Die Glocke

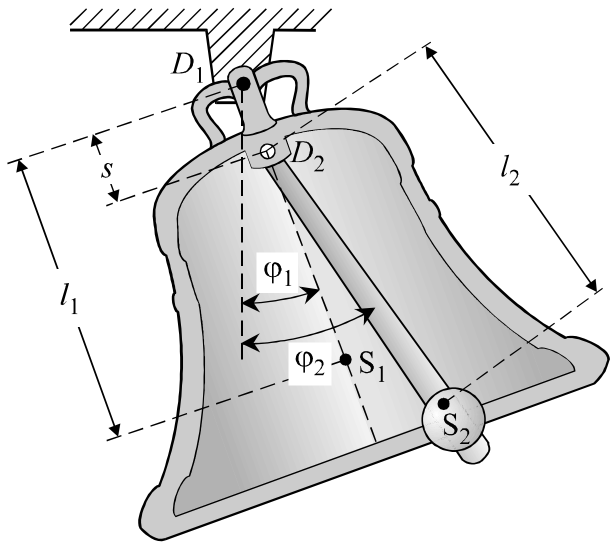

Abb. 1 Frei schwingende Glocke. Der Glockenkörper hat den Index 1, der Klöppel den Index 2. Beim Anschlag wird ein **Glockenton** ausgegeben.

MECHANICUS soll die Bewegung einer Glocke möglichst realistisch berechnen. Unser Modell „Glocke" hat folgende drei Besonderheiten:

- Die Glocke wird durch ein konstantes, aber im Vorzeichen wechselndes äußeres Drehmoment angetrieben, das bei zu großen Ausschlägen kurzfristig abgeschaltet wird.
- Der teilplastische Anschlag des Klöppels auf den Schlagring der Glocke wird mit Schaltfunktionen beschrieben. [1]
- Die Reibmomente von Glocke und Klöppel werden der Einfachheit halber proportional zu $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$ angesetzt (siehe die Dgln. weiter unten).

Die Bedeutung der zahlreichen Parameter wird weiter unten bei den Dgln. angegeben.

Die Untersuchung von Glockenschwingungen ist vor allem aus folgendem historischen Grund sehr reizvoll: 1872 wurde nach der endgültigen Fertigstellung des Kölner Doms und nach dem Sieg im deutsch-französischen Krieg 1870/71 die Kölner Kaiserglocke in Auftrag gegeben. Der Zeitpunkt war gut gewählt, da die deutschen Truppen zahlreiche französische Geschütze erbeutet hatten, von denen wiederum viele aus Glocken gegossen waren.

---

[1] In den Erläuterungen zum System „Zwei springende Bälle" wird an Hand eines MATLAB-Programmes ausführlich besprochen, wie MATLAB Dgln. mit Unstetigkeiten (hier mit Stößen) löst. Dabei werden die Unstetigkeitsstellen als Nullstellen von Schaltfunktionen (Event-functions) eingeführt.

Die Kölner Kaiserglocke war mit 27 Tonnen die schwerste schwingende Glocke ihrer Zeit. (Alle anderen Glocken dieser Größenordnung konnten nicht schwingen und wurden nur durch den Antrieb des Klöppels zum Läuten gebracht.) Das erste Probeläuten im Südturm des Doms am 20.08.1875 wurde zur tragischen Sensation: Die Glocke gab keinen Ton von sich; der Klöppel schlug nicht an den Schlagring, sondern hing fast starr in der Glockenachse:

$$\varphi_1(t) \approx \varphi_2(t)$$

Der Dürener Lehrer Veltmann konnte 1876 dieses Verhalten erklären, indem er die Bewegungsgln. einer frei schwingenden Glocke – ohne Antrieb, Reibung, Anschlag – aufstellte und für kleine Schwingungen linearisierte. Mit den sog. „reduzierten Pendellängen“

$$l_1^{\text{red}} := \frac{I_1}{m_1\, l_1} \qquad\qquad l_2^{\text{red}} := \frac{I_2}{m_2\, l_2}$$

ergibt sich das Verhältnis der Schwingungen zu

$$\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \frac{s}{l_1^{\text{red}} - l_2^{\text{red}}}$$

Bei der Kölner Kaiserglocke betrugen die Längen

$$s = 66{,}7\ \text{cm} \qquad\qquad l_1^{\text{red}} - l_2^{\text{red}} = 65{,}3\ \text{cm}$$

so dass die Veltmann-Bedingung

$$\boxed{s \approx l_1^{\text{red}} - l_2^{\text{red}}} \tag{1}$$

sehr gut erfüllt war. Laut Veltmann ist das Versagen der Kaiserglocke also auf die Glockenmaße zurückzuführen.

Die geschilderten Rechnungen werden ausführlich vorgeführt in dem Lehrbuch „Klassische Mechanik“ von F. Kuypers, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage oder später, Aufgabe 13–8.

Erst 1878 gelang es nach mehrmaligem Austausch des Klöppels, die Glocke mit großem Personalaufwand zum Läuten zu bringen. 28 Soldaten der Deutzer Kaserne benötigten über eine Stunde, um die schwere Glocke zum Anschlag zu bringen. Aus diesem Grund und wegen ihres unsauberen Tones wurde sie nur selten geläutet. Im Volksmund hieß sie „Die

Abb. 2 Momentaufnahme einer MATLAB-Animation

Stumme von Köln“ oder „Die große Schweigerin“.

Unrühmlich wie ihr Dasein war auch ihr Ende: 1918 wurde sie am Ende des Ersten Weltkrieges für Heereszwecke eingeschmolzen. Wegen der plötzlichen Kapitulation wurden aber aus der gewonnenen Bronze keine Kanonen mehr gegossen.

