

Diskrete Fouriertransformationen

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) berechnet das Spektrum einer Variablen f , die nicht als Funktion $f(t)$ der Zeit, sondern in einer Wertetabelle mit Funktionswerten gegeben ist:

$$y_k = f(t_k) = f(k \Delta t) \quad k = 1, \dots, N$$

mit Δt = äquidistanter Zeitabstand der tabellierten Werte

und N = Zahl der Stützstellen, die bei einer FFT ausgewertet werden.¹

In MECHANICUS ist der äquidistante Zeitabstand Δt die konstante Ausgabeschrittweite des ode-Verfahrens, das die Dgln. numerisch löst. (ode steht für ordinary differential equation.)

Beachte, dass die Zahl N der Stützstellen, die bei einer FFT ausgewertet werden, nicht unbedingt gleich, sondern auch *kleiner sein kann* als die Zahl N_{ode} der Zeitschritte, die beim Lösen einer Dgl. berechnet werden: $N \leq N_{\text{ode}}$. Mit anderen Worten: Eine FFT wertet evtl. nur einen Teil eines numerisch berechneten Lösungsvektors aus.

Multiplikation der Zahl N der verwendeten Stützstellen mit der konstanten Ausgabeschrittweite Δt ergibt die Dauer T des Zeitintervalls, das von der FFT ausgewertet wird:

$$T = N \Delta t \quad (1)$$

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall N = gerade. (Für ungerade N gelten die zentralen Aussagen nahezu unverändert.) Dann enthält das mit der FFT ermittelte Spektrum $N/2$ äquidistante Frequenzen. Die Frequenzen des Spektrums lauten wie folgt:

$$\frac{2\pi}{T} \leq n \frac{2\pi}{T} \leq \frac{N}{2} \frac{2\pi}{T} \quad \underset{T = N \Delta t}{=} \quad \frac{\pi}{\Delta t} \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (2)$$

Nach dieser Gl. *hängen die kleinste Frequenz $2\pi/T$ im Spektrum und der Abstand $2\pi/T$ der äquidistanten Frequenzen nur von der Endzeit T ab* und nicht von der Ausgabeschrittweite Δt . Daraus ergeben sich sofort zwei Regeln für die Wahl des Produktes $T = N \Delta t$:²

¹ Bei N Stützstellen ist die Zahl der Rechenoperationen in einer DFT proportional zu N^2 .

Seit Mitte der sechziger Jahre kennt man sehr schnelle Algorithmen (Fast-Fourier-Transformation, kurz FFT), die exakt dieselben Ergebnisse liefern wie die Gln. der DFT, bei denen aber der Rechenaufwand wegen der Ausnutzung von Symmetrien und Periodizitäten nur von der Ordnung $N \ln(N)$ ist. Für $N = 10^4$ wird die Berechnung der Fourierkoeffizienten mit einer FFT etwa um den Faktor $10^4 / \ln 10^4 \approx 1086$ beschleunigt.

² Bereits bei der numerischen Lösung der Dgl. werden die Ausgabeschrittweite Δt und über die Gl.

$$T_{\text{Ende}} = N_{\text{ode}} \Delta t \quad \text{mit} \quad T_{\text{Ende}} = \text{Endzeit der wirklichen Bewegung.}$$

die *maximal mögliche* Zahl der Stützstellen festgelegt: $N \leq N_{\text{ode}}$.

1) Die Zeit $T = N \Delta t$ muss so groß gewählt werden, dass die kleinste Frequenz $2\pi/T$ im berechneten Spektrum kleiner ist als die kleinste Frequenz des mechanischen Systems.

2) Die Zeit $T = N \Delta t$ muss so groß gewählt werden, dass der Abstand $2\pi/T$ benachbarter Frequenzen (siehe Gl. (2)) deutlich kleiner ist als der Abstand derjenigen Frequenzen des mechanischen Systems, die man *getrennt* in der DFT erkennen will.

