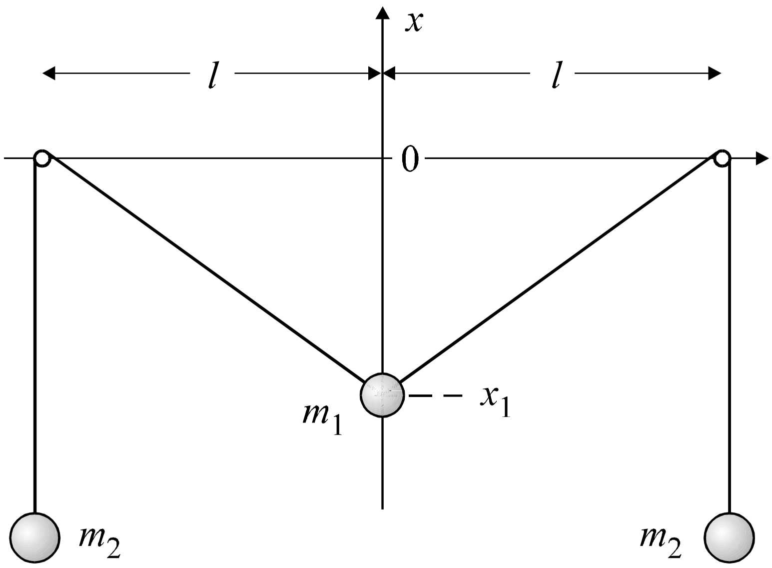

Abb. 2 Zwei Seile werden über zwei masselose Rollen gelegt und verbinden die beiden äußeren Kugeln mit der mittleren Kugel.

Differentialgl. (abgekürzt Dgl.)

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{m_1 + 2\,m_2 \dfrac{x_1^2}{l^2 + x_1^2}} \left[2\,m_2 \frac{x_1\,\dot{x}_1^2\,l^2}{\left(l^2 + x_1^2\right)^2} + g\left(m_1 + 2\,m_2 \frac{x_1}{\sqrt{l^2 + x_1^2}} \right) \right] - \frac{c_1}{m_1}\,\dot{x}_1 \quad (1)$$

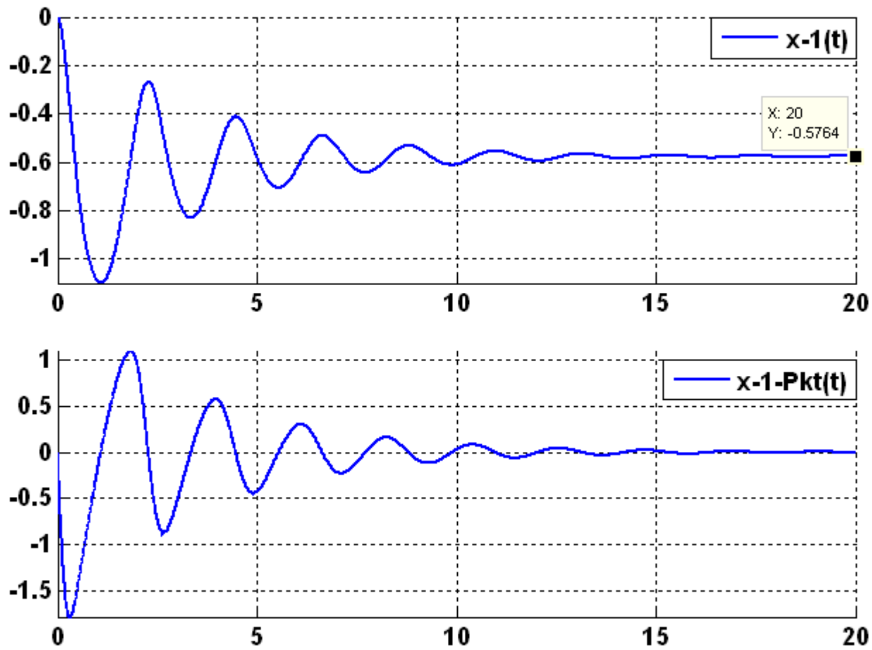

Abb. 3 Die Kurven $x_1(t)$ und $\dot{x}_1(t)$ wurden für die Anfangsbedingungen und Parameter

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \qquad m_1 = m_2 = 1\text{ kg} \qquad l = 1\text{ m} \qquad c_1 = 0{,}6\text{ kg/s}$$

numerisch berechnet. Aus dem Gleichgewicht der vertikalen Komponenten der drei Kräfte, die an der mittleren Masse angreifen, lässt sich leicht nachweisen, dass die mittlere Masse bei diesen Parametern an der Stelle $x_{\text{End}} = -\,l/\tan 60° \approx -\,0{,}577$ m zur Ruhe kommt.

