Stabpendel mit Federantrieb

Das untere Ende eines **dünnen**, aber massiven Stabes mit Masse m dreht sich frei um eine raumfeste, horizontale Achse in der vertikalen x,y-Ebene. Das obere Ende des Stabes ist an einer masselosen Feder befestigt, deren oberes Ende harmonisch auf und ab bewegt werden kann.

Auf den Stab wirken Federkraft, Gewichtskraft und eine **geschwindigkeits-proportionale Reibungskraft**.

Der Koordinatenursprung liegt im unteren, raumfesten Drehpunkt des Stabes. Das obere Ende der Feder hat die y-Koordinate

$$y_{\text{oben}}(t) \;=\; l_{\text{Stab}} + l_{\text{Feder}} + A_y \cos(\Omega\, t)$$

mit $l_{\text{Feder}} \;=\; \text{ungedehnte Federlänge}$.

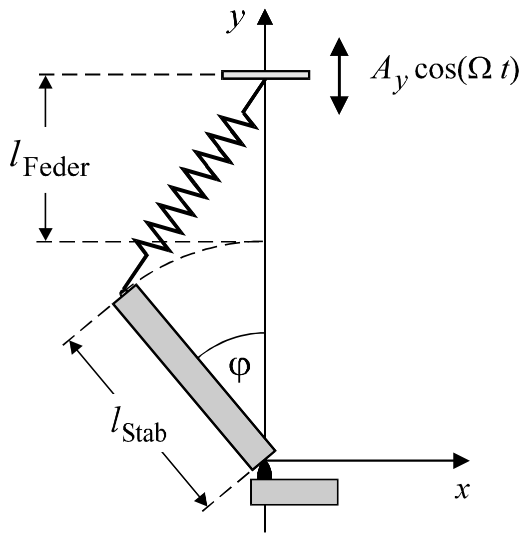

Abb. 1 Das untere Ende des massiven Stabes dreht sich um eine horizontale Achse, die senkrecht auf der Papierebene steht. Das andere Ende ist mit einer Feder verbunden, deren oberes Ende harmonisch auf und ab bewegt werden kann.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Das Trägheitsmoment des massiven, aber **dünnen** Stabes ist für Drehungen um die horizontale Achse

$$I_{\text{A}} = \frac{m}{3}\, l_{\text{Stab}}^{2}$$

Die Dgl. für den Winkel φ lässt sich am einfachsten mit der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L = {} & \frac{m}{6}\, l_{\text{Stab}}^{2}\, \dot{\varphi}^{2} + m\, g\, \frac{l_{\text{Stab}}}{2}\left(1-\cos\varphi\right) \\
& - D\left[l_{\text{Feder}}^{2} + l_{\text{Stab}}\left(l_{\text{Stab}} + l_{\text{Feder}}\right)\left(1-\cos\varphi\right)\right] \\
& - D\, A_y\, \cos(\Omega\, t)\left[\frac{A_y}{2}\cos(\Omega\, t) + l_{\text{Feder}} + l_{\text{Stab}}\left(1-\cos\varphi\right)\right] \\
& + D\, l_{\text{Feder}} \sqrt{\left(l_{\text{Stab}}\sin\varphi\right)^{2} + \left[l_{\text{Stab}}\left(1-\cos\varphi\right) + l_{\text{Feder}} + A_y\cos(\Omega\, t)\right]^{2}}
\end{aligned}$$

und mit der Dissipationsfunktion

$$P \;=\; \frac{c}{2}\, \dot{\varphi}^{2}$$

aufstellen. Die Dgl. lautet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3\,c}{m\,l_{\text{Stab}}^2}\,\dot{\varphi} + \frac{3\,g}{2\,l_{\text{Stab}}}\sin\varphi$$

$$-\frac{3\,D}{m\,l_{\text{Stab}}}\sin\varphi\left[\,l_{\text{Stab}} + l_{\text{Feder}} + A_y\cos(\Omega\,t)\right]*$$

$$*\left[1 - \frac{l_{\text{Feder}}}{\sqrt{\left(l_{\text{Stab}}\sin\varphi\right)^2 + \left[l_{\text{Stab}}\left(1-\cos\varphi\right) + l_{\text{Feder}} + A_y\cos(\Omega\,t)\right]^2}}\right]$$

Das System ist **chaotisch**, wenn der obere Fußpunkt der Feder bewegt wird ($A_y \neq 0$ und $\Omega \neq 0$).

Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.