Ball rollt auf rotierender Scheibe

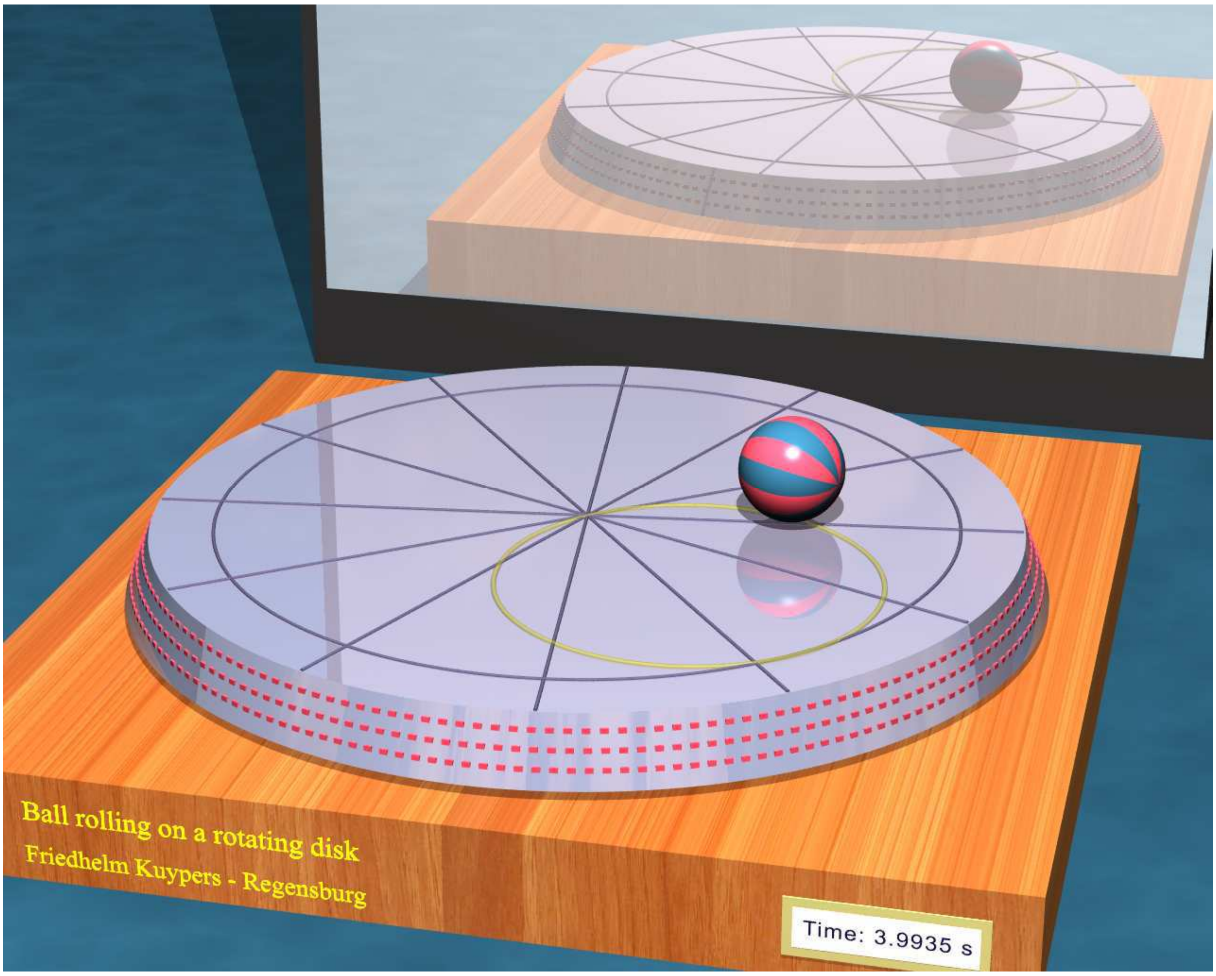

Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Ein Ball rollt ohne Schlupf und ohne Reibungsverluste auf einer (hier horizontalen) Scheibe, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Dabei läuft der Ball erstaunlicherweise auf einer raumfesten Kreisbahn. Die Kreisbahn wird als dünne, gelblich transparente Spur dargestellt.

