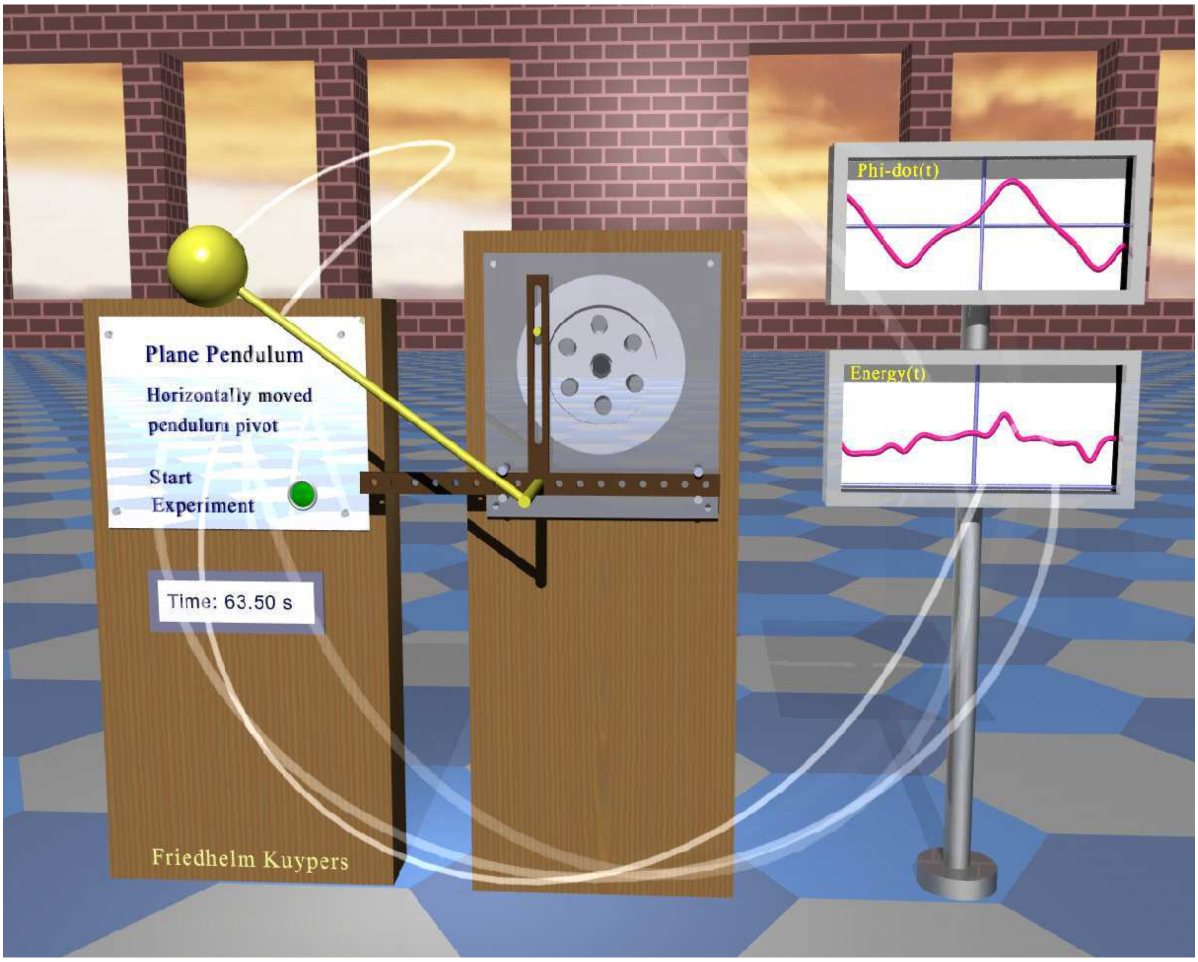

Abb. 1 Momentaufnahme eines chaotisch schwingenden Pendels. Zwei Schreiber auf der rechten Seite zeigen den zeitlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ und der Energie $E(t)$.