Glockenschwingungen in verschiedenen Ländern: In Deutschland werden die Glocken meistens bei einem Winkel von 60° geläutet. In Österreich hingegen werden die Glocken bis über 90°, in Italien fast bis 180° hochgezogen. Spanische Glocken wiederum drehen sich im Kreis.

Das Zentrum der europäischen Glockenforschung liegt an der Hochschule Kempten. Im europäischen Forschungsprojekt „Probell“ untersuchen Prof. A. Rupp und seine Mitarbeiter, wie Glocken und Klöppel gefertigt sein müssen, damit sie gut klingen und lange halten.

Besonderheiten des Systems

Das hier vorgestellte Glockenmodell soll mit Hilfe numerischer Lösungen erste Einblicke in das Läuteverhalten von Glocken liefern. Dazu betrachten wir in den folgenden Abbn. einige Lösungen.

Abbn. 3a/b: Sie zeigen reibungs- und antriebsfreie Glockenschwingungen der Kaiserglocke für die Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 30° \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Nach Abb. 3a hängt der Klöppel der Kaiserglocke fast starr in der Glocke, da die Veltmann-Bedingung erfüllt ist. In Abb. 3b ist die Veltmann-Bedingung deutlich verletzt, so dass zahlreiche Anschläge erfolgen.

Abbn. 4a/b: Die Kölner Kaiserglocke schlägt erst 5 Minuten nach dem Einschalten des Antriebsmomentes das erste Mal an. Bei Verdopplung des Lagerabstandes s – die Veltmann-Bedingung ist nun verletzt – erfolgt der erste Anschlag bereits nach 38,5 s. In beiden Fällen sind die Anschläge unregelmäßig.

Abbn. 5a/b: Bei Erhöhung des Antriebsmomentes auf $15000\ \text{N m}$ und des ersten Winkelbereiches auf $\varphi_{1\,\text{Antrieb}} = 1{,}047\,\text{Rad} \mathrel{\hat{=}} 60°$ schlägt die Kaiserglocke immer noch unregelmäßig an, wohingegen eine Verdopplung des Lagerabstandes auf $s = 1{,}334\ \text{m}$ zu regelmäßigen Anschlägen führt.

Abbn. 6: Auch die Kölner Kaiserglocke schlägt regelmäßig an, wenn nur das Antriebsmoment und die Winkelbereiche $\varphi_{1\,\text{Antrieb}}$ und $\varphi_{1\,\text{Amplitude}}$ genügend groß sind.

Abbn. 7a/b: Die Kurven wurden für eine Glocke von Petit & Edelbrock berechnet. Sie bestätigen die Ergebnisse, die mit den antriebslosen Schwingungen in den Abbn. 2a/b gewonnen wurden

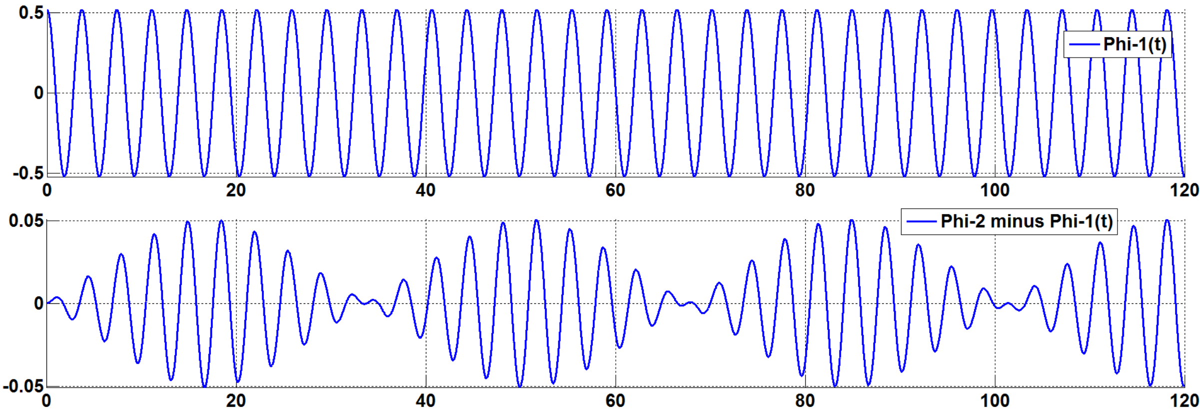

Abb. 3a Die Kölner Kaiserglocke schwingt ohne Reibung und ohne Antrieb mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 30° \qquad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = 0$$

Da der Betrag der Winkeldifferenz $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ immer unter $0{,}051$ Rad $\approx 2{,}9°$ bleibt, hängt der Klöppel fast bewegungslos in der Glocke und es erfolgt kein Anschlag.

Die Parameter lauten:

$$m_1 = 27.075 \text{ kg} \quad m_2 = 1.050 \text{ kg} \quad I_1 = 231.036 \text{ kg m}^2 \quad I_2 = 4.775{,}6 \text{ kg m}^2$$

$$l_1 = 2{,}6 \text{ m} \quad l_2 = 1{,}73 \text{ m} \quad s = 0{,}667 \text{ m} \quad \text{Stoßzahl} = 0{,}5 \quad \text{Drehmoment} = 0$$

$$\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 30° \mathrel{\widehat{=}} 0{,}524 \text{ Rad}$$

Die Veltmann-Bedingung ist sehr gut erfüllt.