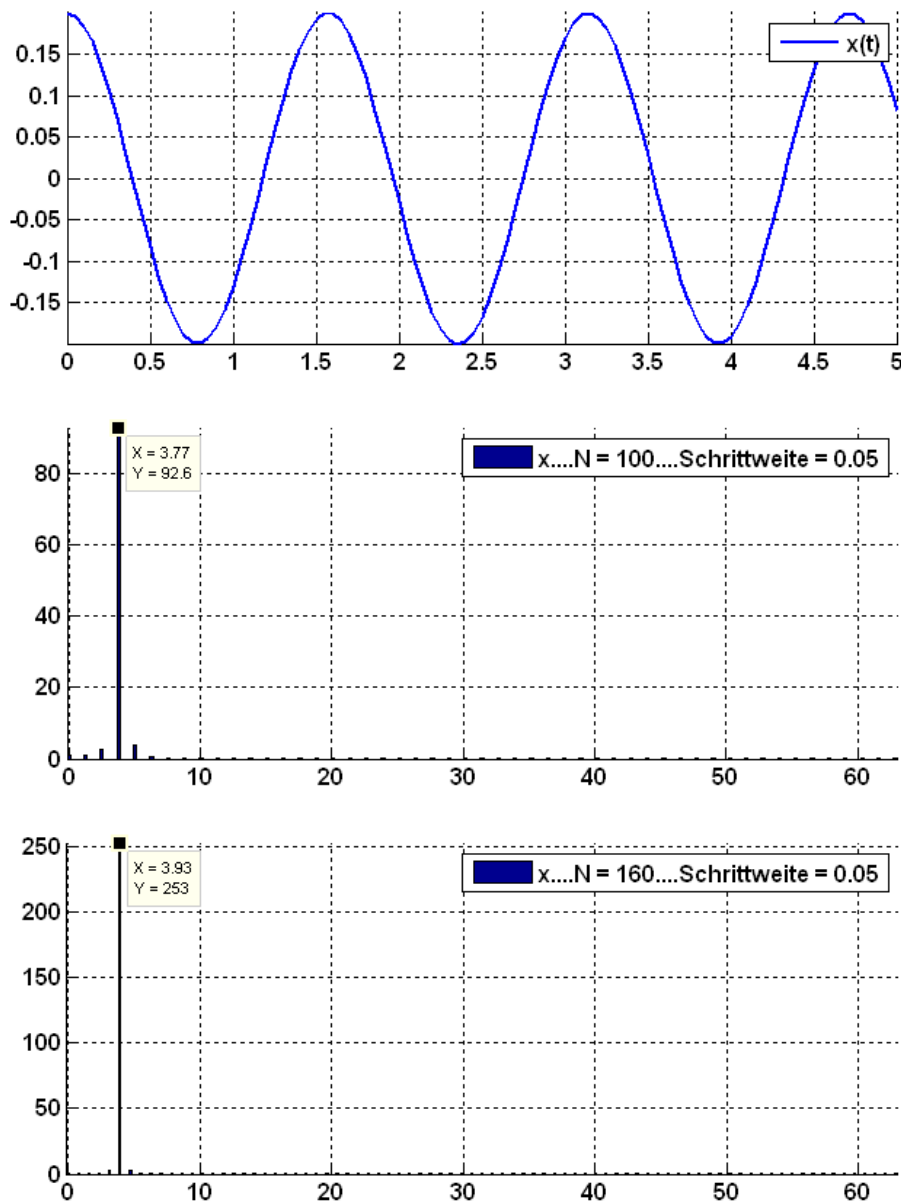


Abb. 1 Hier hat MECHANICUS die ungedämpfte Schwingung eines linearen Oszillators der Eigenfrequenz $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ mit der Ausgabeschrittweite 0,05 s numerisch berechnet. Bei den zwei anschließenden FFTn wurden einmal $N = 100$ und einmal $N = 160$ Stützstellen verwendet.