Auf dem abgeschrägten Mantel der rotierenden Scheibe sind drei Reihen kleiner, rötlicher Quader mit jeweils verschiedenen Quader-Abständen fest angeordnet. Die Animation zeigt den Stroboskop-Effekt - auch „Wagenrad-Effekt" genannt. Dieser vom Fernsehen bekannte Effekt bezeichnet die scheinbar umgekehrte oder verlangsamte Drehung von Rädern.

Ein Ball mit Masse *m*, Radius *R* und Trägheitsmoment I_S für Drehungen um den Schwerpunkt rollt **ohne Schlupf** und ohne Reibungsverluste auf einer kreisrunden Scheibe, die mit **konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um ihre Symmetrieachse rotiert**. Die rotierende Scheibe hat den **Neigungswinkel α** gegenüber einer horizontalen Ebene.

Die raumfesten x- und y-Achsen des verwendeten Bezugsystems liegen auf der rotierenden Scheibe, der Koordinatenursprung liegt auf der Drehachse. Bei einem Neigungswinkel $\alpha \neq 0$, also bei schräg stehender Scheibe steigt die Höhe eines Punktes auf der Scheibe mit wachsender y-Koordinate und hängt nicht von x ab. Die raumfeste z-Achse fällt mit der Drehachse der Scheibe zusammen und schließt mit der vertikalen Hochachse den Winkel α ein.

Die Bewegung des Balles wird durch die Schwerpunkt-Koordinaten x_S, y_S und die drei Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ beschrieben (Siehe Abb. 2).

Besonderheiten des Systems

Ohne Aufstellung und Lösung der linearen Dgln. können mit der Anschauung nur drei spezielle Bewegungen angegeben werden:

- $\Omega = 0$ und $\alpha = 0$: Auf einer *ruhenden*, *horizontalen* Scheibe rollt der Ball geradlinig und gleichförmig.
- $\Omega = 0$ und $\alpha \neq 0$: Auf einer *ruhenden*, *geneigten* Scheibe rollt der Ball auf einer Parabel.
- $\Omega \neq 0$ und $\alpha = 0$: Dieser Fall beschreibt z. B. einen rotierenden Plattenspieler. Für die speziellen Anfangsbedingungen

$$x_S(0) = x_0 \qquad y_S(0) = 0 \qquad \omega_x(0) = \frac{x_0}{R}\,\Omega \qquad \omega_y(0) = 0$$

  rollt der Ball an der raumfesten Position $(x_0, 0)$. Entsprechende Aussagen können für das Rollen an anderen raumfesten Stellen gemacht werden.

In allen anderen Fällen treten völlig unerwartete und überraschende Bewegungen auf:

- Seien $\Omega \neq 0$ und $\alpha = 0$: Auf einer rotierenden, *horizontalen* Scheibe (Z. B. auf einem rotierenden Plattenspieler) läuft der Ball auf raumfesten Kreisbahnen mit der Umlaufzeit

$$T_{\text{Bahn}} = \frac{I_A}{I_S}\,\frac{2\pi}{\Omega} \underset{\text{homogene Vollkugel}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{7\pi}{\Omega}$$

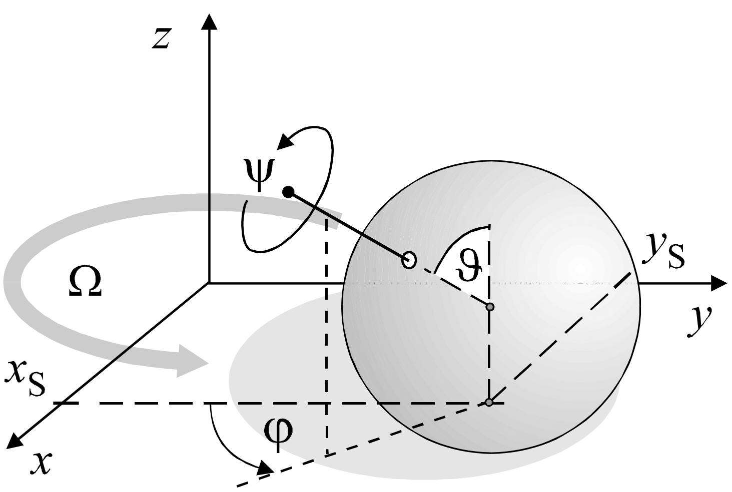

Abb. 2 Ein Ball mit Radius R rollt *ohne Schlupf* auf einer – hier horizontal liegenden, i. Allg. aber geneigten – Scheibe, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um ihre Symmetrieachse rotiert.

mit I_S, I_A = Trägheitsmomente für Drehungen um den Schwerpunkt bzw. um den Auflagepunkt des Balles.