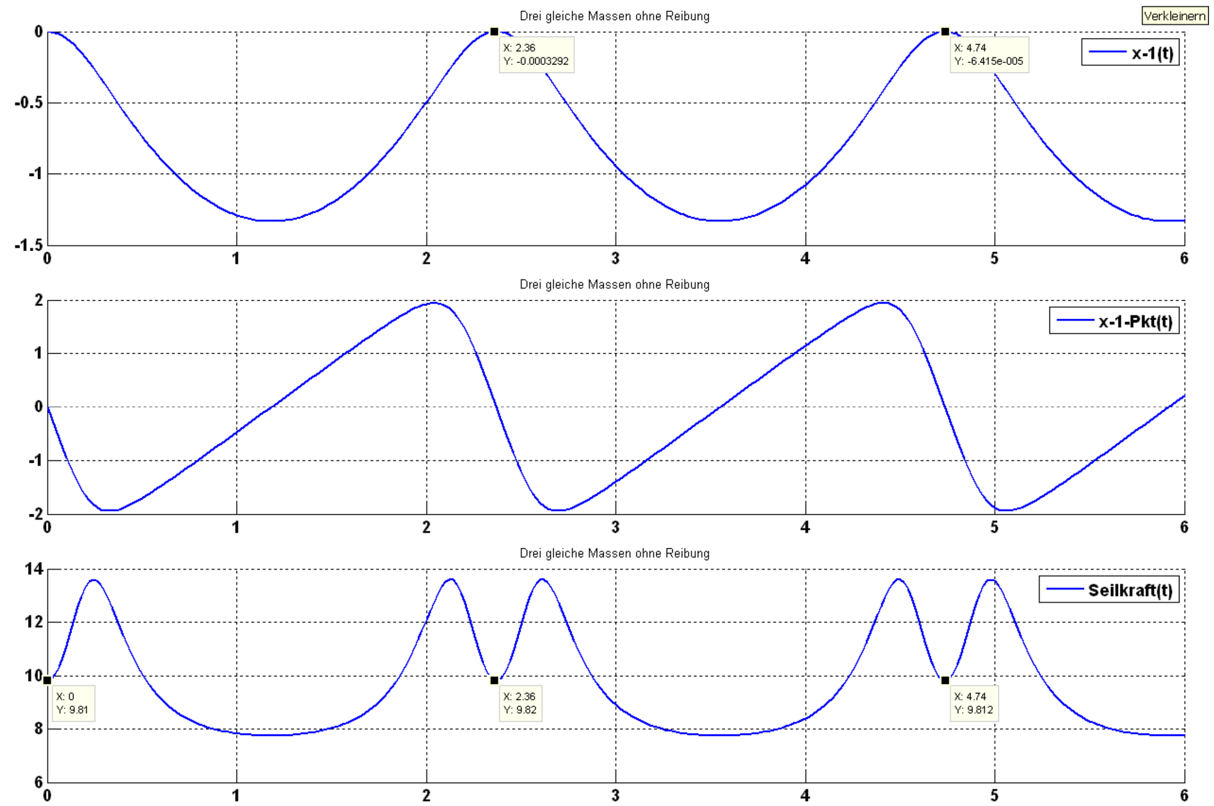

Abb. 4 Die Kurven $x_1(t)$ und $\dot{x}_1(t)$ wurden für die Anfangsbedingungen und Parameter

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \qquad m_1 = m_2 \qquad l = 1\,\mathrm{m} \qquad c_1 = 0$$

numerisch berechnet. Mit dem Energieerhaltungssatz lässt sich leicht zeigen, dass die mittlere Masse bei diesen Anfangsbedingungen und Parametern hinab schwingt bis nach

$$x_{\min} = -4/3\; l \approx -1{,}33\; l = -1{,}33 \text{ m} .$$

Die Maxima der Geschwindigkeitsbeträge $\left|\dot{x}_{1,\max}\right| \approx 1{,}945$ m/s werden *oberhalb* der Gleichgewichtslage $x_{\mathrm{End}} \approx -0{,}577\; l$ erreicht, weil – nach der Dgl. (1) – die Beschleunigung $\ddot{x}_1$ *nicht alleine* durch die vertikalen Komponenten der Gewichtskräfte verursacht wird.

Besonderheiten des Systems

Wenn die mittlere Kugel mit Masse m_1 aus einer Höhe $x_1 > 0$ herab fällt, so ändert sich ihre Geschwindigkeit bei jeder Passage des Nullpunktes $x_1 = 0$ sehr stark (siehe Abb. 5). Die große Beschleunigung der mittleren Kugel in der Umgebung des Nullpunktes wird durch eine extrem große Spannkraft der beiden Seile verursacht, die auf eine starke Beschleunigung der beiden äußeren Kugeln zurückzuführen ist. Bei der Animation ist die hohe Beschleunigung der äußeren Kugeln beim Nulldurchgang von m_1 gut zu erkennen.

