Karussell

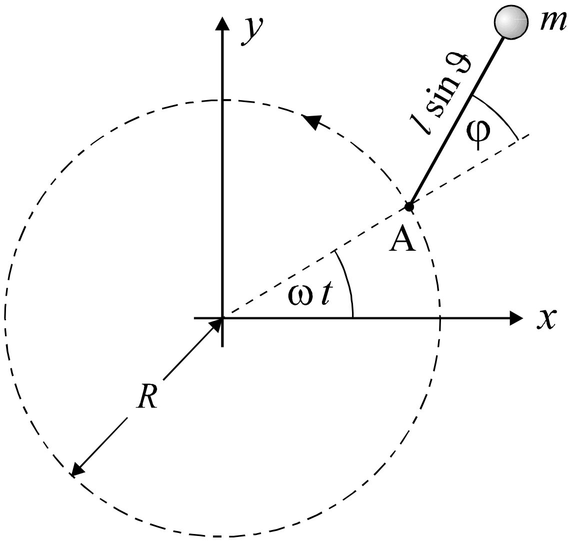

Abb. 1 a Aufsicht auf das Karussell.

Die dargestellten x,y-Achsen sind raumfest.

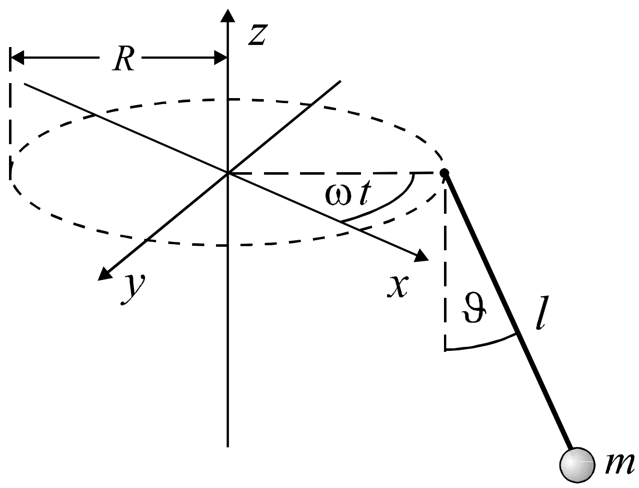

Abb. 1b Seitenansicht des Karussells.

Der Aufhängepunkt A eines sphärischen Pendels mit Länge l und Masse m wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer **horizontalen** Kreisbahn mit Radius R geführt. Zur Zeit $t = 0$ liegt der Aufhängepunkt A auf der x-Achse.

Die Körper mit Masse m erfährt eine geschwindigkeitsproportionale Luftreibung.

Die Winkel φ, ϑ sind wie folgt definiert:

- φ ist am besten bei senkrechter Aufsicht auf das Karussell zu erkennen (siehe die Abb. 1a). Der Winkel zwischen der x-Achse und der horizontalen Projektion der Pendelstange beträgt $\omega t + \varphi$.
- ϑ liegt zwischen Pendelstange und der Hochachse, die senkrecht durch den Punkt A läuft.

Die vier numerisch berechneten Kurven in Abb. 2 zeigen:

1. Die $y(x)$-Kurve (d. h. Aufsicht) der eingehängten Masse m im mitrotierenden System, das fest mit dem rotierenden Karussell verbunden ist. Die rotierende x-Achse läuft durch die vertikale Drehachse des Karussells und den Aufhängepunkt A. Der Koordinatenursprung liegt im Aufhängepunkt A. Die **mitbewegten** Koordinaten lauten

$$\begin{aligned} x(t) &= l \sin\vartheta \cos\varphi \\ y(t) &= l \sin\vartheta \sin\varphi \qquad\qquad z(t) = -\,l \cos\vartheta \end{aligned} \tag{1}$$

