Schwere Achse

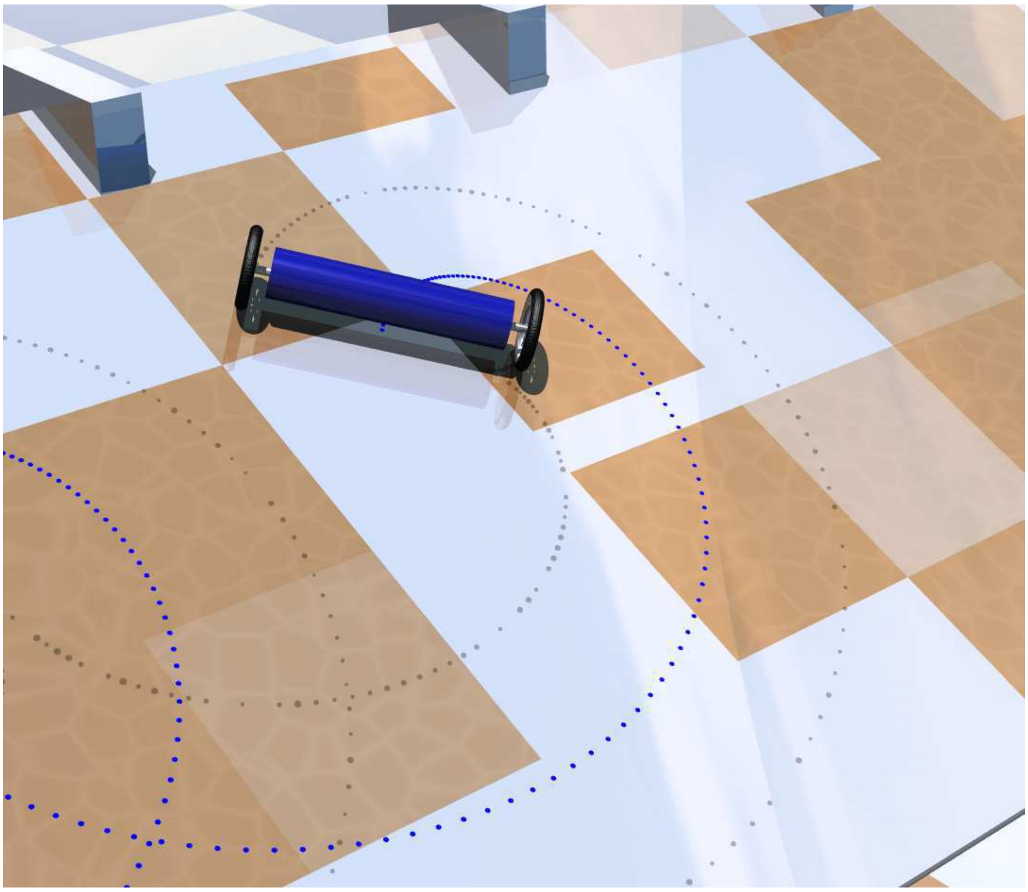


Abb. 1 Die *schwere Achse* wird durch zwei Räder *ohne Schlupf* und ohne Energieverlust über eine schiefe Ebene geführt. Alle 50 ms werden blaue Farbtröpfchen aus der Mitte der Achse senkrecht auf die schiefe Ebene gespritzt. Die blau punktierte Kurve beschreibt also die Bewegung des Mittelpunktes der schweren Achse.

Zusätzlich markieren dunkle Schmutzpartikel die Spur der beiden Räder.

Eine schwere Achse mit Masse und Trägheitsmoment, wird von zwei *masselosen* Rädern **ohne Reibungsverluste** und **ohne Schlupf** auf der **schiefen x,y-Ebene** geführt, die in y-Richtung mit wachsendem y ansteigt. Die schwere Achse dreht sich nur um die z-Achse, die senkrecht auf der schiefen Ebene steht. *Masse und Trägheitsmoment der Räder werden vernachlässigt.*

