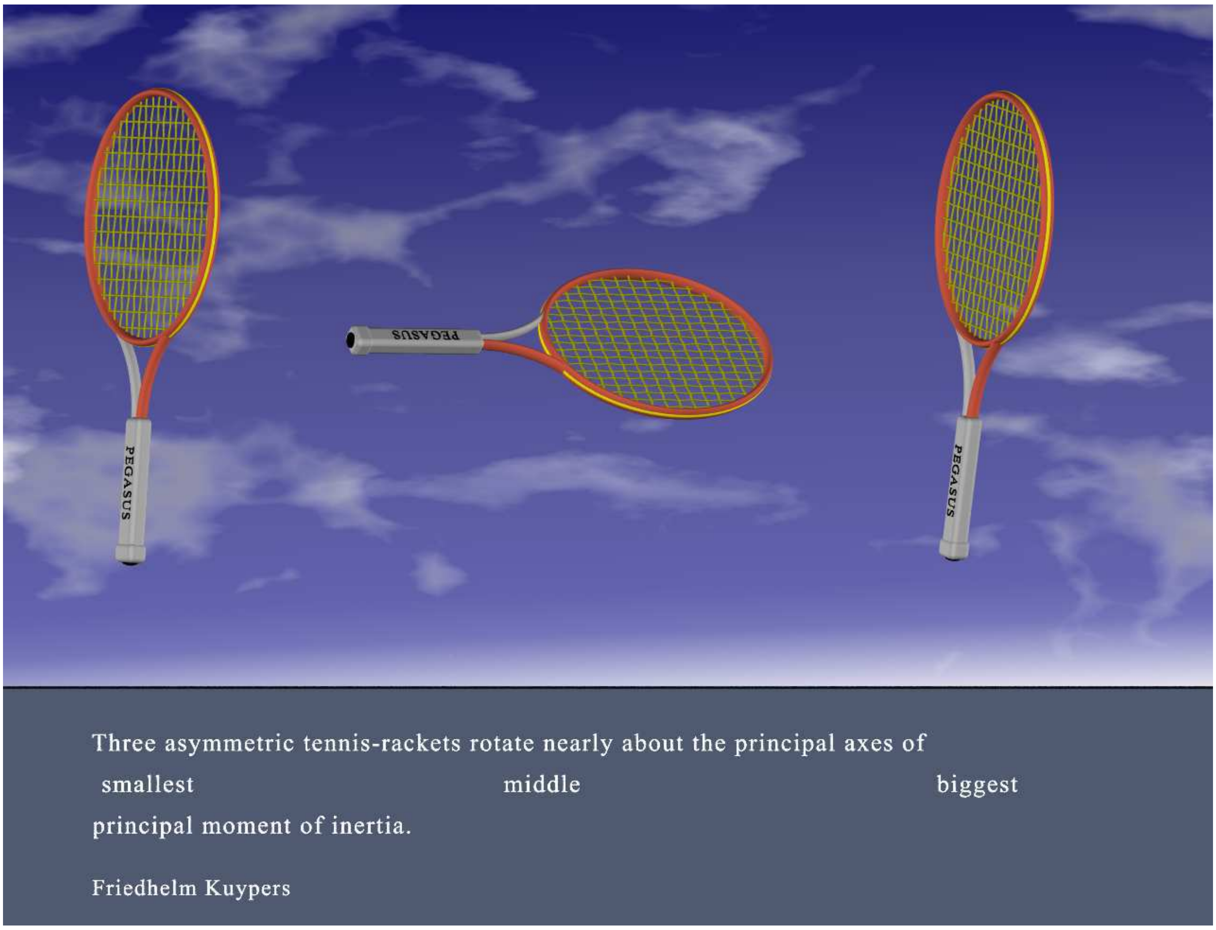

Abb. 1 POV-Ray-Animation der Drehungen um die drei Hauptträgheitsachsen.

FREIE ROTATIONEN

Ein starrer Körper – z. B. ein homogener Quader mit den Seitenlängen a, b, c oder ein Tennisschläger – wird in die Luft geworfen und dreht sich **reibungs-** und **momentenfrei** um seinen Schwerpunkt. Da der beschleunigte Fall des starren Körpers im Schwerefeld der Erde nicht beachtet wird, ruht der Schwerpunkt bei den Animationen.

