# Rotierendes Doppelpendel

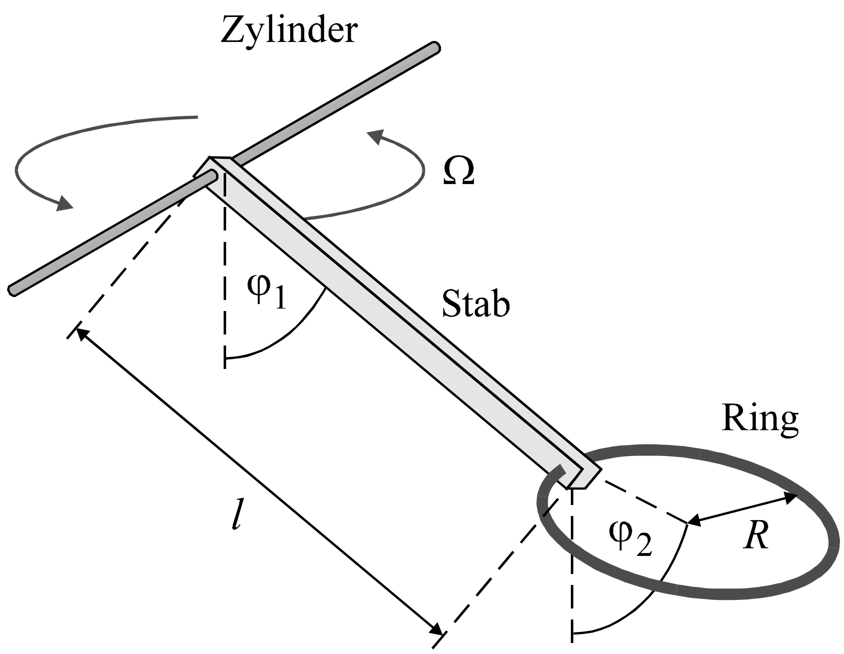


**Abb. 1** Das rotierende Doppelpendel besteht aus einem *sehr dünnen* Stab und einem angehängten *sehr dünnen* Ring. Durch das obere Ende des Stabes wird ein dünner, horizontaler Draht geführt, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Hochachse rotiert.

Ein *sehr dünner* Stab mit Länge $l$ und Masse $m_1$ hängt an einem dünnen, horizontalen Zylinder, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um die Hochachse rotiert. Der Stab kann mit dem Winkel $\varphi_1$ um den Zylinder rotieren.

An dem Stab ist drehbar ein *sehr dünner* Ring mit Radius $R$ und Masse $m_2$ angebracht, der mit dem Winkel $\varphi_2$ schwingen kann.

Beide Körper erfahren geschwindigkeitsproportionale **Reibungsmomente.**

Das rotierende Doppelpendel ist ein **chaotisches System** – auch für $\Omega = 0$.

## Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die Schwerpunktgeschwindigkeit des Stabes lautet

$$v_S^{\mathrm{Stab}} = \sqrt{\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \sin^2\varphi_1}\ \frac{l}{2}$$

Die körperfeste $z_1$–Achse des Stabes sei parallel zu seiner Längsrichtung. Dann betragen die körperfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Stabes

$$\begin{pmatrix} \omega_x^{\text{Stab}} \\ \omega_y^{\text{Stab}} \\ \omega_z^{\text{Stab}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \Omega \sin\varphi_1 \\ \Omega \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

Wegen $I_3^{\text{Stab}} \approx 0$ ist die kinetische Energie des sehr dünnen Stabes gleich

$$T^{\text{Stab}} = \frac{m_1}{2} \left(\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \sin^2\varphi_1\right) \frac{l^2}{4} + \frac{I_1^{\text{Stab}}}{2} \left(\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \sin^2\varphi_1\right)$$

