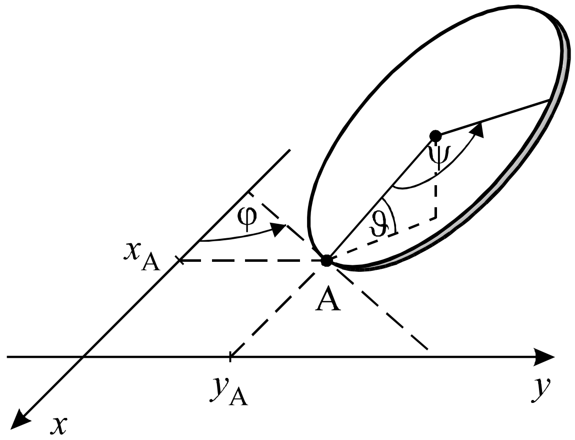
Rollende Münze – Kein Schlupf, harter Boden

Eine Münze oder eine **dünne** Kreisscheibe mit Radius r rollt **ohne Schlupf** über einen **harten Boden**. Die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes und die drei Eulerwinkel φ, ϑ, ψ beschreiben Lage und Orientierung der Scheibe.



Eine dünne Scheibe rollt ohne Schlupf auf dem horizontalen Boden. Die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes und die drei **Eulerwinkel** φ, ϑ, ψ beschreiben Lage und Orientierung der Scheibe.

Mathematisches Modell

Die differentiellen Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_A + r\,\dot{\psi}\cos\varphi &= 0 \\ \dot{y}_A + r\,\dot{\psi}\sin\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

beschreiben das Rollen *ohne Schlupf*.

Die Zwangsbedingung

$$z_S = r\sin\vartheta \tag{2}$$

sorgt dafür, dass die Münze *nicht vom Boden abheben kann*.

Die Luftreibung kann nur sehr grob mit einem stark vereinfachten Ansatz beschrieben werden: Sie soll **laminar** sein und daher Reibungsmomente erzeugen, die proportional zur Winkelgeschwindigkeit sind. Dabei werden Reibungsmomente parallel zur Symmetrieachse der *glatten* Münze vernachlässigt. Der Einfachheit halber werden die Reibungskräfte der Luft, die die Schwerpunktbewegung hemmen, vernachlässigt.

Das mathematische Modell hat in Extremfällen drei physikalisch *nicht sinnvolle* Besonderheiten:

- Die numerischen Rechnungen hören (abgesehen von eventuellen Abstürzen des numerischen Lösungsverfahrens; siehe „Singularität“ weiter unten) bei $\sin\vartheta = 0$ nicht auf, enden also *nicht*, wenn die Münze am Boden liegt. Daher können (physikalisch unsinnige) Bewegungen mit $\sin\vartheta < 0$ auftreten, in denen sich die Münze wegen der Zwangsbedingung (2) *unter* dem Boden bewegt, wobei der oberste Punkt der Münze gemäß den Zwangsbedingungen (1) am Boden rollt.
- Die Haftkraft R_H am Boden kann bei den numerisch berechneten Bewegungen deutlich größer werden als die Normalkraft N. Da Haftreibungszahlen μ_0 den Wert Eins in der Praxis nicht wesentlich überschreiten, ist dieses Ergebnis ebenfalls nicht realistisch. Es ist daher empfehlenswert, bei den graphischen Untersuchungen der Lösungen u. a. auch die Kurven der Haftkraft $R_H(t)$ und der Normalkraft $N(t)$ zu betrachten.