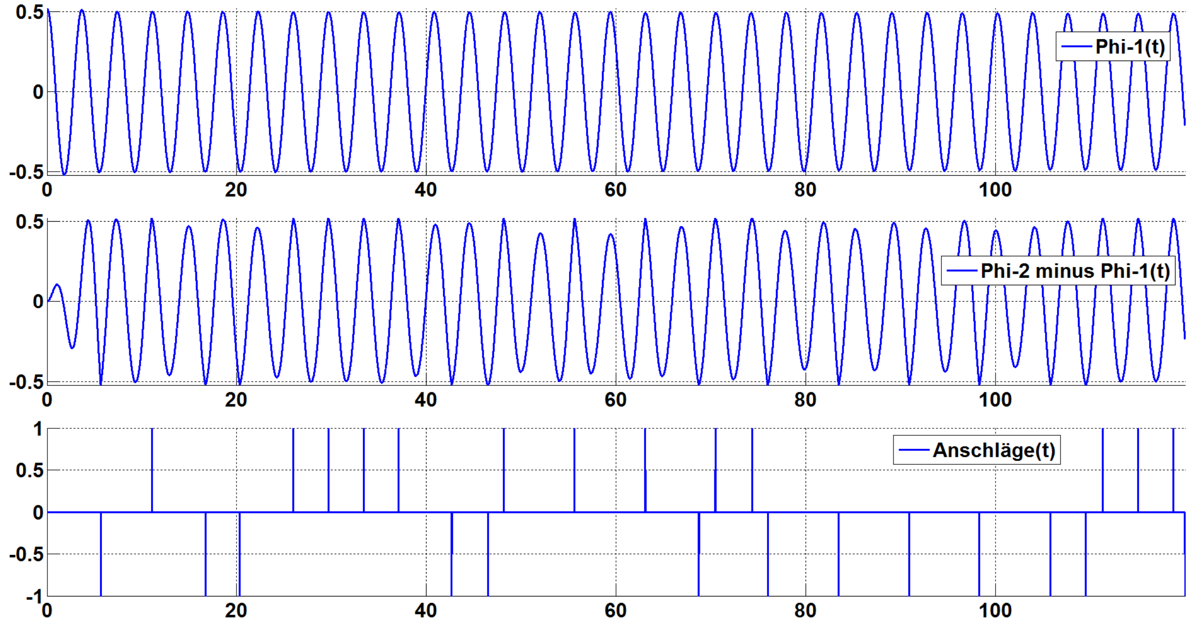

Abb. 3b Diese Kurven haben dieselben Anfangsbedingungen und Parameter wie die Kurven in der vorangehenden Abb. 2a – mit einer Ausnahme: Die Abstand s der beiden Lager D_1 und D_2 wurde auf

$$s = 1{,}334 \text{ m}$$

verdoppelt. Daher gilt die Veltmann-Bedingung nicht, so dass der Klöppel oft anschlägt. Die Anschläge sind gleich +1 bzw. –1, wenn der Klöppel auf der rechten bzw. auf der linken Seite an die Glocke stößt. Die Anschläge sind unregelmäßig.

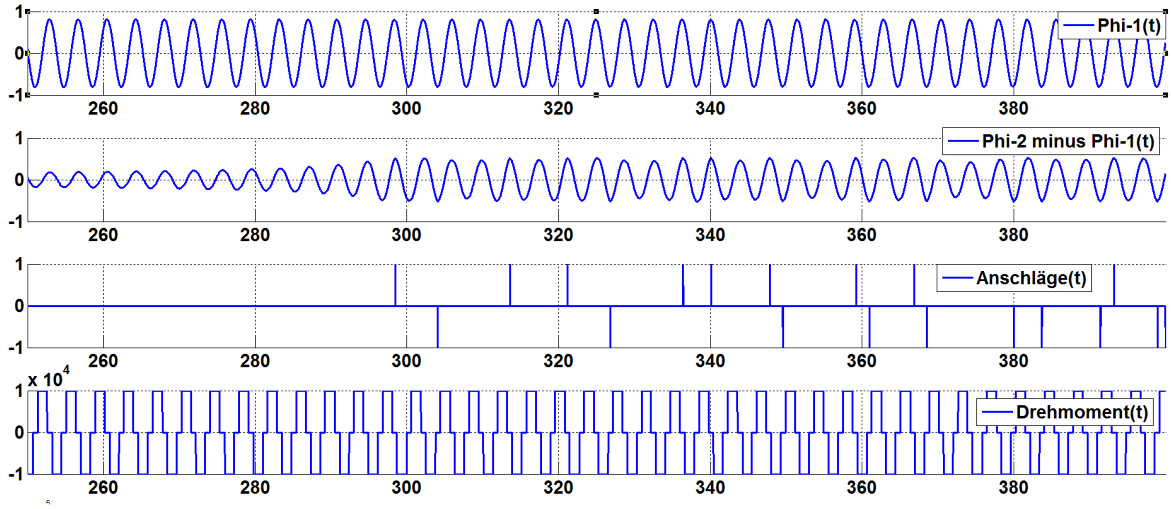

Abb. 4a Die anfangs ruhende, reibungsbehaftete Kaiserglocke wird mit einem Drehmoment von 10^4 Nm in Schwingungen versetzt. (Das Vorzeichen und das zeitweise Abschalten des Drehmomentes werden weiter unten bei den Dgln. besprochen.) Die Veltmann-Bedingung ist sehr gut erfüllt wegen

$$l_1^{\text{red}} - l_2^{\text{red}} = \frac{I_1}{m_1\, l_1} - \frac{I_2}{m_2\, l_2} = 0{,}653 \text{ m} \approx s = 0{,}667 \text{ m}$$