2. Die $y(x)$-Kurve (d. h. Aufsicht) der eingehängten Masse m im **Inertialsystem**. Die inertialen Koordinaten lauten:

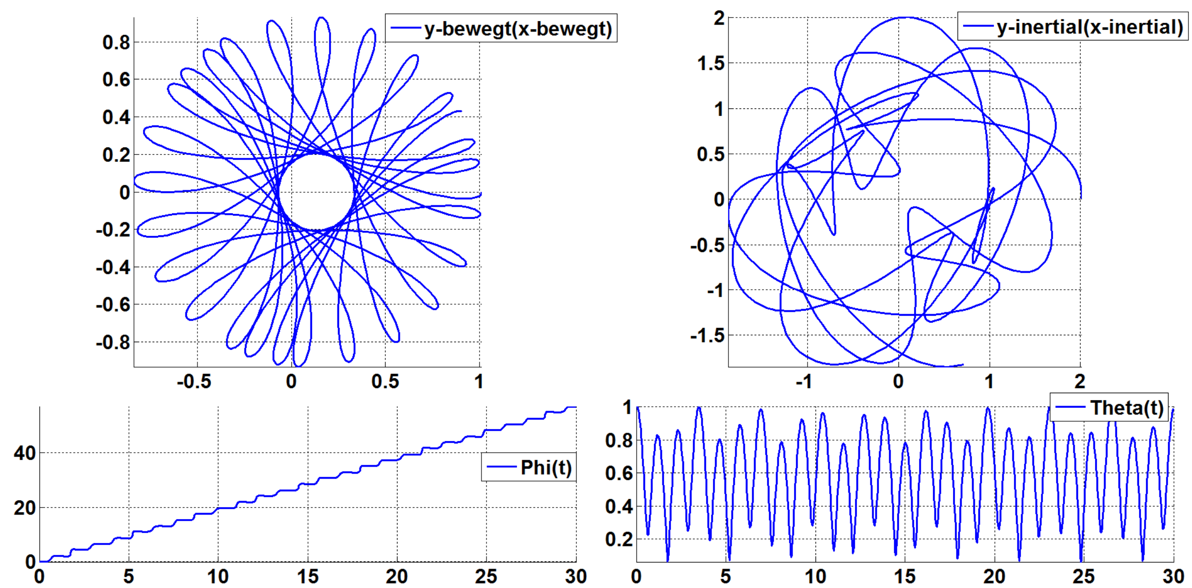

Abb. 2 Die oberen beiden Kurven $y(x)$ zeigen die Aufsicht: Links in einem System, das mit dem Karussell fest verbunden ist, also mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert; rechts im Inertialsystem.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi(0) = 0 \qquad \dot\varphi(0) = -\,0{,}2\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}} \qquad \vartheta(0) = 1\text{ Rad} \qquad \dot\vartheta = 0{,}2\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

$$m = 1\text{ kg} \qquad R = 1\text{ m} \qquad l = 1{,}2\text{ m} \qquad \omega = 1\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}} \qquad \text{Keine Reibung}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t) + l\sin\vartheta\cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) &= R\sin(\omega t) + l\sin\vartheta\sin(\omega t + \varphi) \qquad z(t) = -\,l\cos\vartheta \end{aligned} \tag{2}$$

3. Winkel $\varphi(t)$

4. Winkel $\vartheta(t)$

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Mit den Gln. (2) ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned} L = {}& \frac{m}{2}\left[\dot\vartheta^2 + (\omega + \dot\varphi)^2\sin^2\vartheta\right] \\ & + m R l\,\omega\left[\dot\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + (\omega + \dot\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi\right] \\ & + m g l\cos\vartheta \end{aligned}$$

Mit den Lagrangegln. 2. Art folgen die Bewegungsgln.:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\left[2\,(\omega+\dot{\varphi})\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \frac{R}{l}\,\omega^2\sin\varphi\right] - \frac{c}{m}\left[(\omega+\dot{\varphi}) + \frac{R}{l}\,\omega\,\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\right] \tag{3a}$$

$$\ddot{\vartheta} = (\omega+\dot{\varphi})^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{R}{l}\,\omega^2\cos\vartheta\cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\vartheta - \frac{c}{m}\left[\dot{\vartheta} + \frac{R}{l}\,\omega\cos\vartheta\sin\varphi\right] \tag{3b}$$

Die Dgln. sind singulär für $\sin\vartheta = 0$.

Für $\omega = 0$ ergeben sich die Dgln. des sphärischen Pendels mit festem Aufhängepunkt. Dann sind die Energie und der Drehimpuls p_φ Erhaltungsgrößen.

Animation

Bei der MatLab-Animation wird der Schatten von einer Lichtquelle erzeugt, die senkrecht über dem Karussell in großer Höhe steht.

Literatur

- Fischer/Stephan, *Prinzipien und Methoden der Mechanik*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1972.
- R. Mahnke, *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner Verlag. Hier wird ein vereinfachtes Modell mit $\varphi(t) = 0$ ausführlich untersucht.