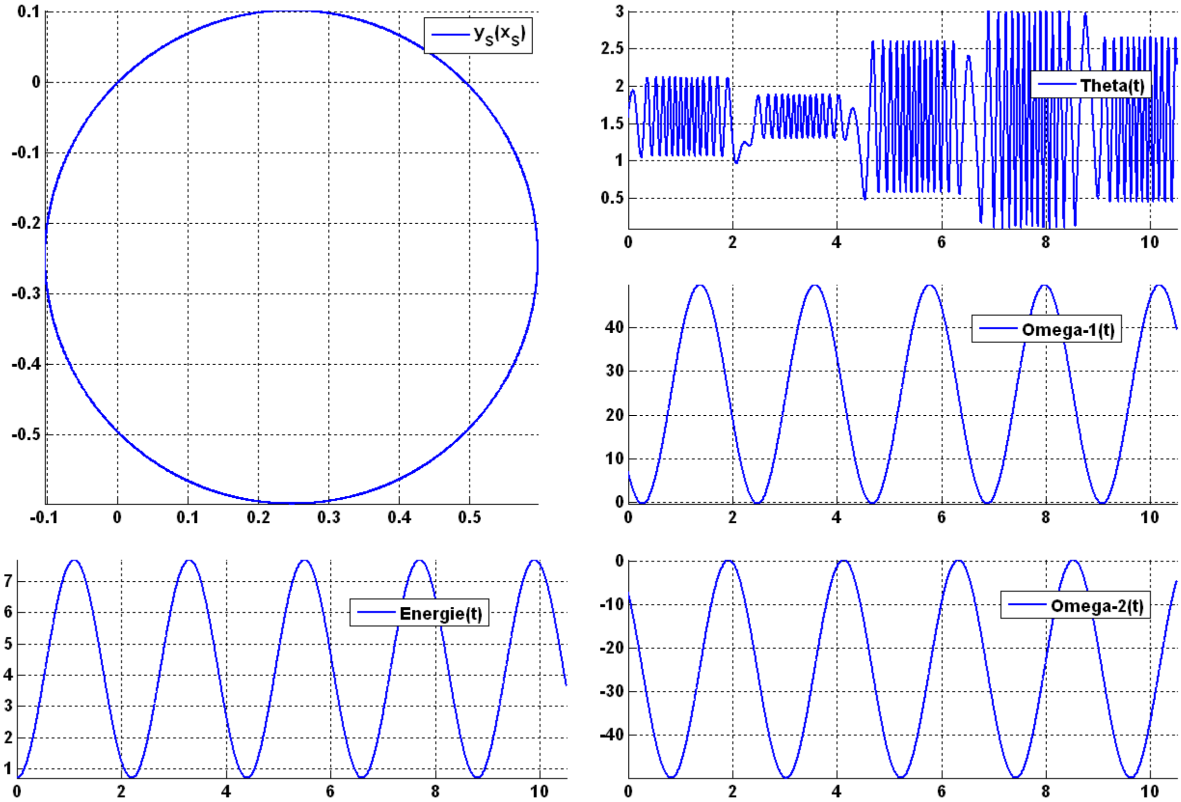

Abb. 3 Eine homogene Vollkugel startet im Koordinatenursprung und rollt im Gegenuhrzeigersinn auf einer horizontalen, rotierenden Scheibe. Das Verhältnis

$$\frac{\text{Haftkraft}}{\text{Normalkraft}} = \frac{\text{Fliehkraft}}{\text{Normalkraft}} = \frac{m\, R_{\text{Bahn}}\, \Omega^2_{\text{Bahn}}}{m\, g} \approx 0{,}291$$

ist so klein, dass Rollen ohne Schlupf auf horizontalen Scheiben leicht möglich ist – falls die Rollreibung vernachlässigt werden kann, also z. B. bei Metallkugeln auf harten Plastikscheiben.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten wie folgt:

$$x_S(0) = y_S(0) = 0 \qquad \dot{x}_S(0) = \dot{y}_S(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = 1\ \text{kg} \qquad I_S = 0{,}004\ \text{kg m}^2 \qquad R = 0{,}1\ \text{m} \qquad \Omega = 10\,\frac{1}{\text{s}} \qquad \alpha = 0°$$

- Seien $\Omega \neq 0$ und $\alpha \neq 0$: Auf einer rotierenden, *geneigten* Scheibe läuft der Ball auf Zykloiden, also schleifenförmigen Bahnen entlang der horizontalen x-Achse (siehe Abb. 4). Der Ball läuft also wider Erwarten nicht den Hang hinab.