Animation

Wenn $\left| x_1(t) \right|$ bei der Bewegung wesentlich größer wird als die Länge l, so ist eine sinnvolle Animation nicht mehr möglich, da die Höhe des Bildes die Breite wesentlich übersteigt.

Literatur

Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 5–19.

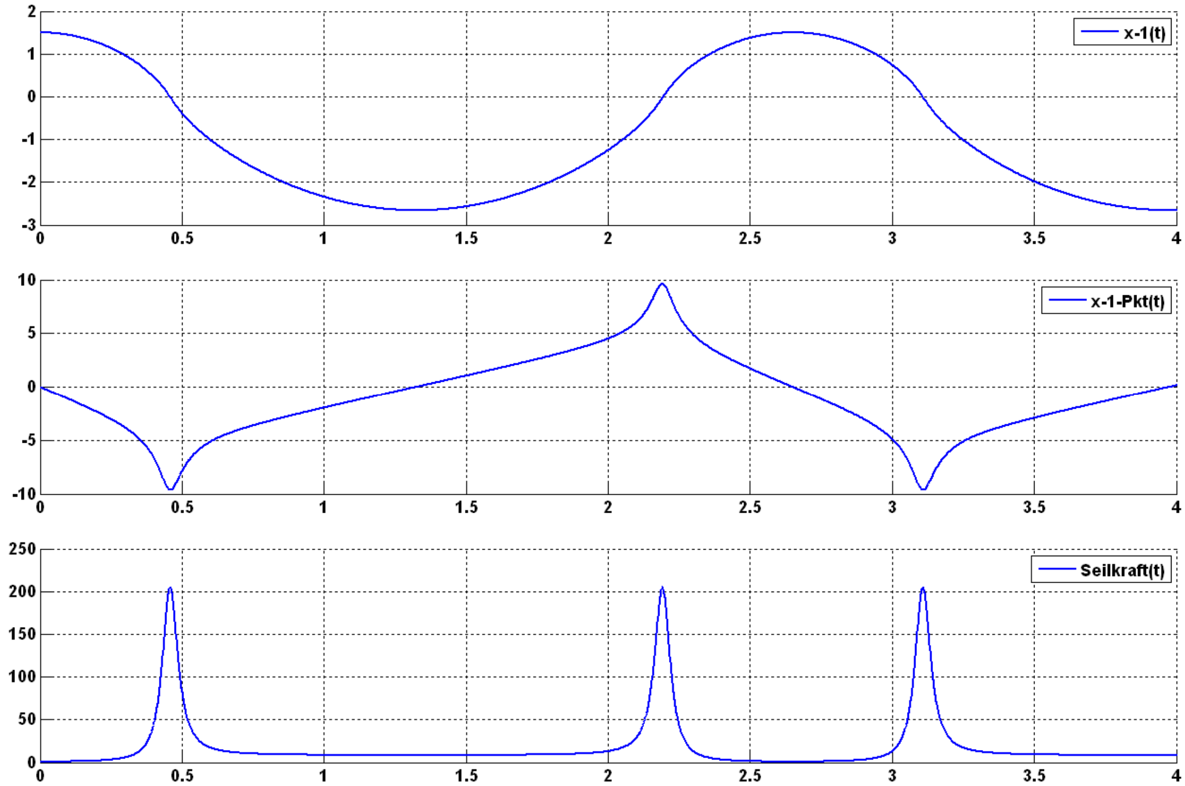

Abb. 5 Die Kurven $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$ und Seilkraft(t) wurden für die Anfangsbedingungen und Parameter

$$x_1(0) = 1{,}5\text{ m} \qquad \dot{x}_1(0) = 0 \qquad m_1 = 1\text{ kg} \qquad m_2 = 2\text{ kg} \qquad l = 1\text{ m} \qquad c_1 = 0$$

berechnet. Bei den Nulldurchgängen der inneren Kugel sind die Seilkräfte extrem hoch.

Die Seilkraft beträgt

$$F_S = m_2 \left(g + \ddot{x}_2 \right)$$

Mit $\quad x_2 = -\text{Seillänge} + \sqrt{x_1^2 + l^2}$

folgt: $\quad \ddot{x}_2 = \dfrac{l^2\, \dot{x}_1^2 + x_1\, \ddot{x}_1 \left(x_1^2 + l^2 \right)}{\left(x_1^2 + l^2 \right)^{3/2}}$

Einsetzen in die Gl. für die Seilkraft ergibt:

$$F_S = m_2 \left[g + \frac{l^2\, \dot{x}_1^2}{\left(x_1^2 + l^2 \right)^{3/2}} + \frac{x_1\, \ddot{x}_1}{\sqrt{x_1^2 + l^2}} \right]$$