Ebenes Pendel

Der Aufhängepunkt A eines ebenen Pendels kann harmonisch in horizontale und vertikale Richtung schwingen. Die Koordinaten des Aufhängepunktes A lauten

$$x_A = A_x \cos(\Omega t)$$

$$y_A = A_y \sin(\Omega t)$$

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Aufhängepunkt an der Stelle $(A_x, 0)$ und läuft anschließend für $A_x \cdot A_y \neq 0$ auf einer Ellipsenbahn. Für $A_x \cdot A_y > 0$ läuft der Aufhängepunkt im Gegenuhrzeigersinn, ansonsten im Uhrzeigersinn.

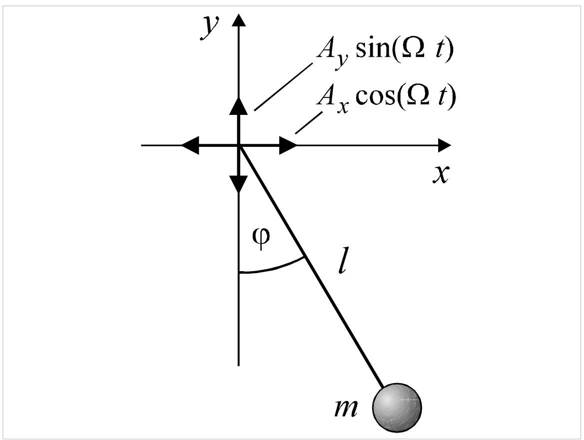

Abb. 2 Das ebene Pendel schwingt mit laminarer Luftreibung. Der Aufhängepunkt kann horizontal und vertikal bewegt werden mit gleicher Kreisfrequenz Ω.