Nach dem Einschalten des Glockenantriebes (d. h. des Drehmomentes) dauert es fast 5 Minuten bis zum ersten Anschlag. Alle weiteren Anschläge sind unregelmäßig. Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \qquad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = 0$$

$$m_1 = 27.075 \text{ kg} \qquad m_2 = 1.050 \text{ kg} \qquad I_1 = 231.036 \text{ kg m}^2 \qquad I_2 = 4.775{,}6 \text{ kg m}^2$$

$$l_1 = 2{,}6 \text{ m} \qquad l_2 = 1{,}73 \text{ m} \qquad s = 0{,}667 \text{ m} \qquad \text{Stoßzahl} = 0{,}5 \qquad \text{Drehmoment} = 10000 \text{ N m}$$

$$\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 30° \mathrel{\hat=} 0{,}524 \text{ Rad} \qquad \varphi_{1\,\text{Antrieb}} = 0{,}698 \text{ Rad} \mathrel{\hat=} 40° \qquad \varphi_{1\,\text{Amplitude}} = 1{,}396 \text{ Rad} \mathrel{\hat=} 80°$$

$$c_{\text{Glocke}} = 8000\,\frac{\text{kg m}^2}{s} \qquad c_{\text{Klöppel}} = 400\,\frac{\text{kg m}^2}{s}$$

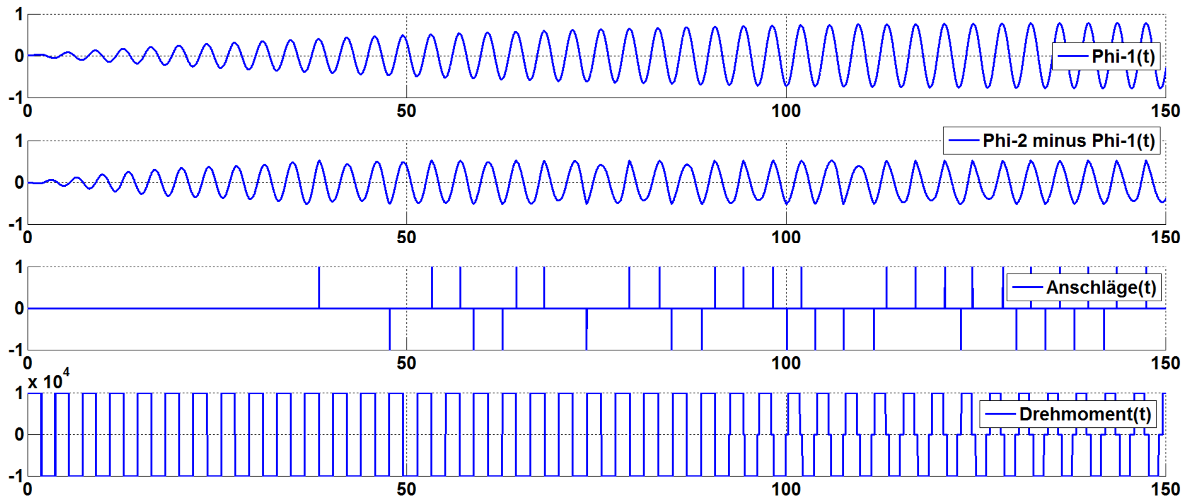

Abb. 4b Diese Kurven haben dieselben Anfangsbedingungen und Parameter wie die Kurven in der vorangehenden Abb. 4a – mit einer Ausnahme: Die Abstand s der beiden Lager D_1 und D_2 wurde auf

$$s = 1{,}334 \text{ m}$$

verdoppelt. Daher gilt die Veltmann-Bedingung nicht. Hier erfolgt der erste Anschlag bereits nach 38,5 s.

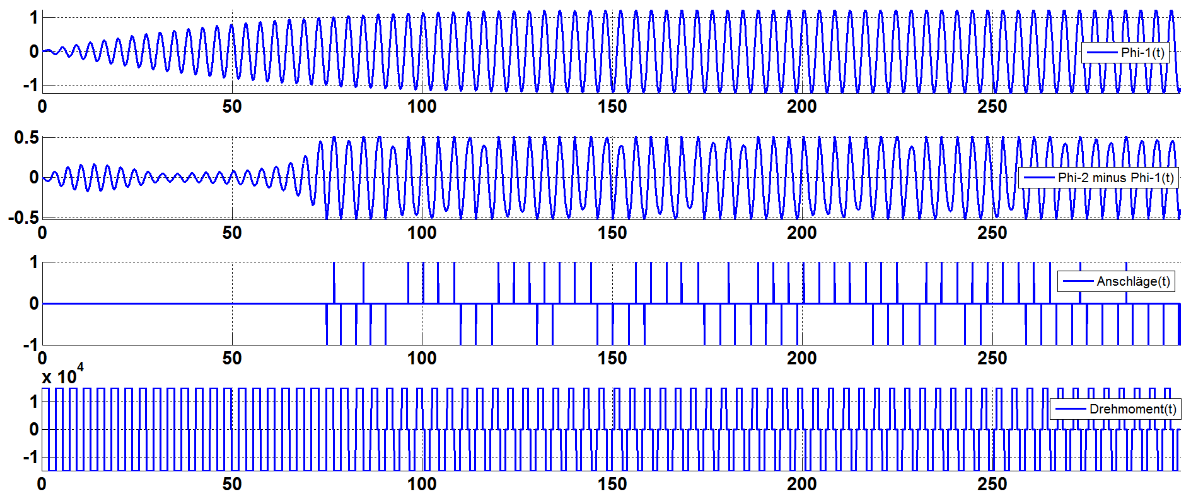

Abb. 5a De anfangs ruhende, reibungsbehaftete Kaiserglocke wird mit zwei erhöhten Parametern $N = 1{,}5 \cdot 10^{4}\ \mathrm{N\,m}$ und $\varphi_{1\,\mathrm{Antrieb}} = 1{,}047\ \mathrm{Rad} \mathrel{\hat{=}} 60°$ in Schwingungen versetzt. Leider sind die Anschläge immer noch unregelmäßig.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

