Van der Polscher Oszillator

Im Jahr 1926 hat der holländische Ingenieur van der Pol die Dgl.

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0 \qquad \text{mit } \varepsilon > 0 \qquad (1)$$

aufgestellt. Sie beschreibt die elektronischen Schwingungen einer rückgekoppelten Generatorschaltung (damals noch mit Röhren; siehe Abb. 1) und ist ein Spezialfall des Dgl-Typs

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0$$

Gl. (1) erinnert an die Dgl.

$$\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \qquad (2)$$

eines freien, gedämpften linearen Oszillators. Der ortsabhängige „Reibungsfaktor“ $\varepsilon\,(x^2 - 1)$ in Gl. (1) ersetzt den konstanten Faktor $2\,\gamma$ in Gl. (2). Für kleine Schwingungen ist der „Reibungsfaktor“ $\varepsilon\,(x^2 - 1)$ negativ, so dass die Schwingungen angefacht werden. Für große Schwingungsamplituden ist der „Reibungsfaktor“ positiv; die Schwingungen werden gedämpft.

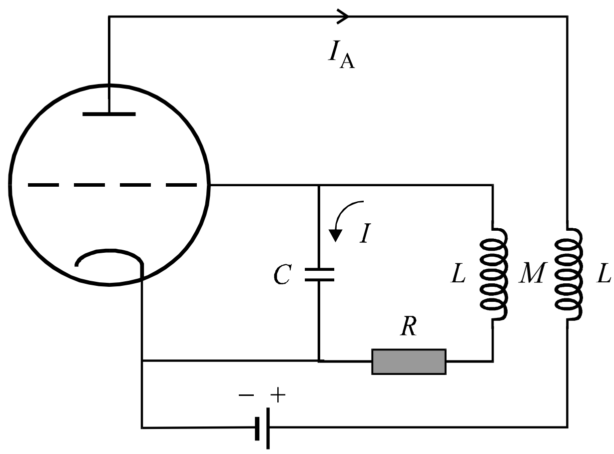

Abb. 1 Schaltskizze eines Röhrengenerators.

Wenn man die Kennlinie $I_A(U_G)$ – mit der Gitterspannung U_G – durch ein Polynom dritten Grades approximiert, so führt die Maschengl. für den LRC-Schwingkreis auf die van der Polsche Dgl. (1).

Die nichtlineare Dgl. (1) ist **nicht analytisch lösbar**. Die Kuven in Abb. 2 wurden daher numerisch berechnet. Abb. 2 zeigt – von oben nach unten – für $\varepsilon = 0{,}3$; 3 ; 30 die Trajektorien $x(t)$ und die Phasenbahnen $\dot{x}(x)$ – einschließlich der Einschwingungen.

Die Gleichgewichtslage $x(t) = \dot{x}(t) = 0$ ist eine instabile Lösung. Alle Kurven, die außerhalb dieser Gleichgewichtslage starten, laufen auf eine **periodische**, **stabile**, **stationäre Schwingung** zu. Die stationäre Schwingung zieht also von beiden Seiten alle Bahnen an. Sie ist daher ein **Attraktor** und heißt „Grenzzyklus“ oder „Grenzkurve“.

Für sehr kleine Parameter ε beschreibt der Attraktor nahezu harmonische Schwingungen. Für große ε beschreibt der Attraktor eine sprungartige Schwingung, die Ähnlichkeit mit dem Herzschlag hat. Solche sog. Relaxationsschwingungen sind lange Zeit nahezu in Ruhe und ändern sich anschließend in kurzer Zeit sehr stark. Danach verharren sie lange Zeit praktisch wieder in Ruhe usw.