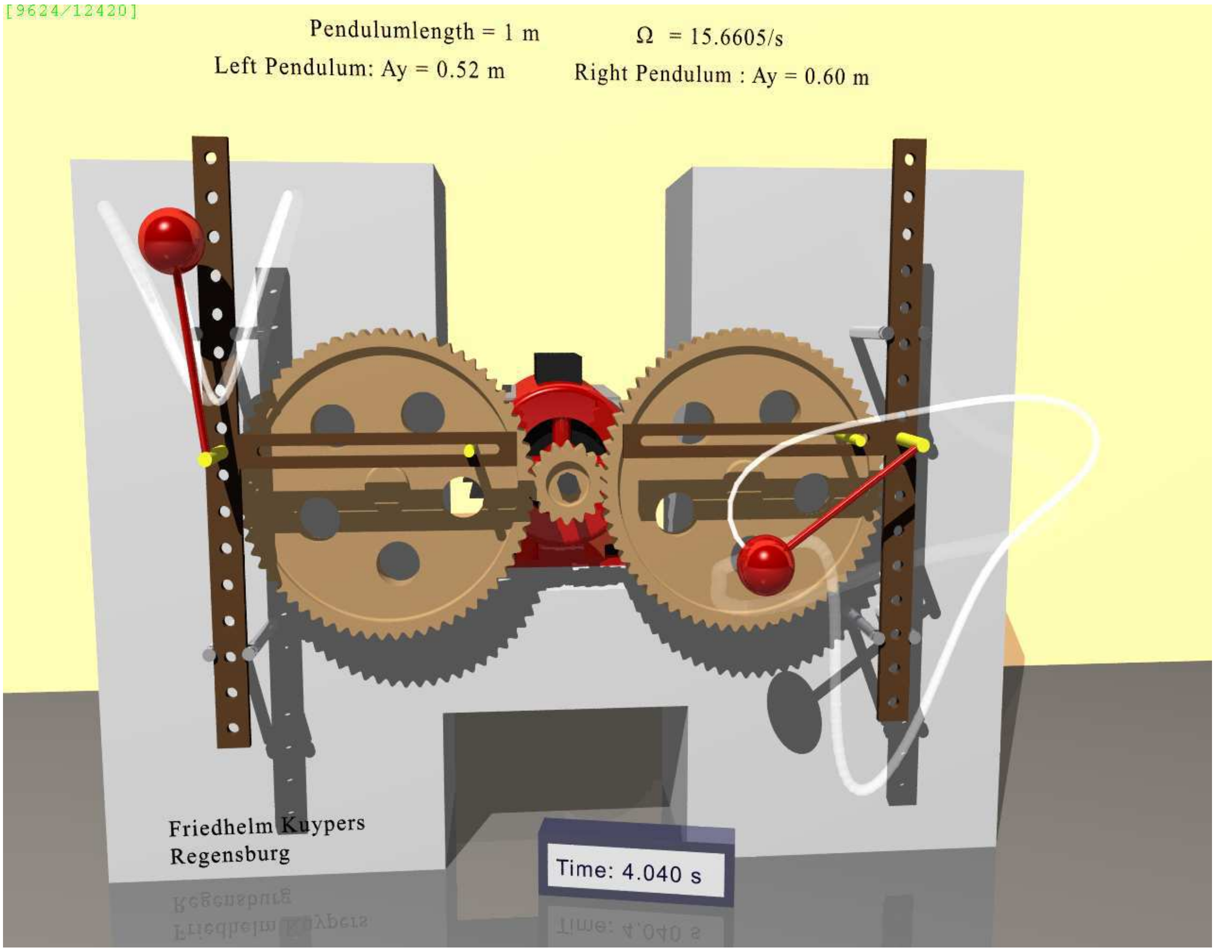

Abb. 3 Momentaufnahme der Schwingung von zwei *identischen* Pendeln der Länge $l = 1\,\mathrm{m}$. Die beiden gelben Aufhängepunkte werden harmonisch mit der Frequenz $\Omega = 15{,}6605/\mathrm{s}$ auf und ab bewegt, links mit der Amplitude $A_y = 0{,}52\ \mathrm{m}$, rechts mit der Amplitude $A_y = 0{,}60\ \mathrm{m}$.

Das linke Pendel steht stabil auf dem Kopf, das rechte Pendel schwingt chaotisch.

Die Pendelmasse erfährt eine geschwindigkeitsproportionale **Reibungskraft**:

$$R = c\,v$$

mit v = Geschwindigkeit der Pendelmasse m.

Die Masse der Pendelstange und das Trägheitsmoment der Kugel werden vernachlässigt.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die Dgl. für die unabhängige Variable φ lautet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi + \frac{\Omega^2}{l}\left[A_x\cos(\Omega t)\cos\varphi + A_y\sin(\Omega t)\sin\varphi\right] -$$

$$\frac{c}{m\,l}\left[l\,\dot{\varphi} - \Omega\left(A_x\sin(\Omega t)\cos\varphi - A_y\cos(\Omega t)\sin\varphi\right)\right]$$

Besonderheiten des Systems

Das System ist **bei bewegter Aufhängung chaotisch**.

Das **Pendel mit vertikal bewegter Aufhängung** zeigt ein interessantes und überraschendes Phänomen: Bei geeigneten Schwingungen des Aufhängepunktes wird die **aufrechte Position stabilisiert**; der Winkel φ kann Schwingungen in der Umgebung von π machen, ohne dass das Pendel umkippt.

So ist die aufrechte Position z. B. dann stabil, wenn bei der Frequenz $\Omega = 5\sqrt{g/l}$ die Amplitude A_y zwischen 28 % und 58 % der Pendellänge l liegt und $A_x = 0$ ist (siehe Abb. 3).

Die Parameterbereiche, in denen das stehende Pendel eine stabile Position hat, werden in der sog. „Struttschen Stabilitätskarte“ dargestellt.