$$m_1 = 27.075\ \mathrm{kg} \qquad m_2 = 1.050\ \mathrm{kg} \qquad I_1 = 231.036\ \mathrm{kg\ m^2} \qquad I_2 = 4.775{,}6\ \mathrm{kg\ m^2}$$

$$l_1 = 2{,}6\ \mathrm{m} \qquad l_2 = 1{,}73\ \mathrm{m} \qquad s = 0{,}667\ \mathrm{m} \qquad \text{Stoßzahl} = 0{,}5 \qquad \text{Drehmoment } = 15000\ \mathrm{N\ m}$$

$$\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 30° \mathrel{\hat{=}} 0{,}524\ \mathrm{Rad} \qquad \varphi_{1\,\mathrm{Antrieb}} = 1{,}047\ \mathrm{Rad} \mathrel{\hat{=}} 60° \qquad \varphi_{1\,\mathrm{Amplitude}} = 1{,}396\ \mathrm{Rad} \mathrel{\hat{=}} 80°$$

$$c_{\mathrm{Glocke}} = 8000\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{s} \qquad c_{\mathrm{Klöppel}} = 400\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{s} \qquad h = 0{,}05\ \mathrm{s}$$

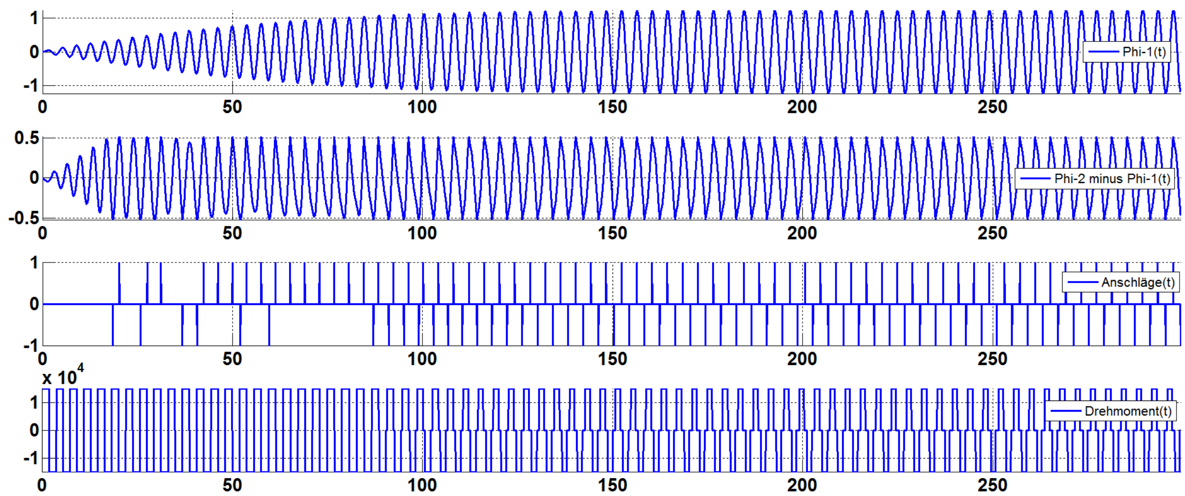

Abb. 5b Diese Kurven haben dieselben Anfangsbedingungen und Parameter wie die Kurven in der vorangehenden Abb. 5a – mit einer Ausnahme: Die Abstand s der beiden Lager D_1 und D_2 wurde auf

$$s = 1{,}334\ \mathrm{m}$$

verdoppelt. Daher wird die Veltmann-Bedingung verletzt. Nach 87 s sind alle Anschläge regelmäßig.

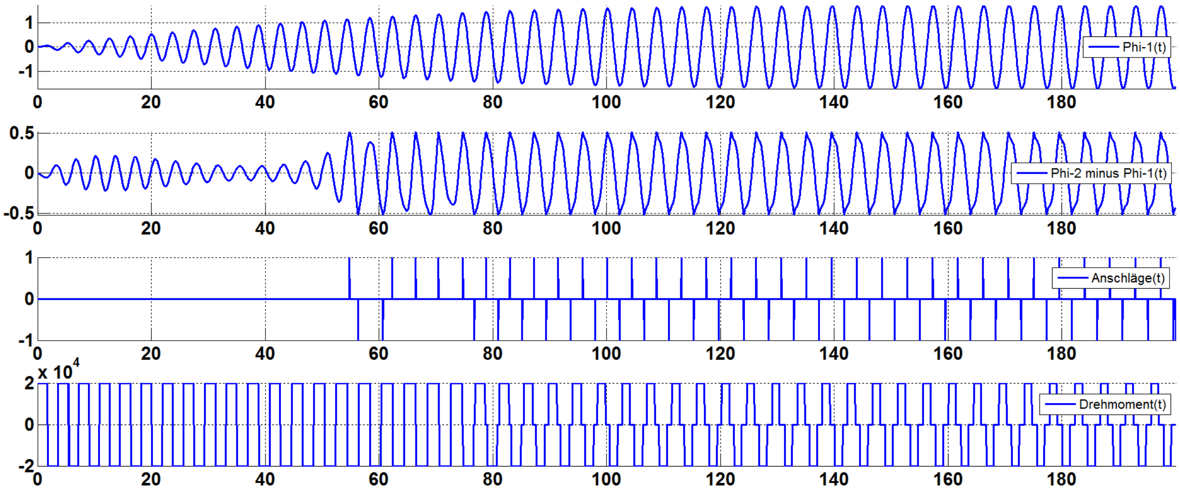

Abb. 6a Auch die Kölner Kaiserglocke kann mit hohen Drehmomenten und großen Winkelbereichen $\varphi_{1\,\text{Antrieb}}$ und $\varphi_{1\,\text{Amplitude}}$ so angetrieben werden, dass sie regelmäßig anschlägt.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

