Drei gekoppelte Oszillatoren

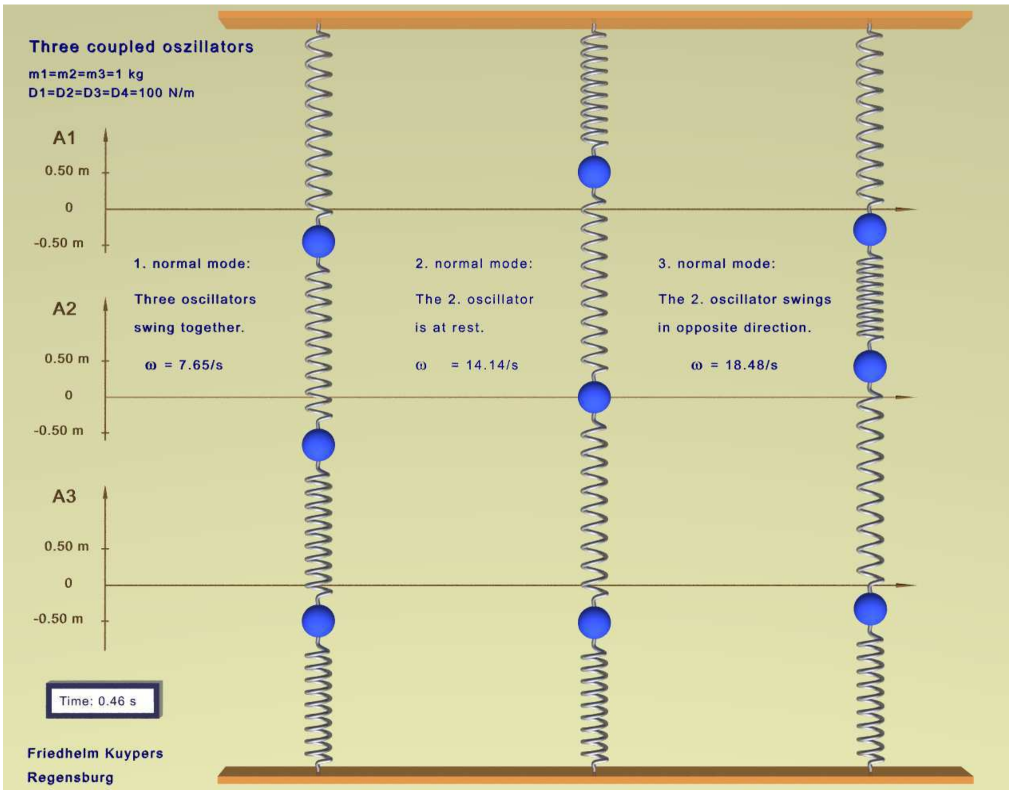

Abb. 1 Momentaufnahme einer fotorealistischen POV-Ray-Animation. Hier werden für gleiche Massen und gleiche Federkonstanten die drei Normalschwingungen animiert.

Drei gekoppelte, gedämpfte, harmonische Oszillatoren hängen an der Decke, die harmonisch auf und ab bewegt werden kann. Der untere Oszillator ist mit dem festen Boden verbunden.

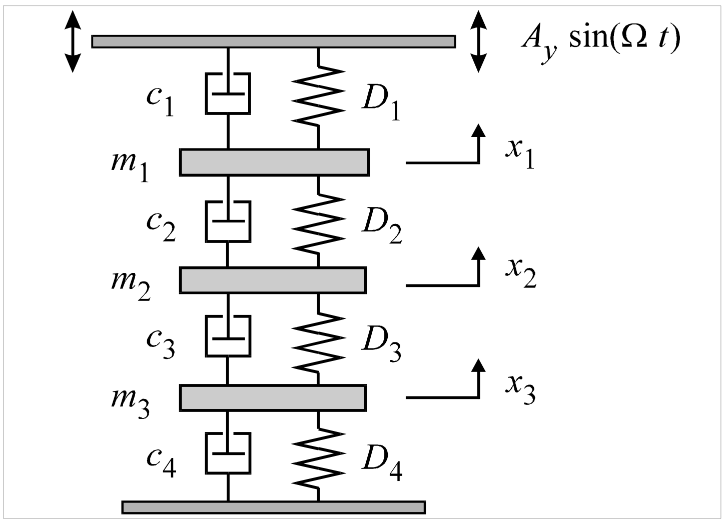

Abb. 2 Drei lineare, gekoppelte Oszillatoren mit geschwindigkeitsproportionalen Reibungskräften.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

$$m_1\,\ddot{x}_1 = -D_1\left[x_1 - A_y \sin(\Omega t)\right] - D_2\left[x_1 - x_2\right]$$

$$-c_1\left[\dot{x}_1 - A_y\,\Omega\cos(\Omega t)\right] - c_2\left[\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right]$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 = -D_2\left[x_2 - x_1\right] - D_3\left[x_2 - x_3\right] - c_2\left[\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right] - c_3\left[\dot{x}_2 - \dot{x}_3\right]$$

$$m_3\,\ddot{x}_3 = -D_3\left[x_3 - x_2\right] - D_4\,x_3 - c_3\left[\dot{x}_3 - \dot{x}_2\right] - c_4\,\dot{x}_3$$

Besonderheiten des Systems

Für die Parameter

$$m := m_1 = m_2 = m_3 \qquad D := D_1 = D_2 = D_3 = D_4 \tag{1a}$$

$$0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \qquad A_y = 0 \tag{1b}$$

hat das lineare System folgende drei **Normallösungen**:

1) $x_1(t) = x_3(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad x_2(t) = \sqrt{2}\,x_1(t)$

mit $\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{\frac{D}{m}} \approx 0{,}765\sqrt{\frac{D}{m}}$

2) $x_1(t) = -x_3(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad x_2(t) = 0$

mit $\omega = \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{D}{m}} \approx 1{,}414\sqrt{\frac{D}{m}}$

3) $x_1(t) = x_3(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad x_2(t) = -\sqrt{2}\,x_1(t)$

mit $\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sqrt{\frac{D}{m}} \approx 1{,}848\sqrt{\frac{D}{m}}$

Für die Parameter

$$m_1 = m_3 \qquad m_2 = \text{beliebig} \qquad D := D_2 = D_3 \qquad D_1 = D_4 = 0$$

$$0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 \qquad A_y = 0$$

beschreibt das System ein **lineares dreiatomiges Molekül**. Es hat folgende drei **Normallösungen**:

1) Die erste Normallösung mit $\omega_1 = 0$ beschreibt eine gleichförmige Translation des Moleküls.

2) $x_1(t) = -\,x_3(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad x_2(t) = 0$

mit $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m_1}}$

3) $x_1(t) = x_3(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad x_2(t) = -\dfrac{2\,m_1}{m_2}\,x_1(t)$

mit $\omega = \sqrt{1 + \dfrac{2\,m_1}{m_2}}\,\sqrt{\dfrac{D}{m_1}}$

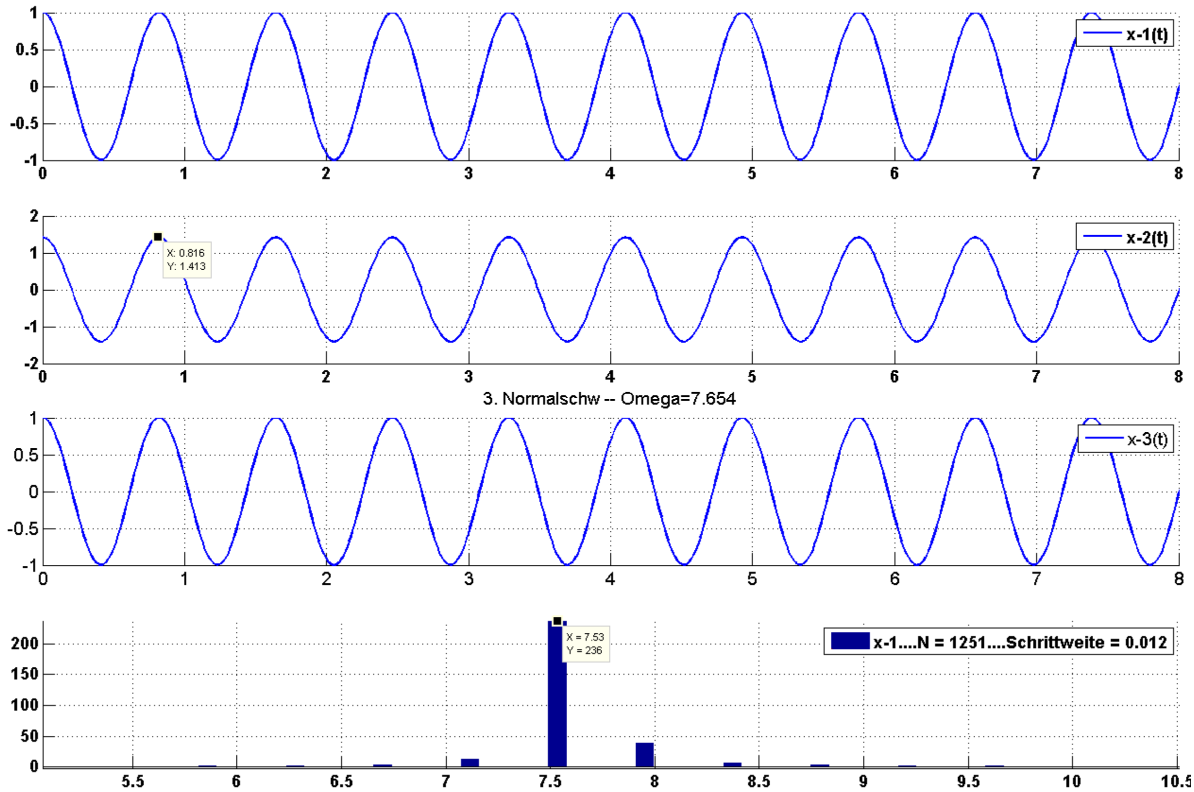

Abb. 3 Erste Normallösung für die Parameter in den Gln. (1a/b) mit $\sqrt{D/m} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$. Die Eigenfrequenz der Schwingungen beträgt

$\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 10\ \mathrm{s}^{-1} \approx 7{,}65\ \mathrm{s}^{-1}$ (Siehe auch die FFT im 4. Fenster dieser Abb.)

Literatur

- Mir ist keine deutschsprachige Literatur für das allgemeine System bekannt.

- H. Goldstein/C. Poole/J. Safko: Klassische Mechanik, Wiley-VCH-Verlag. Hier wird ein lineares dreiatomiges Molekül als Spezialfall untersucht.
- W. Greiner: Mechanik Teil 2, Verlag Harri Deutsch. Auch hier wird ein lineares dreiatomiges Molekül als Spezialfall untersucht.