Die Rotationen sind **stabil**, wenn der Körper um die Achse mit dem größten oder kleinsten Trägheitsmoment rotiert. Bei Rotationen um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment **torkelt** der rotierende Körper. Bei symmetrischen Körpern (hier sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß) ist die momentenfreie Drehung um die Symmetrieachse stabil. Daher wird der Flug von symmetrischen Körpern (z. B. von Geschossen und vom Diskus im Sport) durch Rotationen um die Symmetrieachse stabilisiert.

Die **Eulerwinkel** φ, ϑ, ψ beschreiben die Rotation des starren Körpers. Wenn diese drei Winkel Null sind, dann ist beim Quader die Seite mit der Länge *a* parallel zur x-Achse, die Seite mit der Länge *b* parallel zur y-Achse und die Seite mit der Länge *c* parallel zur z-Achse.

Die Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, I_3 eines homogenen Quaders mit den Seitenlängen a, b, c lauten:

$$I_1 = \frac{m}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

$$I_2 = \frac{m}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

$$I_3 = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

Damit berechnen sich die Seitenlängen a, b, c des Quaders wie folgt aus den Hauptträgheitsmomenten I_1, I_2, I_3:

$$a = \sqrt{\frac{6}{m}\left(-I_1 + I_2 + I_3\right)}$$

$$b = \sqrt{\frac{6}{m}\left(I_1 - I_2 + I_3\right)}$$

$$c = \sqrt{\frac{6}{m}\left(I_1 + I_2 - I_3\right)}$$

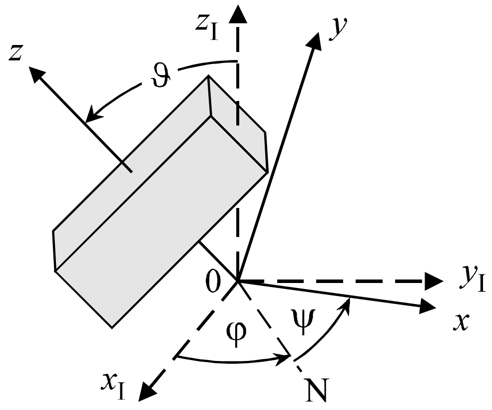

Abb. 2 Die drei Drehungen mit den Eulerwinkeln werden wie folgt ausgeführt:

- *Drehung φ um die inertiale z-Achse.* Dabei geht die inertiale x_I-Achse in die sog. „Knotenlinie“ $\overline{0\mathrm{N}}$ über.
- *Drehung ϑ um die Knotenlinie $\overline{0\mathrm{N}}$.* Die inertiale z_I-Achse und die körperfeste z-Achse schließen danach den Winkel ϑ ein.
- *Drehung ψ um die körperfeste z-Achse.*

Differentialgln.

Die Dgln. werden in dem Lehrbuch Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage, Aufgabe 12–17 aufgestellt.

Literatur

- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage, Wiley-VCH-Verlag, Aufgabe 12–5.

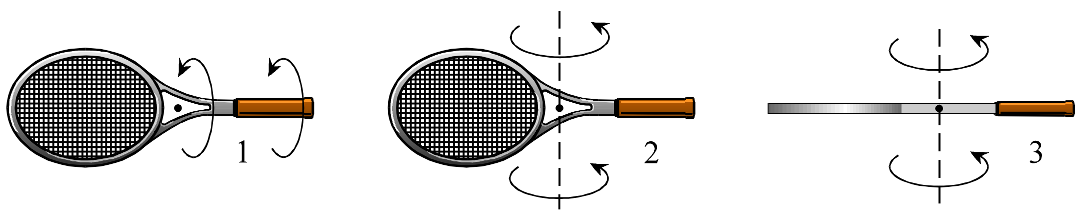

Abb. 3 Auch ein Tennisschläger kann in die Luft geworfen werden und anschließend frei rotieren. Die in der Mitte dargestellte Drehung um die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment ist instabil. Die linke Drehung um die Achse mit dem kleinsten und die rechte Drehung um die Achse mit dem größten Hauptträgheitsmoment sind stabil.