$$m_1 = 27.075 \text{ kg} \qquad m_2 = 1.050 \text{ kg} \qquad I_1 = 231.036 \text{ kg m}^2 \qquad I_2 = 4.775{,}6 \text{ kg m}^2$$

$$l_1 = 2{,}6 \text{ m} \qquad l_2 = 1{,}73 \text{ m} \qquad s = 0{,}667 \text{ m} \qquad \text{Stoßzahl} = 0{,}5 \qquad \text{Drehmoment} = 20000 \text{ N m}$$

$$\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 30° \mathrel{\widehat{=}} 0{,}524 \text{ Rad} \qquad \varphi_{1\,\text{Antrieb}} = 1{,}396 \text{ Rad} \mathrel{\widehat{=}} 80° \qquad \varphi_{1\,\text{Amplitude}} = 1{,}745 \text{ Rad} \mathrel{\widehat{=}} 100°$$

$$c_{\text{Glocke}} = 8000 \,\frac{\text{kg m}^2}{s} \qquad c_{\text{Klöppel}} = 400 \,\frac{\text{kg m}^2}{s} \qquad h = 0{,}05 \text{ s}$$

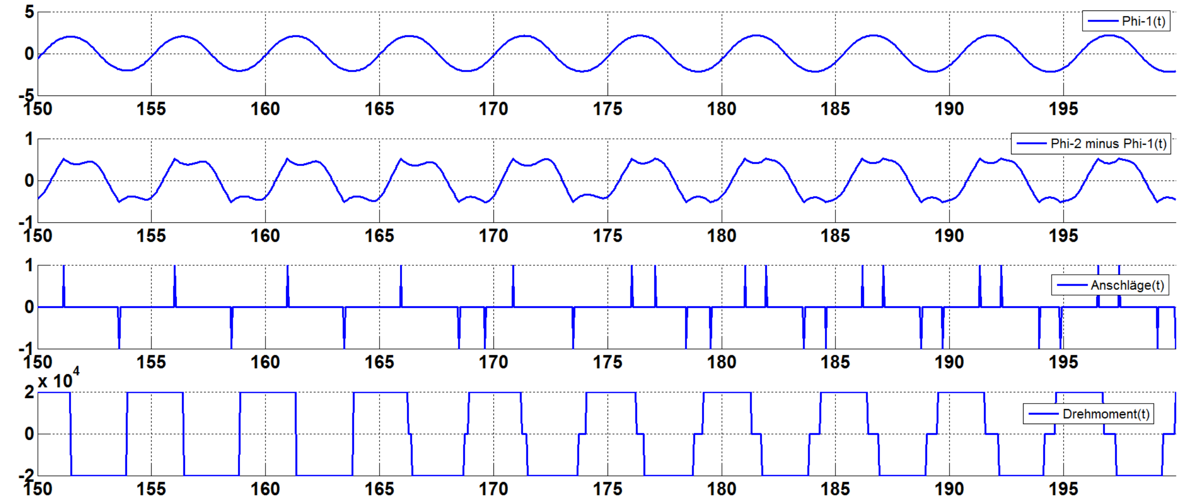

Abb. 6b Diese Kurven haben dieselben Anfangsbedingungen und Parameter wie die Kurven in der vorangehenden Abb. 6a – mit zwei Ausnahmen: Beide Winkel für den Antrieb wurden erhöht auf

$$\varphi_{1\,\text{Antrieb}} = 2{,}094 \text{ Rad} \mathrel{\widehat{=}} 120° \qquad \varphi_{1\,\text{Amplitude}} = 2{,}618 \text{ Rad} \mathrel{\widehat{=}} 150°$$

Jetzt sind die Winkelbereiche für den Antrieb so groß, dass nach 176 s nur noch Doppelanschläge auftreten. Die Kurve $\varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ zeigt, dass der jeweils zweite Anschlag schwächer ist als der erste. Das wird durch eine genaue Betrachtung des Zeitverlaufs der Energie $E(t)$ bestätigt; die Energie fällt jeweils beim ersten Anschlag stärker als beim zweiten.