Dgln.

Die linearen Dgln. werden in dem Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, 9-te Auflage, Aufgabe 12–16 aufgestellt und analytisch gelöst. Dort wird auch die überraschende Analogie zur Bewegung elektrischer Teilchen in elektromagnetischen Feldern behandelt.

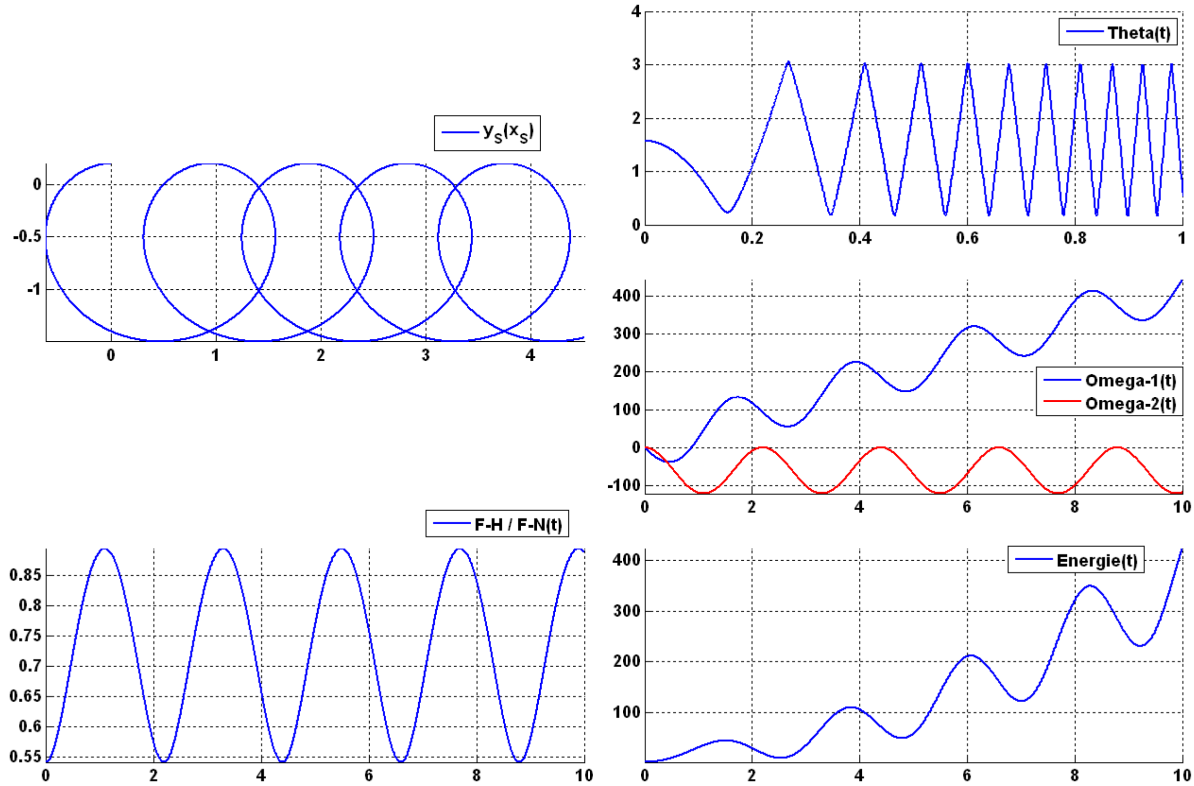

Abb. 4 Eine homogene Vollkugel rollt auf einer *geneigten*, rotierenden Scheibe. Beachte, dass die Kurve für den Neigungswinkel $\vartheta(t)$ nur für die erste Sekunde dargestellt wird, die anderen Kurven aber für 10 s.