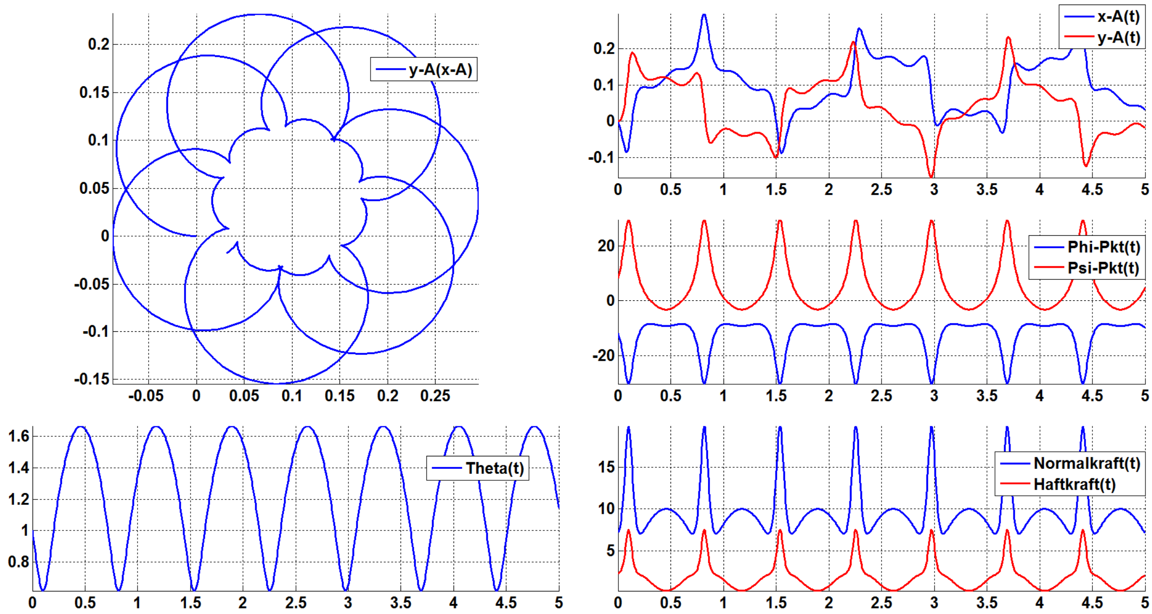


Abb. 2 Die Münze rollt ohne Energieverlust. Rollen ohne Schlupf ist hier möglich, da die Normalkraft zu jeder Zeit deutlich größer ist als die Haftkraft.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\dot\varphi(0) = -12\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}} \qquad \vartheta(0) = 1\,\text{Rad} \qquad \dot\vartheta = -5\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}} \qquad \dot\psi(0) = 8\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = x_A(0) = y_A(0) = 0$$

$m = 1$ kg $\qquad r = 0{,}1$ m $\qquad$ Keine Reibung

- Wegen der Zwangsbedingung (2) können bei heftigen Nutationen *negative* Normalkräfte

$$N = m\left(g + \ddot z_S\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (2)}}}{=} m\left[g + r\left(\ddot\vartheta\cos\vartheta - \dot\vartheta^2\sin\vartheta\right)\right] < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ddot z_S < -g$$

auftreten. Auch das ist unrealistisch. [1]

Trotzdem kann das Modell „nicht zu heftige" Rollvorgänge oder das Kippen einer Münze qualitativ richtig beschreiben.

Bemerkung: In MECHANICUS ist gibt es ein zweites Modell einer rollenden Münze, in dem die Münze auch rutschen kann. Außerdem kann die Münze dort vom Boden abheben, also in die Luft fliegen und anschließend wieder auf dem *weichen* Boden landen. Bewegungen „unter dem Boden" mit $\sin\vartheta < 0$ sind allerdings auch dort möglich. Ein gewisser Nachteil des 2. Modells besteht darin, dass man dort Bewegungen mit schöner Animation nur mit mehr Mühe finden kann.

---

[1] Das Auftreten von *negativen* Zwangskräften bei heftigen Nutationen der Münze (also bei raschen Auf- und Abbewegungen des Münzen-Schwerpunktes) kann anschaulich wie folgt begründet werden: Wir betrachten einen Sportler, der in Schuhen steht, die am Boden festgeklebt sind. Jetzt soll der Sportler die Beine mit Muskelkraft so schnell anziehen, also so schnell in die Hocke gehen, dass sein Schwerpunkt schneller als mit der Erdbeschleunigung nach unten beschleunigt wird: $\ddot z_S < -g$. In diesem Fall ist die Normalkraft auf den Boden *negativ*, d. h. die Schuhe bleiben nur wegen der Verklebung auf dem Boden; ohne Leim würden die Schuhe vom Boden abheben.

Differentialgln.

Die Dgln. werden in dem Lehrbuch Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage, Aufgabe 12–18 aufgestellt.

Animation

Die Bewegungsgln. gelten für eine *unendlich dünne* Münze. Bei der Animation hingegen wird eine Münze mit einer endlichen Dicke gezeichnet. Folglich bewegt sich bei der Animation eine kleine Ecke der Münze *unter* dem Boden.

Bei der Animation wird die Spur der Münze am Boden aufgezeichnet.

Literatur

F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 12–18.