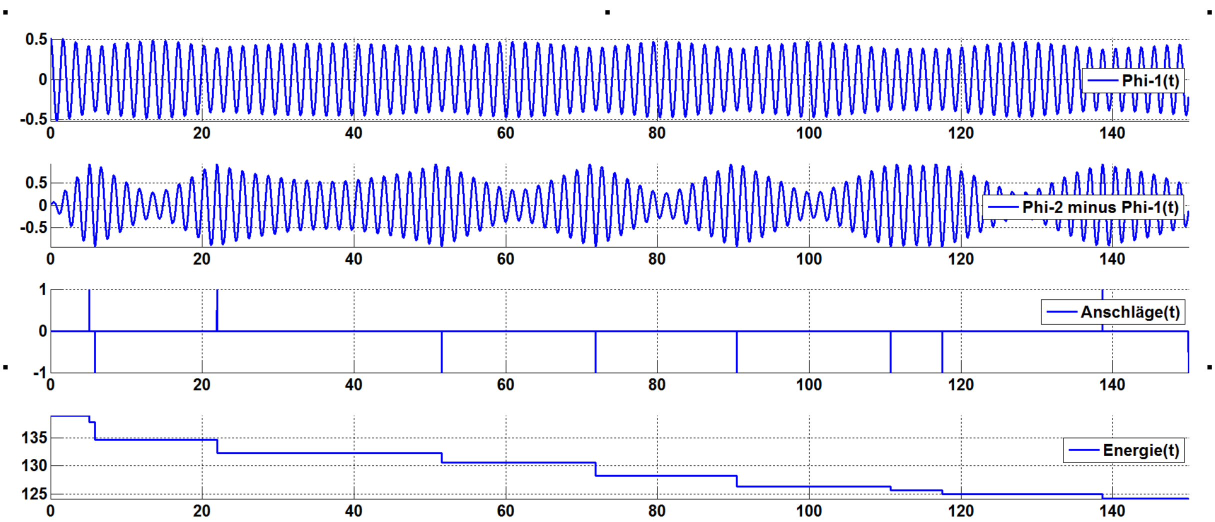

Abb. 7a Eine Glocke von Petit & Edelbrock schwingt ohne Reibung und ohne Antrieb.

Wegen $l_1^{\text{red}} - l_2^{\text{red}} = \dfrac{I_1}{m_1\, l_1} - \dfrac{I_2}{m_2\, l_2} = 0{,}1244 \text{ m} \neq s = 0{,}217 \text{ m}$

ist die Veltmann-Bedingung deutlich verletzt. Der Klöppel schlägt unregelmäßig an.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 30° \qquad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = 0$$

$$m_1 = 270{,}9 \text{ kg} \quad m_2 = 16{,}6 \text{ kg} \quad I_1 = 63{,}222 \text{ kg m}^2 \quad I_2 = 4{,}1291 \text{ kg m}^2$$

$$l_1 = 0{,}349 \text{ m} \quad l_2 = 0{,}457 \text{ m} \quad s = 0{,}217 \text{ m} \quad \text{Stoßzahl} = 0{,}35 \quad \text{Drehmoment} = 0$$

$$\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 53° \mathrel{\hat=} 0{,}9250 \text{ Rad}$$

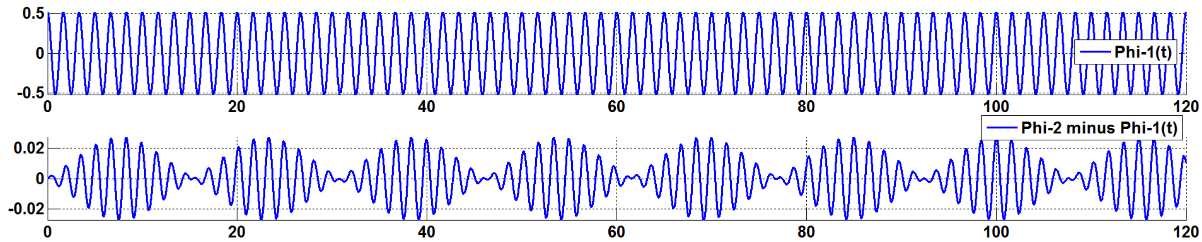

Abb. 7b Diese Kurven haben dieselben Anfangsbedingungen und Parameter wie die Kurven in der vorangehenden Abb. 7a – mit einer Ausnahme: Die Abstand s der beiden Lager D_1 und D_2 wurde auf

$$s = 0{,}125 \text{ m}$$

verringert. Jetzt ist die Veltmann-Bedingung erfüllt, so dass der Klöppel fast bewegungslos in der antriebslosen Glocke hängt und nicht anschlägt.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die vor der numerischen Lösung einzugebenden **Parameter** haben folgende Bedeutung:

I_1, I_2 : Trägheitsmomente von Glocke und Klöppel bzgl. der beiden Drehpunkte D_1 und D_2.

Stoßzahl : Stöße können durch die sog. „Stoßzahl" ε charakterisiert werden, die wie folgt mit den Normalkomponenten der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß definiert ist:

$$\varepsilon := -\frac{v_{2,\,\mathrm{nach}} - v_{1,\,\mathrm{nach}}}{v_{2,\,\mathrm{vor}} - v_{1,\,\mathrm{vor}}}$$

Die Stoßzahl ist also das Verhältnis von relativer Trennungsgeschwindigkeit zu relativer Annäherungsgeschwindigkeit. Die Stoßzahl liegt im Bereich $0 \le \varepsilon \le 1$ und wird experimentell bestimmt. $\varepsilon = 0$ beschreibt einen vollplastischen Stoß, bei dem beide Körper nach dem Stoß identische normale Geschwindigkeitskomponenten haben. $\varepsilon = 1$ beschreibt den elastischen Stoß. Bei der Stoffpaarung Stahl–Stahl ist $\varepsilon \approx 0{,}6 \ldots 0{,}8$; bei der Stoffpaarung Glas–Glas ist $\varepsilon \approx 0{,}94 \ldots 0{,}98$.

Bei einem zentralen Stoß beträgt der kinetische Energieverlust:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2 \left(1 - \varepsilon^2\right)$$

Drehmoment : Das Programm MECHANICUS setzt das vom Antrieb erzeugte Drehmoment N_{extern} positiv bzw. negativ an, wenn die Glocke nach rechts bzw. nach links schwingt, wenn also $\dot{\varphi}_1 \ge 0$ bzw. $\dot{\varphi}_1 < 0$ gilt.