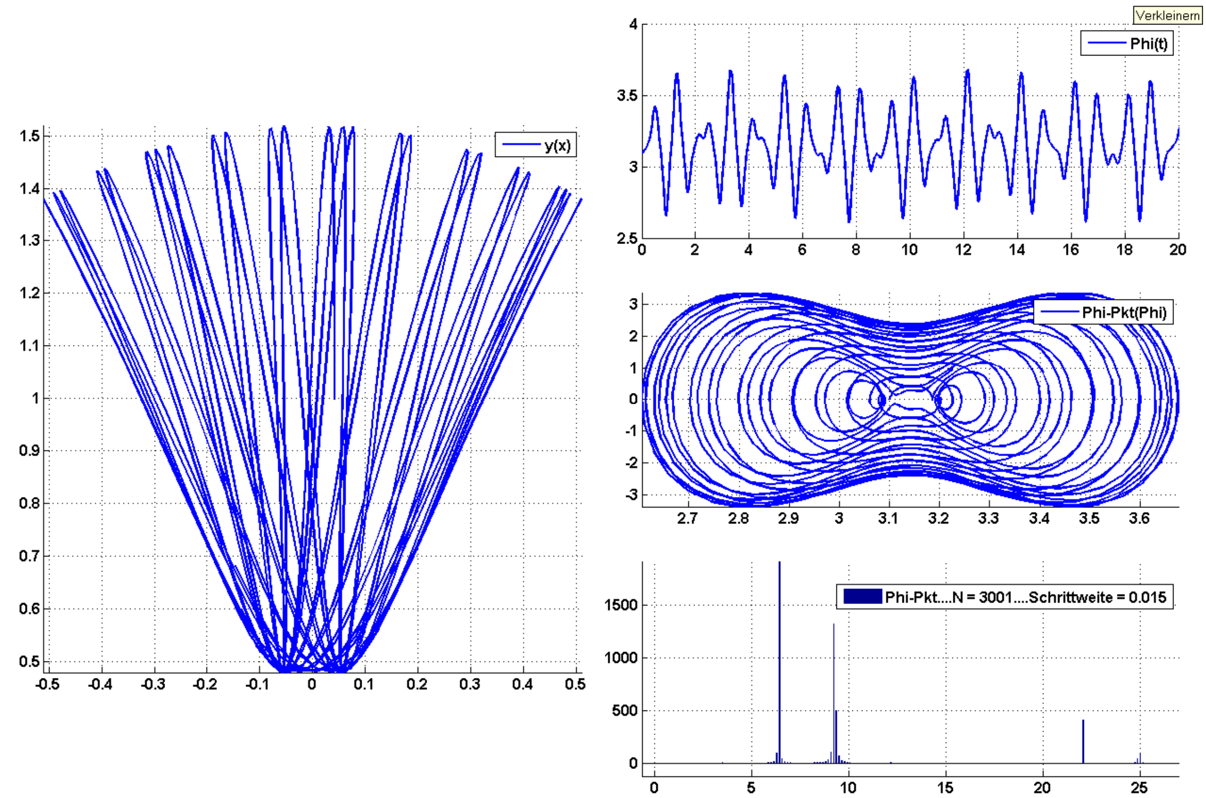

Abb. 4 Für die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 3{,}1 \qquad \dot{\varphi}(0) = 0$$

und für die Parameter

$$m = 1\ \text{kg} \qquad l = 1\ \text{m} \qquad A_y = 0{,}52\ \text{m} \qquad \Omega = 5\sqrt{\frac{g}{l}} \approx 15{,}6605\ \frac{1}{\text{s}} \qquad A_x = 0$$

steht das Pendel stabil auf dem Kopf. Die Kurve $y(x)$ wurde im ersten Fenster für das Zeitintervall $[0\,,10\,\text{s}]$ gezeichnet, die beiden nächsten Kurven wurden für das doppelt so große Zeitintervall $[0\,,20\,\text{s}]$ gezeichnet.

Die größte Frequenz im Fourierspektrum von $\dot{\varphi}(t)$ lautet $\pi/\Delta t \approx 209{,}4/\text{s}$ mit $\Delta t = 0{,}015\ \text{s} =$ Ausgabeschrittweite bei der Lösung der Dgl. Im 4. Fenster wird nur der erste, wichtigste Teil des Spektrums dargestellt.