In den zwei Spektren treten die Frequenzen $\omega_n := n \frac{2\pi}{5 \text{ s}} \approx n \cdot 1,257 \text{ s}^{-1}$ $\omega_n := n \frac{2\pi}{8 \text{ s}} \approx n \cdot 0,785 \text{ s}^{-1}$

auf. Die Frequenzen $\omega_3 = 3 \frac{2\pi}{5 \text{ s}} \approx 3,77 \text{ s}^{-1}$ $\omega_5 = 5 \frac{2\pi}{8 \text{ s}} \approx 3,93 \text{ s}^{-1}$

kommen der Eigenfrequenz $\omega_0 = 4 \text{ s}^{-1}$ am nächsten und haben daher die größten Amplituden.

Bei der DFT einer diskretisierten harmonischen Schwingung

$$y_k = f(t_k) = A \cos(\omega_0 k \Delta t) \quad \text{mit} \quad k = 1, \dots, N$$

hat diejenige Frequenz

$$\omega_n := n \frac{2\pi}{T}$$

im berechneten Spektrum die größte Amplitude, die der Frequenz ω_0 am nächsten kommt. Die Amplituden der benachbarten Frequenzen $\omega_{n \pm 1}$ sind umso kleiner, je dichter ω_n bei ω_0 liegt. Diese Aussagen werden durch Abb. 1 bestätigt.

Umgekehrt wird nach Gl. (2) **die größte Frequenz $\pi/\Delta t$ im Spektrum nur von der Abgabeschrittweite Δt bestimmt** und nicht von der Zeit $T = N \Delta t$. Die größte Frequenz $\pi/\Delta t$ hat die kleinste Periode

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\pi/\Delta t} = 2\Delta t$$

Die schnellste Schwingung wird zweimal in ihrer Periode abgetastet. *Folglich können Schwingungen mit einer DFT nur dann erfasst werden, wenn sie mindestens zweimal in ihrer Periode abgetastet werden.*

Nun sollte man annehmen, dass Schwingungen, die weniger als zweimal pro Periode abgetastet werden, im Fourierspektrum nicht auftreten. Ein solches Resultat wäre nicht allzu tragisch. Leider ist der Sachverhalt nicht so harmlos: Die Nichtbeachtung der Regel, dass jede Schwingung mindestens zweimal pro Periode abgetastet werden muss, führt zu einer schwerwiegenden Verfälschung des Spektrums. Der einfache Beweis dieser gravierenden Aussage sieht wie folgt aus: *Schwingungen mit den Frequenzen*

$$\omega_0$$

$$\text{und} \quad \hat{\omega}_0 := \omega_0 + 2m \frac{\pi}{\Delta t} \tag{3}$$

*haben für alle ganzen Zahlen m zu den Abtastzeiten $k \Delta t$ dieselben Abtastwerte*³ und liefern daher dasselbe Fourierspektrum:

$$\cos \left[\left(\omega_0 + 2m \frac{\pi}{\Delta t} \right) k \Delta t \right] = \cos(\omega_0 k \Delta t + 2\pi m k) \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für alle } m}}{=} \cos(\omega_0 k \Delta t)$$

Dadurch ergeben sich für die Fourieranalyse der Schwingung $\sin(\omega_0 t)$ zwei Möglichkeiten:

³ Beachte, dass der Unterschied zwischen den Frequenzen

$$\omega_0 \quad \text{und} \quad \hat{\omega}_0 := \omega_0 + 2m \frac{\pi}{\Delta t}$$

der identisch abgetasteten Schwingungen ein geradzahliges Vielfaches der Maximalfrequenz $\pi/\Delta t$ ist, die im Spektrum auftritt.