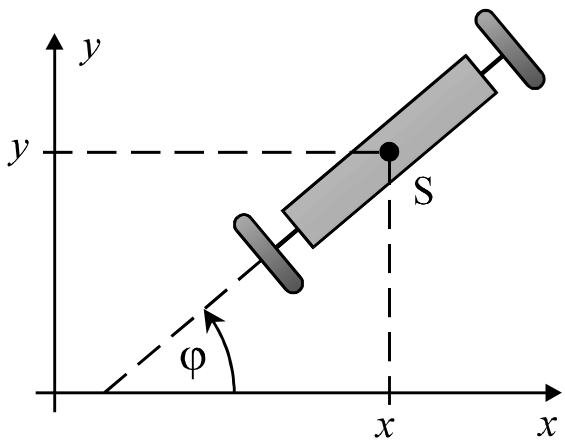


Abb. 2 Die Bewegung der schweren Achse wird durch die Schwerpunktkoordinaten x, y und den Winkel φ beschrieben.

Vor numerischen Berechnungen muss als Parameter nur der Steigungswinkel α der schiefen Ebene eingegeben werden. Die anderen Parameter wie Masse, Länge und

Trägheitsmoment der Achse kommen in den Differentialgln. nicht vor.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Für masselose Räder werden die linearen Dgln. im Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Beispiel 9.1–3 aufgestellt. In Aufgabe 9–13 werden die linearen Dgln. für massive Räder aufgestellt.

Besonderheiten des Systems

Die linearen Dgln. lassen sich relativ einfach lösen. Für die Anfangsbedingungen

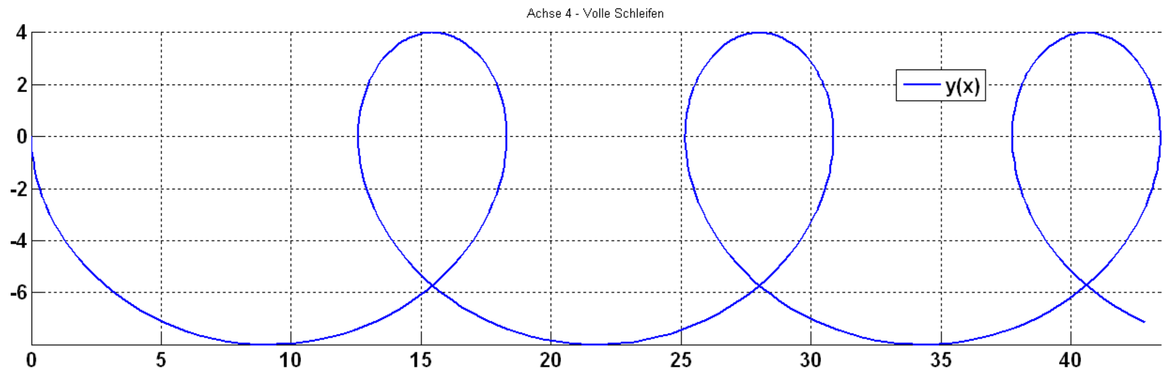
$$\varphi(0) = 0 \qquad \dot\varphi(0) = \omega \neq 0$$

$$x(0) = \dot x(0) = y(0) = 0 \qquad \dot y(0) = \dot y_0$$

lautet die Bahnkurve bei *masselosen Rädern* (mit $\omega := \dot\varphi = \text{const}$):

$$\text{..........}\ x(t) = \frac{g \sin\alpha}{4\,\omega^2}\,[2\,\omega\,t - \sin(2\,\omega\,t)] + \frac{\dot y_0}{\omega}\,[\cos(\omega\,t) - 1] \tag{1}$$

$$\text{..........}\ y(t) = \frac{g \sin\alpha}{4\,\omega^2}\,[\cos(2\,\omega\,t) - 1] + \frac{\dot y_0}{\omega}\,\sin(\omega\,t) \tag{2}$$