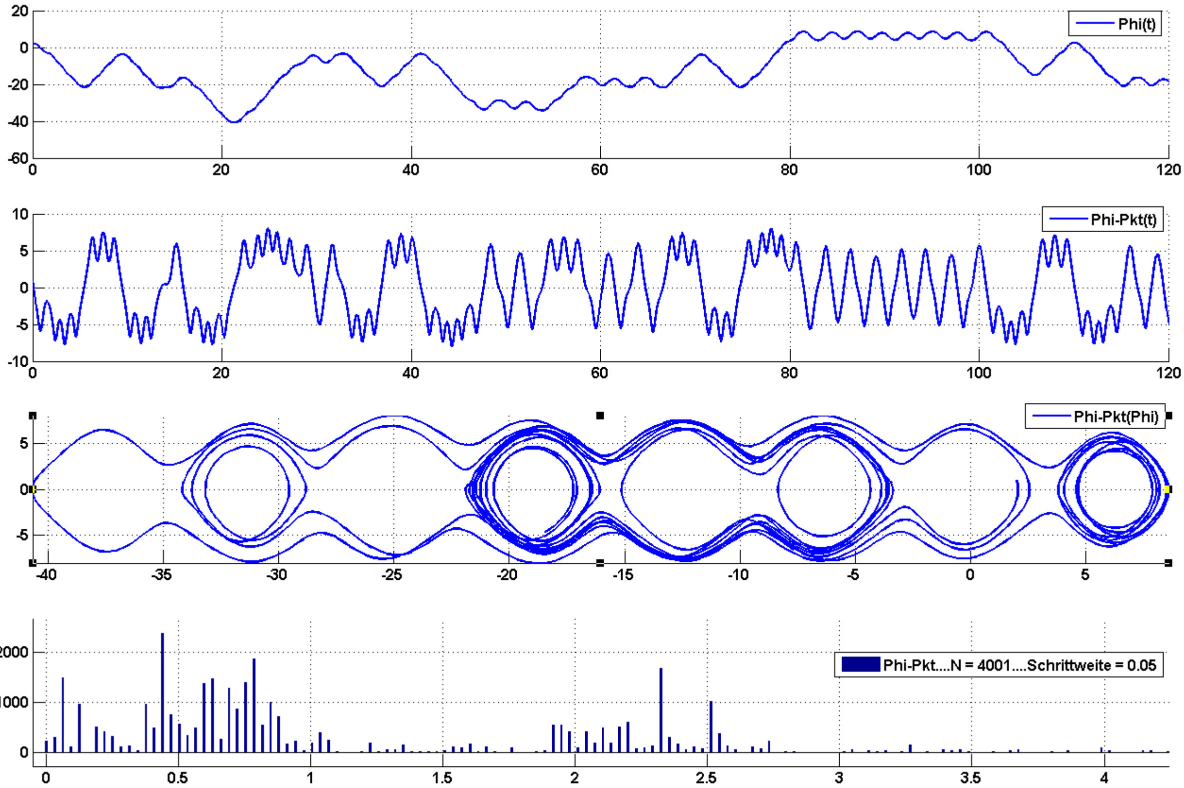

Abb. 5 *Chaotische Schwingung* eines horizontal angetriebenen Pendels. Die größte Frequenz im Fourierspektrum von $\dot{\varphi}(t)$ lautet $\pi/\Delta t \approx 62{,}8/\mathrm{s}$ mit $\Delta t = 0{,}05\ \mathrm{s}$ = Ausgabeschrittweite bei der numerischen Lösung der Dgl. Im vierten Fenster wird nur der erste, wichtigste Teil des Spektrums dargestellt.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi(0) = 2\ \mathrm{rad} \qquad \dot{\varphi}(0) = 1\ \mathrm{rad/s}$$

$$m = 1\ \mathrm{kg} \qquad l = 1\ \mathrm{m} \qquad A_x = 0{,}2\ \mathrm{m} \qquad A_y = 0 \qquad \Omega = 4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad c = 0$$