1. Möglichkeit: $\omega_0 < \frac{\pi}{\Delta t}$

Die zu analysierende Schwingung $\sin \omega_0 t$ wird also mehr als zweimal pro Periode abgetastet. Die DFT liefert ein korrektes Ergebnis. Die Frequenzen $\hat{\omega}_0$ sind für alle $m \neq 0$ betragsmäßig größer als $\pi / \Delta t$ und werden daher nicht erfasst. So weit, so gut.

2. Möglichkeit: $\omega_0 > \frac{\pi}{\Delta t}$

Hier wird die zu analysierende Schwingung $\sin \omega_0 t$ weniger als zweimal pro Periode abgetastet. Es gibt aber genau eine *negative* Zahl m derart, dass der Betrag $|\hat{\omega}_0| < \pi / \Delta t$ ist. ($\hat{\omega}_0$ kann positiv oder negativ sein.) Die *nicht existente*, „niederfrequente“ Schwingung $\sin \hat{\omega}_0 t = \pm \sin |\hat{\omega}_0| t$ hat an den Stützstellen $k \Delta t$ dieselben Funktionswerte wie die existierende höherfrequente Schwingung $\sin \omega_0 t$. Nach Vereinbarung ordnet man der Abtastung die kleinste Frequenz zu, die mit den abgetasteten Werten verträglich ist.

Dies hat eine fatale Konsequenz: Anstelle der existierenden Schwingung $\sin \omega_0 t$, die wegen $\omega_0 > \pi / \Delta t$ weniger als zweimal pro Periode abgetastet und daher nicht erfasst wird, gaukelt die Fourieranalyse eine Schwingung $\sin \hat{\omega}_0 t = \pm \sin |\hat{\omega}_0| t$ vor mit der „kleinen“ Frequenz $|\hat{\omega}_0| < \pi / \Delta t$ und mit derselben Amplitude. Allgemein lässt sich sagen: *Das gesamte Spek-*

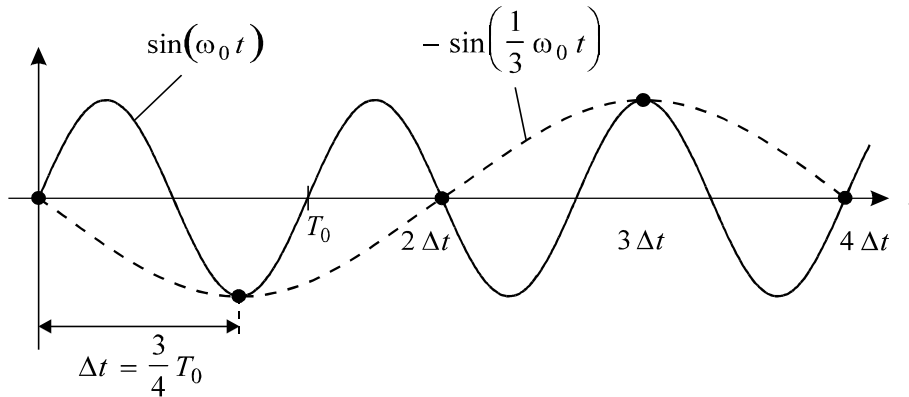


Abb. 2 Die Schwingung $\sin(\omega_0 t)$ wird weniger als zweimal pro Periode abgetastet. (Die Abtastungen werden durch die dicken Punkte markiert.) Die Abtastwerte sind für die zwei dargestellten Schwingungen

$$\sin(\omega_0 t)$$

$$\text{und} \quad \sin(\hat{\omega}_0 t) = \sin \left[\left(\omega_0 + 2m \frac{\pi}{\Delta t} \right) t \right] \underset{\Delta t = 3T_0/4}{=} \sin \left[\left(\omega_0 + 2m \frac{2}{3} \omega_0 \right) t \right] \underset{m=-1}{=} -\sin \left[\frac{1}{3} \omega_0 t \right]$$

gleich groß. Die Schwingungen $\sin \omega_0 t$ und $\sin(\hat{\omega}_0 t) = -\sin(\omega_0 t/3)$ können bei der Abtastung nicht unterschieden werden.

