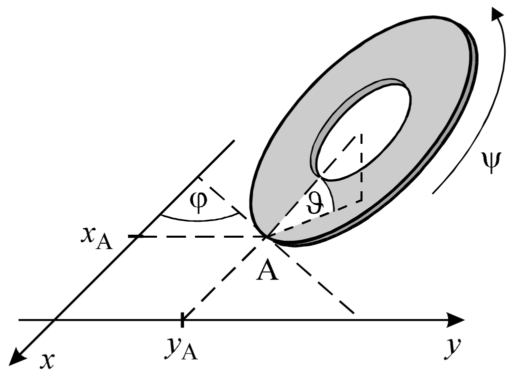
Taumelnder Zylinder – Kein Schlupf, harter Boden

Ein Hohlzylinder mit Außenradius R_a, Innenradius R_i und Länge l rollt und taumelt **ohne Schlupf** auf dem horizontalen, harten Boden. Die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes und die drei Eulerwinkel φ, ϑ, ψ beschreiben Lage und Orientierung des Zylinders.



Ein Hohlzylinder mit Außenradius R_a, Innenradius R_i und Länge l – letztere ist hier sehr klein –, rollt ohne Schlupf auf dem horizontalen Boden. Die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes und die drei **Eulerwinkel** φ, ϑ, ψ beschreiben Lage und Orientierung des Zylinders.

Mathematisches Modell

Das Modell enthält drei Zwangsbedingungen: Zwei differentielle Rollbedingungen

$$\dot{x}_A + R_a\,\dot{\psi}\cos\varphi = 0$$

$$\dot{y}_A + R_a\,\dot{\psi}\sin\varphi = 0$$

und eine holonome Bedingung für die Höhe des Schwerpunktes:

$$z_S = R_a\sin\vartheta + \frac{l}{2}\cos\vartheta$$

Aus folgenden zwei Gründen ist das Modell bei vielen Rechnungen **unrealistisch**:

- Das Verhältnis

  $$\frac{\text{Haftkraft}}{\text{Normalkraft}}$$

  ist in vielen Rechnungen zeitweise mehrere Zehnerpotenzen groß, so dass ein Haften wegen der beschränkten Haftreibungszahl μ_0 in der Realität nicht möglich ist.
- Bei heftigen Nutationen (Schwankungen des Neigungswinkels ϑ) kann die vertikale Beschleunigung des Schwerpunktes kleiner als $-g$ werden [1]. In diesem Fall ist die Normalkraft des Zylinders auf den Boden negativ, so dass der Zylinder eigentlich vom Boden abheben will.

[1] Das Auftreten von *negativen* Zwangskräften bei heftigen Nutationen des Zylinders (also bei raschen Auf- und Abbewegungen des Zylinder-Schwerpunktes) kann anschaulich wie folgt begründet werden: Wir betrachten einen Sportler, der in Schuhen steht, die am Boden festgeklebt sind. Jetzt soll der Sportler die Beine mit Muskelkraft so schnell anziehen, also so schnell in die Hocke gehen, dass sein Schwerpunkt schneller als mit der Erdbeschleunigung nach unten beschleunigt wird: $\ddot{z}_S < -g$. In diesem Fall ist die Normalkraft auf den Boden *negativ*, d. h. die Schuhe bleiben nur wegen der Verklebung auf dem Boden; ohne Leim würden die Schuhe vom Boden abheben.