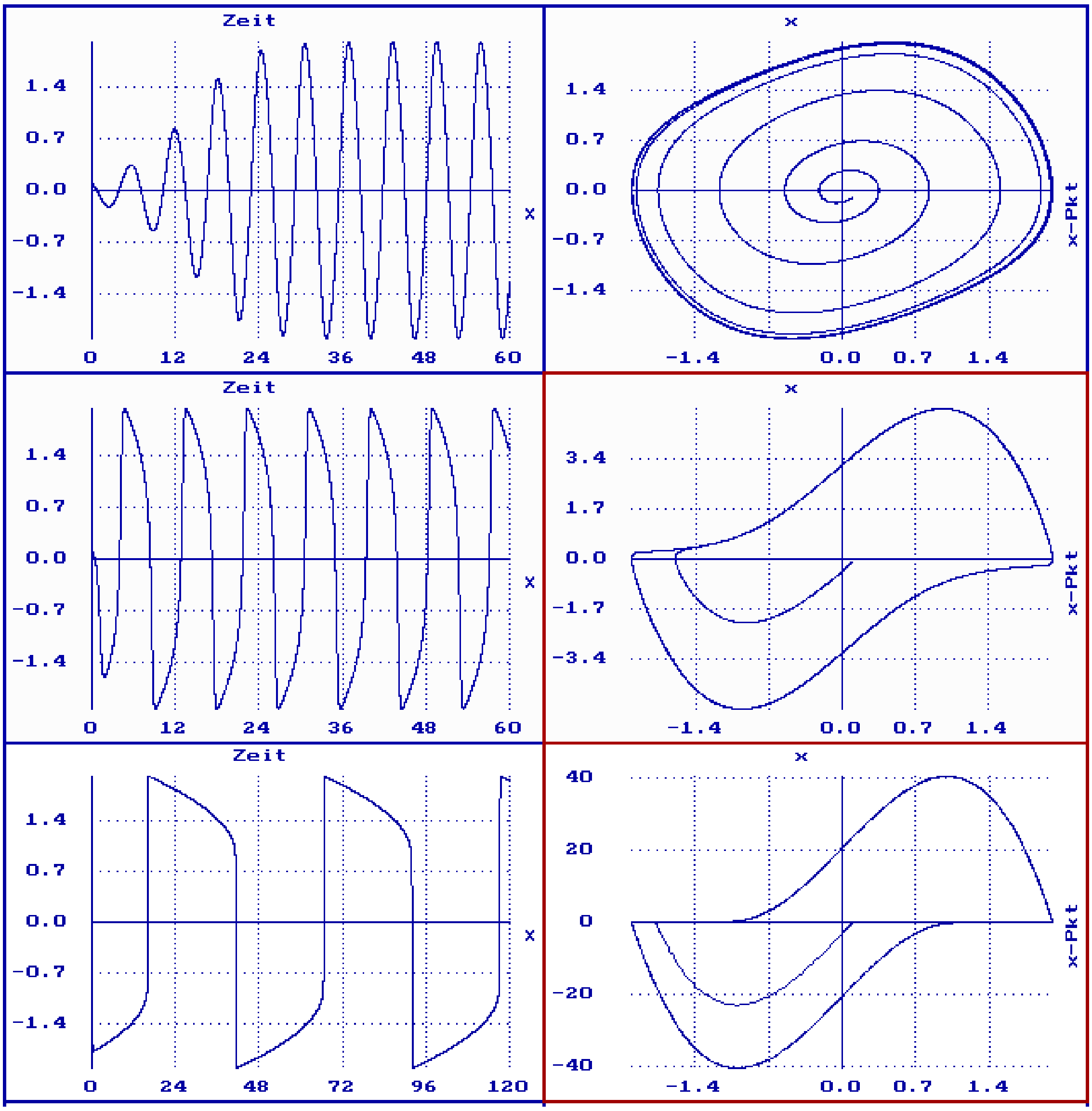

Abb. 2 Van der Polsche Gl. Die numerisch berechneten Kurven zeigen die Schwingung des Van der Polschen Generators mit $F_0 = 0$. Die drei linken Fenster zeigen $x(t)$, die drei rechten Fenster $\dot{x}(x)$. Die Anfangsbedingungen sind in allen Fenstern gleich: $x_0 = 0{,}1$; $\dot{x}_0 = -0{,}1$. Die Parameter lauten: Obere Fenster : $\varepsilon = 0{,}3$ Mittlere Fenster : $\varepsilon = 3$ Untere Fenster : $\varepsilon = 30$

Gelegentlich wird auch der periodisch angetriebene van der Pol Oszillator mit der Dgl.

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(x^2 - 1 \right) \dot{x} + x = F_0 \cos(\Omega\, t) \qquad \text{mit } \varepsilon > 0 \tag{3}$$

betrachtet.

Numerische Lösungsverfahren

Bei großen zweistelligen oder gar bei dreistelligen Parametern ε ist die van der Polsche Dgl. steif, so dass in diesem Fall steife Lösungsverfahren wie z. B. ode15s empfehlenswert sind.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 14–4. In Aufgaben 14–4c wird die Dgl. (1) aus der Röhrenkennlinie abgeleitet.