Nach Vereinbarung ordnet man der Abtastung die kleinste Frequenz zu, die mit den abgetasteten Werten verträglich ist. Der Betrag dieser kleinsten passenden Frequenz ist immer kleiner als $\pi / \Delta t$. In unserem Fall würde die DFT nicht die Frequenz ω_0 , sondern stattdessen die (in Wirklichkeit nicht existente) Frequenz $\omega_0/3$ liefern.

trum, das außerhalb von $\pi/\Delta t$ liegt, wird in den Bereich innerhalb von $\pi/\Delta t$ verschoben. Das „Aliasing“ genannte Phänomen wird in den Abb. 2 und 3a/b exemplarisch verdeutlicht.

Wir können nun eine zwingende und extrem wichtige Vorschrift für die Wahl von Δt geben:

Die Abtastperiode Δt ist *unbedingt* (!) so klein zu wählen, dass die höchste Frequenz mit nicht-vernachlässigbaren Fourierkoeffizienten kleiner als $\pi/\Delta t$ ist bzw. dass die Schwingung mit der höchsten Frequenz mehr als zweimal pro Periode abgetastet wird.

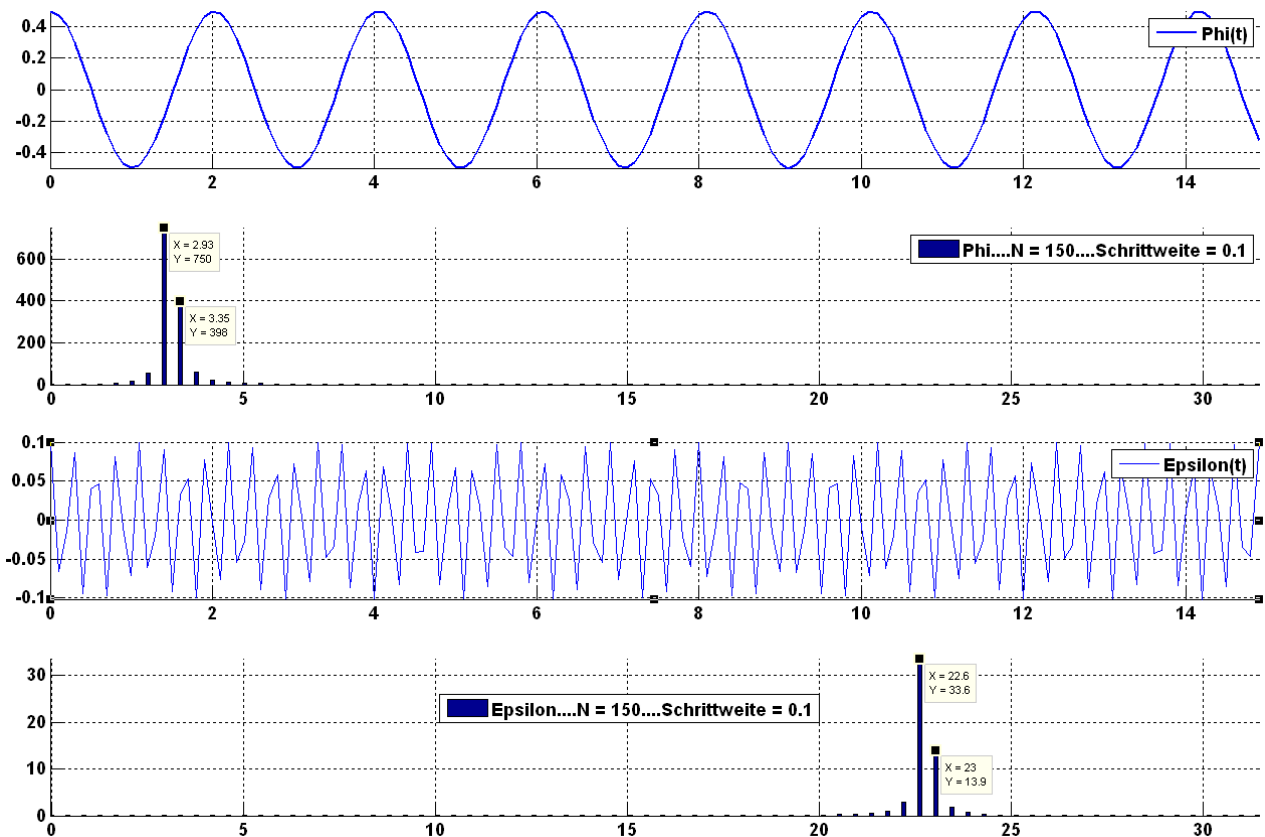


Abb. 3a Wir betrachten ein Federpendel mit den Anfangsbedingungen und Parametern

$$\varphi_0 = 0,5 \text{ rad} \quad \dot{\varphi}_0 = 0 \quad \epsilon_0 = 0,1 \text{ m} \quad \dot{\epsilon}_0 = 0 \quad D = 1600 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad m = 1 \text{ kg} \quad l = 1 \text{ m}$$

Die Frequenzen für Pendel- und Federschwingung können folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\omega_\varphi \approx \sqrt{g/l} \approx 3,13 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_\epsilon \approx \sqrt{D/m} = 40 \frac{1}{\text{s}}$$

