Tischpendel

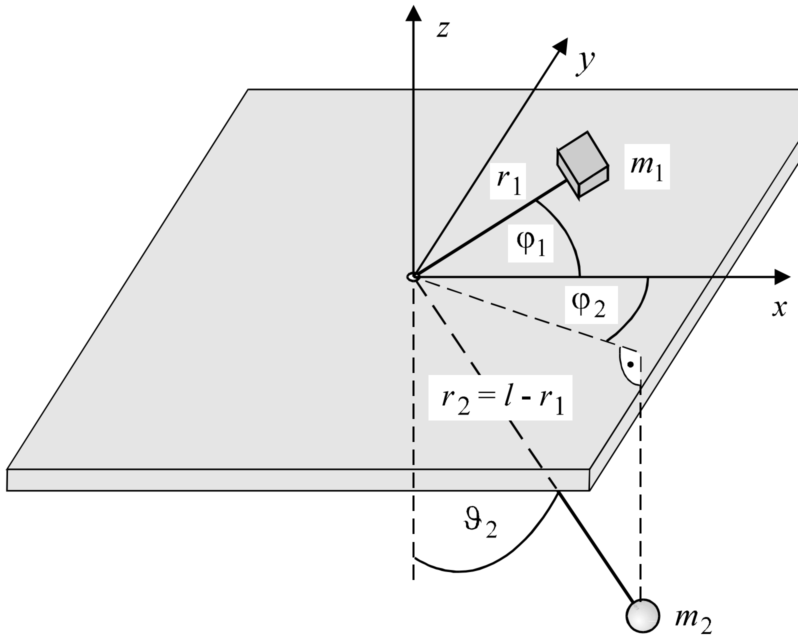

Abb. 1 Die obere Masse m_1 gleitet reibungsfrei auf dem Tisch, die untere Masse m_2 bildet ein Kugelpendel mit veränderlicher Pendellänge r_2. Beide Massen werden durch einen Faden der Länge l verbunden, der *reibungsfrei* durch ein Loch in der Tischplatte rutscht.

In eine Tischplatte wird ein kleines Loch gebohrt, durch das ein dünner, masseloser, nichtdehnbarer Faden der Länge l gezogen wird. Das obere Ende des Fadens wird auf dem Tisch mit der reibungsfrei gleitenden Masse m_1 verbunden, das untere Ende mit der Masse m_2, die wie ein Kugelpendel schwingt. Der Faden kann reibungsfrei durch das Loch gleiten, so dass die Radien

$$r_1(t)$$

und $$r_2(t) = l - r_1(t)$$

zeitabhängig sind. Die Trägheitsmomente der beiden Massen werden vernachlässigt.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Wir wählen die Koordinaten $\varphi_1, r_1, \varphi_2, \vartheta_2$ als generalisierte Koordinaten. Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\,\dot{\varphi}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left[\dot{r}_1^2 + \left(l - r_1\right)^2\left(\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2\,\sin^2\vartheta_2\right)\right]$$

$$+\, m_2\; g\,\left(l - r_1\right)\cos\vartheta_2$$

Die Dgln. für die vier unabhängigen Variablen lauten:

$$\ddot{\varphi}_1 = -2\,\frac{\dot{r}_1}{r_1}\,\dot{\varphi}_1$$

$$\ddot{r}_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1\, r_1\, \dot{\varphi}_1^2 - m_2\left(l - r_1\right)\left(\dot{\vartheta}_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin^2\vartheta_2\right) - m_2\, g\, \cos\vartheta_2\right]$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{2\,\dot{\varphi}_2}{\left(l - r_1\right)\sin\vartheta_2}\left[\dot{r}_1 \sin\vartheta_2 - \dot{\vartheta}_2\left(l - r_1\right)\cos\vartheta_2\right]$$

$$\ddot{\vartheta}_2 = \frac{2\,\dot{r}_1\,\dot{\vartheta}_2}{l - r_1} + \dot{\varphi}_2^2 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_2 - \frac{g\sin\vartheta_2}{l - r_1}$$

Die Bewegungsgln. sind singulär für

$$r_1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad r_1 = l \qquad \text{oder} \qquad \sin\vartheta_2 = 0$$

Das System hat drei Erhaltungsgrößen: Die Energie E sowie – wegen der beiden zyklischen Koordinaten φ_1, φ_2 – die beiden Drehimpulse p_{φ_1} und p_{φ_2}. Das System ist **chaotisch**.

Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.