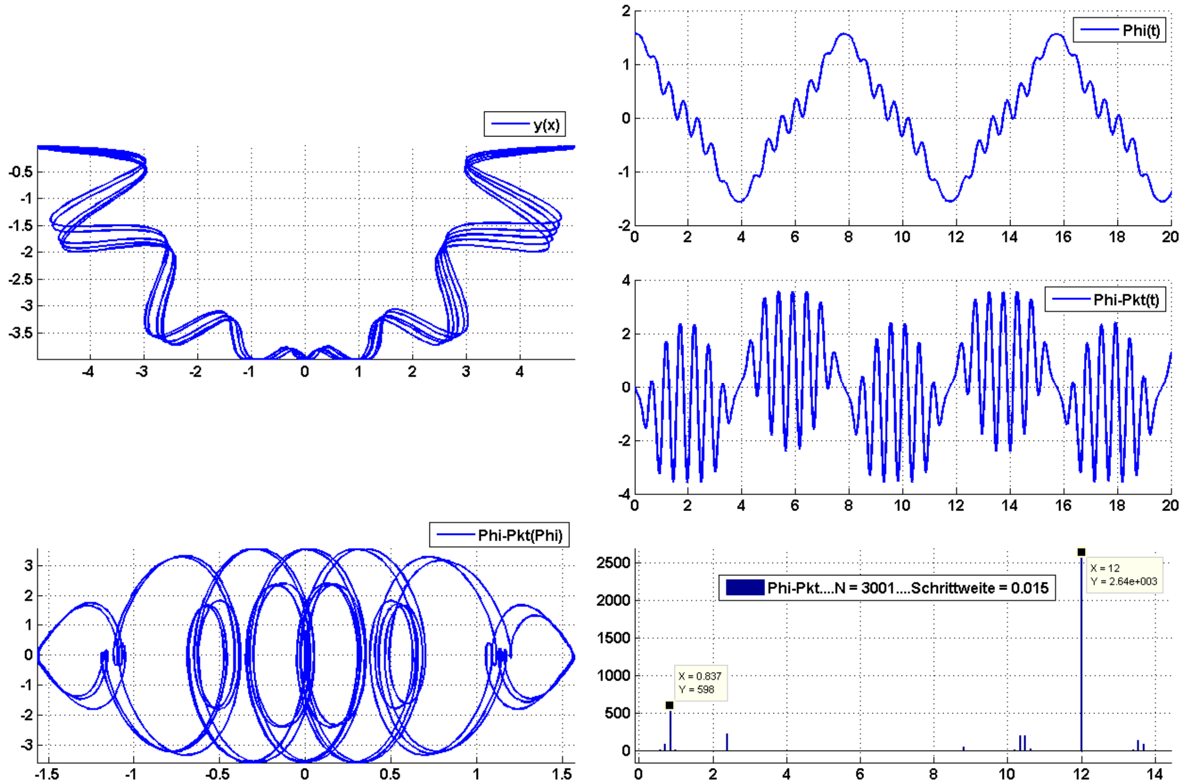

Abb. 6 Reguläre Schwingung eines angetriebenen Pendels. Die größte Frequenz im Fourierspektrum von $\dot{\varphi}(t)$ lautet $\pi/\Delta t \approx 209{,}4/\mathrm{s}$ mit $\Delta t = 0{,}015$ s = Ausgabeschrittweite bei der numerischen Lösung der Dgl. Im fünften Fenster wird nur der erste, wichtigste Teil des Spektrums dargestellt.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \dot{\varphi}(0) = 0$$

$$m = 1\,\mathrm{kg} \qquad l = 4\,\mathrm{m} \qquad A_x = 1\,\mathrm{m} \qquad A_y = 0 \qquad \Omega = 12\,\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad c = 0$$

Literatur

In dem Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage wird das ebene Pendel mit *horizontal* schwingendem Aufhängepunkt in den zwei Aufgaben 5–13 und 9–9 behandelt. Das ebene Pendel mit *vertikal* schwingendem Aufhängepunkt wird in Aufgabe 14–8 besprochen.