In der obigen Abb. werden die Spektren des Winkels $\varphi(t)$ – im zweiten Fenster – und der Federdehnung $\epsilon(t)$ – im vierten Fenster – mit $N = 150$ Stützstellen und mit der Schrittweite $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ berechnet. Die größte Frequenz im Spektrum

$$\frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi}{0,1 \text{ s}} \approx 31,4 \text{ s}^{-1}$$

liegt unter der Frequenz $\omega_\epsilon \approx 40 \text{ s}^{-1}$ der Federdehnung, so dass im Spektrum von $\epsilon(t)$ Aliasing auftritt: Eine Frequenz von $22,6 \text{ s}^{-1}$ gibt es in der berechneten Schwingung nicht. (Siehe Fortsetzung in Abb. 3b.)

Die diskrete Fourieranalyse ist nicht deshalb so gefährlich, weil Schwingungen $\sin \omega_0 t$ mit Frequenzen $\omega_0 > \pi/\Delta t$ nicht erfasst werden können, sondern deshalb, weil diese hochfrequenten Schwingungen gleichstarke, aber niederfrequente Schwingungen $\sin \hat{\omega}_0 t$ mit $|\hat{\omega}_0| < \pi/\Delta t$ vorgaukeln und damit das Spektrum im gesamten messbaren Bereich $2\pi/T \leq \omega \leq \pi/\Delta t$ verfälschen.

In der Signalverarbeitung lässt sich Aliasing nur vermeiden,

- wenn die Bandbreite eines Signals bekannt ist und die Stützstellenweite Δt entsprechend gewählt wird. Die Abschätzung der Bandbreite erfordert physikalische oder technische Überlegungen, für die man keine festen Regeln angeben kann.
- oder wenn die hohen Frequenzen eines kontinuierlichen Signals *vor* der Diskretisierung durch ein Tiefpassfilter absorbiert werden.

Nach der Diskretisierung hat man keine Möglichkeiten mehr, Aliasing zu vermeiden.

Die in den Abb. 3a und 3b dargestellten Spektren eines Federpendels bestätigen die gemachten Aussagen.