In folgenden beiden Fällen wird N_{extern} im Programm MECHANICUS gleich Null gesetzt:

1) $\left|\varphi_1(t)\right| > \varphi_{1\,\mathrm{Antrieb}}$

2) $\left|\varphi_1(t)\right| > \varphi_{1\,\mathrm{Amplitude}}$. Nach Erfüllung dieser Bedingung bleibt das externe Drehmoment solange Null (unabhängig von Bedingung 1), bis die Amplitude der Schwingung des Glockenwinkels $\varphi_1(t)$ unter $\varphi_{1\,\mathrm{Amplitude}}$ fällt. Die genaue Bedingung lautet in MATLAB:

$$\left|\varphi_1(t)\right| <= \varphi_{1\,\mathrm{Amplitude}} \quad \& \quad \text{Vorzeichenänderung von } \dot{\varphi}_1(t)$$

$\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$: Der Klöppel trifft auf den Schlagring der Glocke, wenn der Betrag $\left|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right|$ der Winkeldifferenz den eingegebenen Wert erreicht.

$\varphi_{1\,\mathrm{Antrieb}}$: Für $\left|\varphi_1(t)\right| > \varphi_{1\,\mathrm{Antrieb}}$ wird der Antrieb der Glocke ausgeschaltet.

$\varphi_{1\,\mathrm{Amplitude}}$: Damit die Schwingung der Glocke nicht zu heftig wird, bleibt der Antrieb solange ausgeschaltet, bis die Schwingungsamplitude wieder unter den Wert $\varphi_{1\,\mathrm{Amplitude}}$ gefallen ist.

c_{Glocke}: Auf die Glocke wirkt das lineare Reibungsmoment $c_{\mathrm{Glocke}}\,\dot{\varphi}_1$. (Siehe weiter unten die Dgln.)

$c_{\mathrm{Klöppel}}$: Auf den Klöppel wirkt das lineare Reibungsmoment $c_{\mathrm{Klöppe}}\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right)$. (Siehe die Dgln.)

Die Reibungszahlen c_{Glocke}, $c_{\mathrm{Klöppel}}$ müssen so gewählt werden, dass freie Schwingungen in einer geeigneten Zeit auf einen bestimmten Wert abfallen.

Die Dgln. lauten:

$$\left(I_1 + m_2 s^2\right)\ddot{\varphi}_1 + g\left(m_1 l_1 + m_2 s\right)\sin\varphi_1 + c_{\text{Glocke}}\,\dot{\varphi}_1 - c_{\text{Klöppel}}\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right) +$$

$$+ m_2 s l_2\left[\ddot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \dot{\varphi}_2^2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right] = N_{\text{extern}} \tag{1a}$$

$$I_2\,\ddot{\varphi}_2 + m_2\, g\, l_2 \sin\varphi_2 + c_{\text{Klöppel}}\left(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\right) +$$

$$+ m_2 s l_2\left[\ddot{\varphi}_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - \dot{\varphi}_1^2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right] = 0 \tag{1b}$$

Das Reibmoment auf die Glocke ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$ der Glocke. Das Reibmoment auf den Klöppel ist proportional zur Differenz $\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1$ der beiden Winkelgeschwindigkeiten.

Das vom Antrieb erzeugte Drehmoment N_{extern} ist positiv bzw. negativ, wenn die Glocke nach rechts bzw. nach links schwingt, wenn also $\dot{\varphi}_1 \geq 0$ bzw. $\dot{\varphi}_1 < 0$ gilt.

In folgenden beiden Fällen wird N_{extern} im Programm MECHANICUS gleich Null gesetzt:

1) $\left|\varphi_1(t)\right| > \varphi_{1\,\text{Antrieb}}$

2) $\left|\varphi_1(t)\right| > \varphi_{1\,\text{Amplitude}}$

Nach Erfüllung dieser Bedingung bleibt das externe Drehmoment solange Null (unabhängig von Bedingung 1), bis die Amplitude der Schwingung des Glockenwinkels $\varphi_1(t)$ unter $\varphi_{1\,\text{Amplitude}}$ fällt. Die genaue Formulierung im Programm MECHANICUS lautet:

$$\left|\varphi_1(t)\right| <= \varphi_{1\,\text{Amplitude}} \quad \& \quad \text{Vorzeichenänderung von } \dot{\varphi}_1(t)$$

Numerische Lösungsverfahren

Das MATLAB-Verfahren ode45 ist in der Regel das schnellste und beste Verfahren.

Animation

Die MATLAB-Animation läuft immer mit ein und derselben Glocke ab, die immer dieselben geometrischen Daten hat. Daher ist insbesondere der Maximalwert von $\left|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right|$, bei dem ein Anschlag erfolgt, bei der Animation immer gleich $24° \mathrel{\hat{=}} 0{,}4189$ Rad.

Folglich muss der numerisch berechnete Winkel $\varphi_{2\,\text{num}}(t)$ bei der Animation so skaliert werden, dass der Anschlag bei $\varphi_{2\,\text{Animation}}(t) - \varphi_1(t) = \pm\, 0{,}4189$ Rad erfolgt. Daher wird der Animationswinkel des Klöppels während der MATLAB-Animation wie folgt berechnet:

$$\varphi_{2\,\text{Animation}}(t) = \varphi_1(t) + \frac{0{,}4189}{\max\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}\left[\varphi_{2\,\text{num}}(t) - \varphi_1(t)\right]$$

Mit diesem Winkel schwingt der Klöppel bei der Animation.

Die Skalierung des Klöppelausschlages relativ zur Glockenachse dürfte bei der Animation kaum stören, ja den meisten Beobachtern noch nicht einmal auffallen.

Literatur

Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 13–8.

In Teil a) der Aufgabe werden die Dgln. einer antriebslosen, reibungsfreien Glocke ohne Anschläge aufgestellt. In Teil b) wird die Kölner Kaiserglocke besprochen und wird die Läutebedingung von Veltmann aufgestellt.