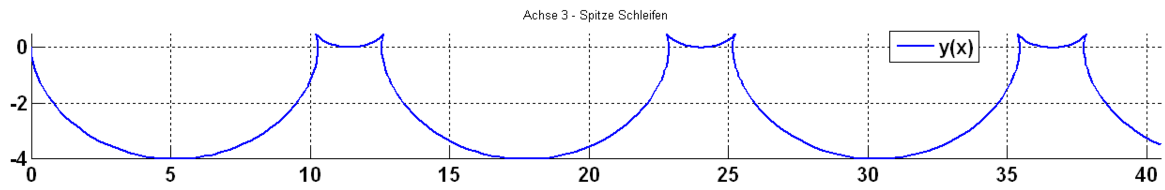


Abb. 3 Zwei Bewegungen $y_S(x_S)$ des Schwerpunktes S. Parameter und Anfangsbedingungen lauten

oben : $\alpha = 0{,}42062\ \text{Rad}$ $\quad \varphi_0 = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{Rad}$ $\quad \dot\varphi_0 = 1\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$ $\quad \dot y_0 = -6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

unten : $\alpha = 0{,}42062\ \text{Rad}$ $\quad \varphi_0 = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{Rad}$ $\quad \dot\varphi_0 = 1\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$ $\quad \dot y_0 = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Für Anfangsbedingungen $\dot{\varphi}(0) = \omega \neq 0$ läuft der Schwerpunkt S des Wagens wider Erwarten nicht den Hang hinab, sondern auf einer **Schleifenbahn quer zum Hang** (siehe Abb. 3).

Hinweis: Der Sonderfall $\omega = 0$ kann durch zweimalige Anwendung der L'Hospitalschen Regel berechnet werden. Hier erhält man für die genannten Anfangsbedingungen erwartungsgemäß

$$x(t) = 0 \qquad y(t) = -\, g \sin\alpha\, t^2/2\,.$$

Mit dem Energieerhaltungssatz lassen sich die Bewegungen der schweren Achse leicht erklären:

- Da auf die Achse kein Drehmoment ausgeübt wird, ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Achse konstant. Folglich läuft die Achse *jeweils gleich lange Zeiten nach links und nach rechts*. Wenn sie – für die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(t=0) > 0$ – nach rechts läuft, so hat sie eine kleinere potentielle Energie und daher eine größere kinetische Energie als wenn sie nach links läuft. Daher bewegt sich die Achse im zeitlichen Mittel quer zum Hang in x-Richtung.
- Wir betrachten zwei kleine, aber gleich große Zeitintervalle dt, in denen der Wagen auf gleicher Höhe (also mit gleicher y-Komponente) einmal bergan und einmal bergab fährt. In beiden Zeitintervalle ist die kinetische Energie gleich groß, so dass in beiden Zeitintervallen gleiche Strecken zurückgelegt werden. Im zeitlichen Mittel fährt die Achse daher nicht den Hang hinab, sondern bleibt im zeitlichen Mittel auf gleicher Höhe.

Für nicht verschwindende Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ gibt es zwei verschiedene Bewegungsformen:

1) Für genügend hohe Anfangsgeschwindigkeiten hat die Achse soviel kinetische Energie, dass sie nicht stehen bleibt und glatte Schleifen durchfährt (siehe die obere Kurve in Abb. 3 und die blau punktierte Kurve in Abb. 1).

2) Für kleine Anfangsgeschwindigkeiten hat die Achse nur geringe kinetische Energie, so dass sie beim Hochlaufen auf der geneigten Ebene stehen bleibt und danach ein kurzes Stück rückwärts weiterläuft (siehe die untere Kurve in Abb. 3).

Massive Räder

Auch bei *massiven Rädern* ergeben sich die gleichen schleifenartigen Kurven. Man muss in den Gln. (1) und (2) lediglich den Term $g \sin\alpha$ ersetzen durch

$$\frac{g \sin\alpha}{1 + \dfrac{2\, I_3}{m_{\text{ges}}\, R^2}}$$

mit $\quad m_{\text{ges}} = m_{\text{Achse}} + 2\, m_{\text{Rad}}$

und $\quad I_3 =$ Trägheitsmoment eines Rades für Drehungen um seine Symmetrieachse.

Demnach ändern die Trägheit der Räder einerseits und die Verringerung des Steigungswinkels α andererseits die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ in gleicher Weise.

Literatur

1) U. Fischer/W. Stephan, *Prinzipien und Methoden der Dynamik*, VEB Fachbuchverlag

2) M. Hiller, *Mechanische Systeme*, Springer-Verlag, 1983

3) F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Beispiel 9.1–3 und Aufgabe 9–13.