Das numerisch berechnete Verhältnis „Haftkraft/Normalkraft" schwankt periodisch: Es ist maximal auf dem unteren Teil und minimal auf dem oberen Teil der Schleifenbahn. Das Maximum von F_H / F_N beträgt etwa 0,9. Daher ist Rollen ohne Schlupf auf geneigten Scheiben nur bei relativ großen Haftreibungszahlen μ_0 möglich.

Die Winkelgeschwindigkeit $\omega_x = \omega_1$ steigt im zeitlichen Mittel linear an, da sich die Scheibe mit wachsender Entfernung von der Drehachse immer schneller unter dem Ball bewegt. Folglich steigt die Energie im zeitlichen Mittel quadratisch.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten folgendermaßen:

$$x_S(0) = 0 \qquad y_S(0) = 0{,}2 \text{ m} \qquad \dot{x}_S(0) = 0 \qquad \dot{y}_S(0) = 0$$

$$m = 1 \text{ kg} \qquad I_S = 0{,}004 \text{ kg m}^2 \qquad R = 0{,}1 \text{ m} \qquad \Omega = 10\,\frac{1}{\text{s}} \qquad \alpha = 10°$$

Numerische Verfahren :

Die MatLab-Verfahren ode113 oder besser noch ode45 sind die geeigneten Verfahren für die numerische Integration der Dgln.

Animation :

Bei der MatLab-Animation wird die Kreisbahn, die der Ball für $\Omega \neq 0$ und $\alpha = 0$ durchläuft, durch einen dünnen Ring, der in geringer Höhe über der rotierenden Scheibe liegt, angedeutet – allerdings nur dann, wenn *mindestens ein* Kreis vollständig durchlaufen wird.

Die Ausdehnung einer Bahn – vor allem einer Zykloidenbahn auf geneigter, rotierender Scheibe – kann evtl. so groß sein, dass der Ball bei MatLab-Animationen kaum zu sehen ist.

Da die rotierende Scheibe bei der MatLab-Animation durchsichtig ist, kann der Anwender die Szene nach einer geeigneten 3D-Drehung auch von unterhalb der Scheibe aus anschauen. So kann der Anwender sich besser davon überzeugen, dass der Ball *ohne Schlupf* rollt.

Für die Animationen wird noch der Zeitverlauf der drei Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ benötigt. Die Eulerschen Winkel werden mit folgenden Dgln. bestimmt:

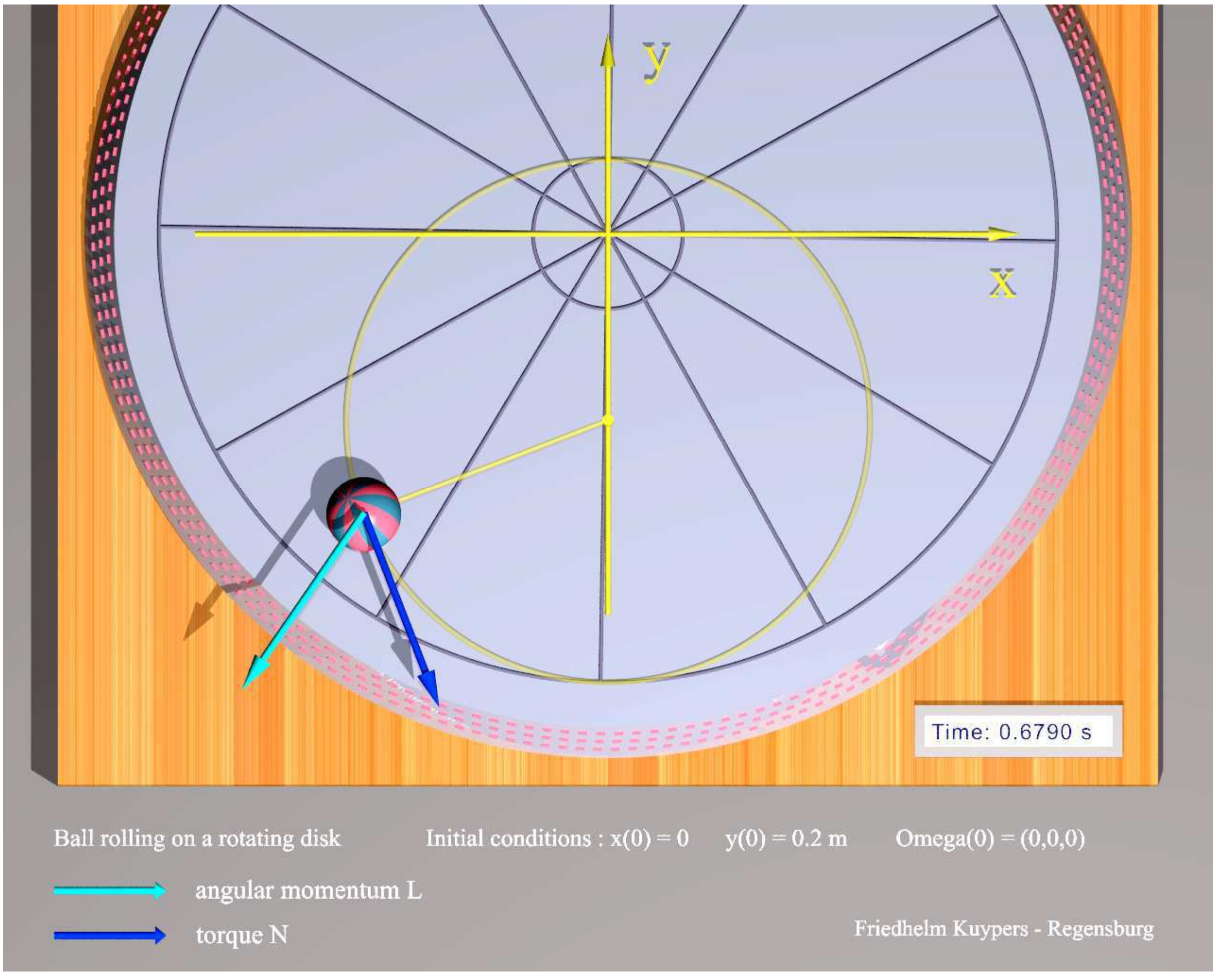

Abb. 6 Diese Momentaufnahme aus dem Film „Omega_0=0 – Mit Vektorpfeilen – 3000 1280x1024.avi“ zeigt eine Aufsicht auf die horizontale, rotierende Scheibe ($\alpha = 0$). Der Film belegt:

- Das durch die Haftreibungskraft verursachte Drehmoment **N** (dunkelblau) hat einen konstanten Betrag und zeigt zu jeder Zeit in die augenblickliche Richtung der Ballgeschwindigkeit.
- Der Drehimpuls **L** (grün) ändert ständig Betrag und Richtung. Die Drehimpulsgl. $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ wird durch die Animation bestätigt.

$$\dot{\varphi} = \omega_z - \cot\varphi \left[\omega_x \sin\varphi - \omega_y \cos\varphi \right]$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_x \cos\varphi + \omega_y \sin\varphi \qquad\qquad \dot{\psi} = \frac{1}{\sin\vartheta} \left[\omega_x \sin\varphi - \omega_y \cos\varphi \right]$$

Vergleich mit Experimenten:

Die theoretischen Ergebnisse lassen sich experimentell relativ leicht belegen, wenn die Rollreibung vernachlässigt werden kann, wenn also z. B. Metallbälle auf harten Plastik- oder Metallscheiben rollen. Robert H. Romer berichtet in Am. J. Phys. **49** (10), Oct. 1981, 985–986, dass er und seine Studenten die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbahn $\omega_{\text{Bahn}} = 2\,\Omega/7$ mit 1% Genauigkeit und die Driftgeschwindigkeit $v_{\text{Drift}} = 5\,g\sin\alpha/(2\,\Omega)$ mit 3% Genauigkeit bestätigt haben.

Bei der Verwendung von weichen Bällen kann die Rollreibung nicht vernachlässigt werden. In diesem Fall treten keine Kreis- bzw. keine Zykloidenbahnen auf. Bei Rollreibung, die durch ein zusätzliches, lineares Drehmoment

$$N_{\text{R}\,x} = -\,c\,\omega_x \qquad N_{\text{R}\,y} = -\,c\,\omega_y \qquad\qquad c = \text{const}$$

in den Drehimpulsgln. beschrieben werden kann, rollt der Ball für verschwindenden Neigungswinkel der Scheibe $\alpha = 0$ letztendlich auf einer Spirale nach außen – wie man es von vorneherein erwartet hat. Siehe hierzu z. B. Am. J. Phys. **62** (2), Feb. 1994, 151–156.

Literatur :

- Friedhelm Kuypers: *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage, Aufgabe 12–16.