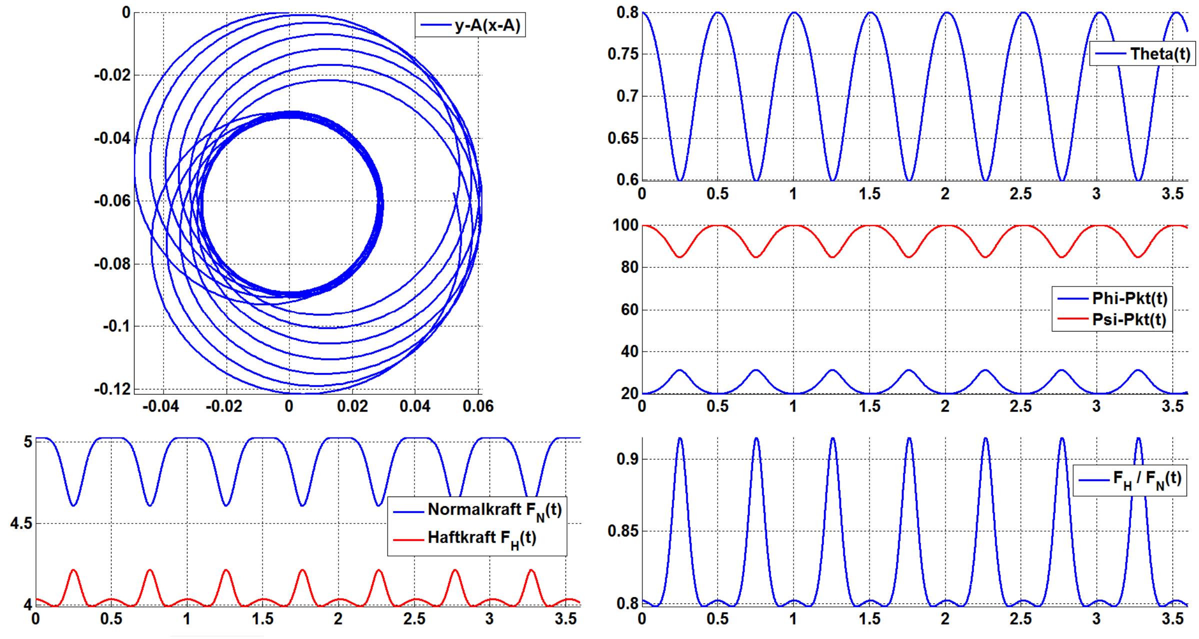


Abb. 2 Diese Kurven zeigen eine realistische Bewegung: Die Normalkraft $F_N(t)$ ist positiv und das Verhältnis „Haftkraft F_H / Normalkraft F_N “ ist kleiner als 0,92, so dass Rollen ohne Schlupf für eine Haftreibungszahl $\mu_0 > 0{,}92$ möglich ist.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$\dot{\varphi}(0) = 20\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$ $\quad \vartheta(0) = 0{,}8\text{ Rad}$ $\quad \dot{\psi}(0) = 100\,\frac{\text{Rad}}{\text{s}}$ Die 5 restlichen Anfangsbed. sind Null.

$m = 0{,}5\text{ kg}$ $\quad l = 0{,}1\text{ m}$ $\quad R_a = 0{,}01\text{ m}$ $\quad R_i = 0{,}008\text{ m}$ $\quad c_{\text{Luft}} = 0$

Es ist daher empfehlenswert, bei den graphischen Untersuchungen der Lösungen u. a. auch immer die Kurven der Haftkraft $F_H(t)$ und der Normalkraft $F_N(t)$ $N(t)$ zu betrachten.

Die zwei genannten Probleme lassen sich durch folgende Änderungen des Modells beheben:

1. Problem: Der Zylinder rollt nicht nur, sondern gerät bei Überschreiten der maximalen Haftreibungskraft ins *Rutschen*.

2. Problem: Der Boden ist weich (lineare Rückstellkraft) und der Zylinder kann in die Luft springen.

Bei vielen Anfangsbedingungen wird der Neigungswinkel ϑ im Laufe der Berechnung größer als 90°, so dass der Zylinder gewissermaßen in den Boden eintaucht, wobei seine (jetzt *oben* befindliche) Grundfläche immer noch auf dem Boden ohne Schlupf rollt. Hier muss der Anwender andere Anfangsbedingungen oder andere Parameter wählen oder aber die numerische Berechnung rechtzeitig beenden.

Bemerkung: In MECHANICUS ist gibt es ein zweites Modell eines taumelnden und rollenden Zylinders, in dem der Zylinder auch rutschen kann. Außerdem kann der Zylinder dort vom Boden abheben, also in die Luft fliegen und anschließend wieder auf dem *weichen* Boden landen. Bewegungen „unter dem Boden“ mit $\vartheta > 90°$ sind allerdings auch dort möglich. Ein gewisser Nachteil des 2. Modells besteht darin, dass man dort Bewegungen mit schöner Animation nur mit mehr Mühe finden kann.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Das Reibungsmoment der Rollbewegung und vor allem der Luftwiderstand können kaum realistisch beschrieben werden. Daher wurde nur die Luftreibung durch einen ganz groben Ansatz beschrieben. Danach soll die Luftreibung den Winkelbewegungen ein **laminares Reibmoment** entgegensetzen, wobei diejenigen Reibungsmomente vernachlässigt werden, die parallel sind zur Symmetrieachse des *glatten* Zylinders. Die Komponente der Winkelgeschwindigkeit, die parallel zur Symmetrieachse des Zylinders ist, soll also keinen Beitrag zu Reibungsverlusten liefern. Demnach wird die Luftreibung durch folgende Dissipationsfunktion beschrieben:

$$P = \frac{c_{\text{Luft}}}{2}\,\omega^2 = \frac{c_{\text{Luft}}}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta\right)$$

Die expliziten Dgln. sind recht lang und werden hier nicht genannt. Sie sind sehr ähnlich zu den Dgln. der *ohne Schlupf rollenden Münze*.

Die expliziten Dgln. für $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{\psi}$ enthalten Terme, die proportional zu $1/\sin\vartheta$ sind. Folglich haben die expliziten Dgln. eine **Singularität** für $\sin\vartheta = 0$, die die numerischen Lösungsverfahren von MatLab zum Absturz bringen kann.

Die Dgln. können allgemein nicht analytisch gelöst werden.

Animation

Bei den Animationen wird die Spur der Münze am Boden aufgezeichnet.

Literatur

Literatur ist nicht bekannt. Die Dgln. und ihre Herleitung sind aber sehr ähnlich zu den Dgln. der **ohne Schlupf rollenden Münze** und deren Herleitung.

Die Dgln. der ohne Schlupf und ohne Reibungsverluste rollenden Münze werden mit Hilfe der Lagrangegln. 1. Art ausführlich hergeleitet in: F. Kuypers: Klassische Mechanik, Wiley-VCH-Verlag