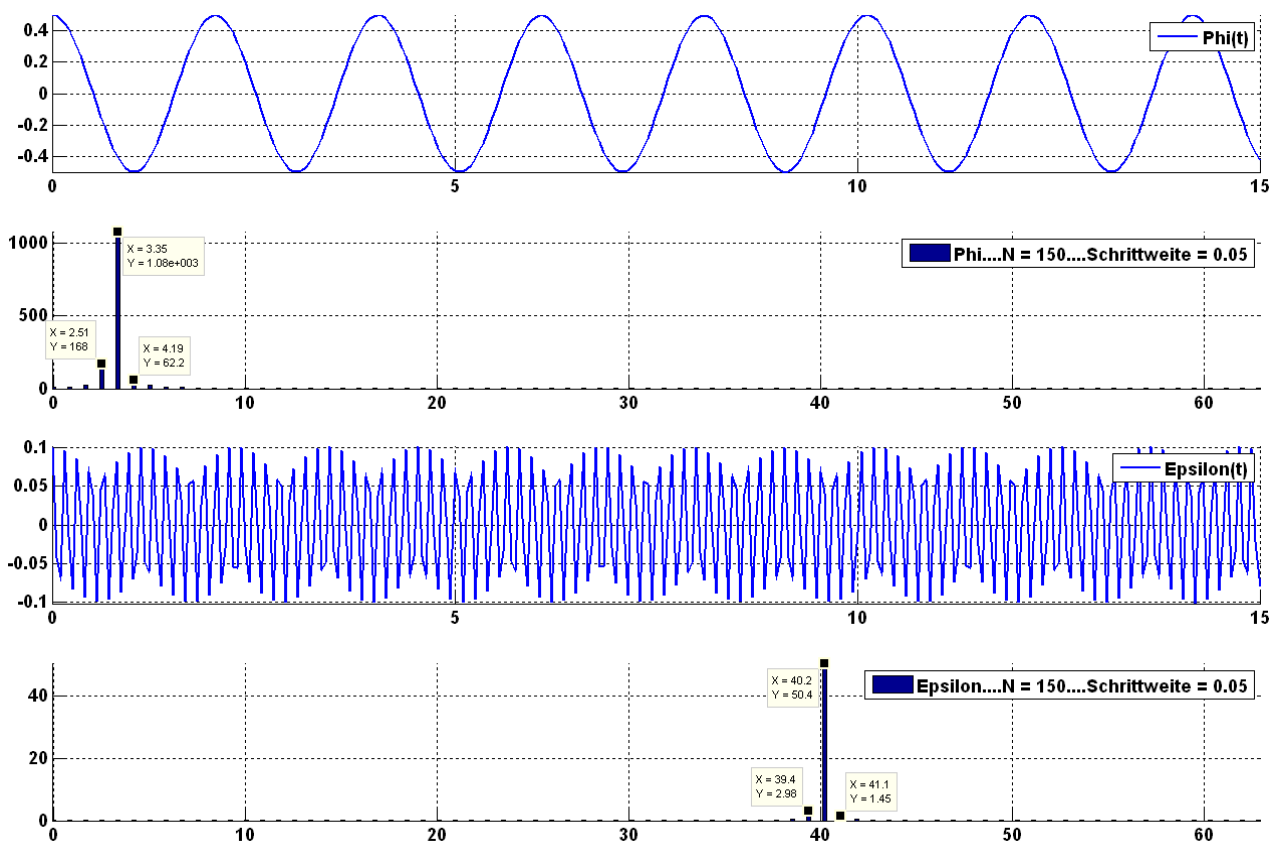


Abb. 3b Wir betrachten hier das gleiche Federpendel wie in Abb. 3a: Alle Anfangsbedingungen und Parameter sind identisch. Bei gleicher Zahl $N = 150$ der Stützstellen wurde nur die Schrittweite auf $\Delta t = 0,05$ s halbiert. Die größte Frequenz im Spektrum

$$\frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi}{0,05 \text{ s}} \approx 62,8 \text{ s}^{-1}$$

ist jetzt größer als die erwartete Frequenz $\omega_e \approx 40 \text{ s}^{-1}$ der Federdehnung, so dass im Spektrum von $\epsilon(t)$ kein Aliasing auftritt.