Mit $\quad I_1^{\text{Stab}} = \dfrac{m_1}{12}\, l^2$

folgt $\quad T^{\text{Stab}} = \dfrac{m_1\, l^2}{6} \left(\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \sin^2\varphi_1\right)$

$$V^{\text{Stab}} = -\, m_1\, g\, \frac{l}{2} \cos\varphi_1$$

Die drei Schwerpunktkoordinaten des Ringes lauten wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{S}}^{\text{Ring}} \\ y_{\text{S}}^{\text{Ring}} \\ z_{\text{S}}^{\text{Ring}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \sin\varphi_1 \cos\Omega t + R \sin\varphi_2 \cos\Omega t \\ l \sin\varphi_1 \sin\Omega t + R \sin\varphi_2 \sin\Omega t \\ -\, l \cos\varphi_1 - R \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt das Quadrat der Schwerpunktgeschwindigkeit des dünnen Ringes:

$$v_{\text{S}}^{\text{Ring}\;2} = l^2\, \dot{\varphi}_1^2 + R^2\, \dot{\varphi}_2^2 + 2\, l\, R\, \dot{\varphi}_1\, \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \Omega^2 \left(l \sin\varphi_1 + R \sin\varphi_2\right)^2$$

Die körperfesten Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Ringes lauten:

$$\begin{pmatrix} \omega_x^{\text{Ring}} \\ \omega_y^{\text{Ring}} \\ \omega_z^{\text{Ring}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \Omega \cos\varphi_2 \\ -\, \Omega \sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Mit $\quad I_1^{\text{Ring}} = I_2^{\text{Ring}} = \dfrac{m_2}{2}\, R^2 \qquad I_3^{\text{Ring}} = m_2\, R^2$

folgt

$$T^{\text{Ring}} = \frac{m_2}{2} \left[ l^2\, \dot{\varphi}_1^2 + R^2\, \dot{\varphi}_2^2 + 2\, l\, R\, \dot{\varphi}_1\, \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \Omega^2 \left(l \sin\varphi_1 + R \sin\varphi_2\right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{m_2}{2}\, R^2 \left[ \frac{1}{2}\, \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\, \Omega^2 \cos^2\varphi_2 + \Omega^2 \sin^2\varphi_2 \right]$$

$$V^{\text{Ring}} = -\, m_2\, g \left(l \cos\varphi_1 + R \cos\varphi_2\right)$$

Die Lagrangefunktion beträgt:

$$L = \frac{m_1}{6}\, l^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \sin^2\varphi_1\right) +$$

$$+ \frac{m_2}{2}\left[\, l^2\, \dot{\varphi}_1^2 + \frac{3}{2} R^2\, \dot{\varphi}_2^2 + 2\, l\, R \left\{\dot{\varphi}_1\, \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \Omega^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right\}\right] +$$

$$+ \frac{m_2}{2}\, \Omega^2 \left(l^2 \sin^2\varphi_1 + \frac{3}{2} R^2 \sin^2\varphi_2\right) +$$

$$+ m_1\, g\, \frac{l}{2} \cos\varphi_1 + m_2\, g \left(l \cos\varphi_1 + R \cos\varphi_2\right)$$

Die erste Lagrangegl. lautet:

$$L_{\varphi_1}: \left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) l^2\, \ddot{\varphi}_1 + m_2\, l\, R\, \ddot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$+ m_2\, l\, R\, \dot{\varphi}_2^2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \frac{m_1}{3}\, l^2\, \Omega^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$$

$$- m_2\, l\, R\, \Omega^2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - m_2\, \Omega^2\, l^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$$

$$+ \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g\, l \sin\varphi_1 = 0$$

Nach Division durch $m_2\, R$ liefert die zweite Lagrangegl.:

$$\frac{L_{\varphi_2}}{m_2\, R}: \frac{3}{2} R\, \ddot{\varphi}_2 + l\, \ddot{\varphi}_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$

$$- l\, \dot{\varphi}_1^2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - l\, \Omega^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$$

$$- \frac{3}{2} R\, \Omega^2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 + g \sin\varphi_2 = 0$$

## Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.