Aufgabe SVM_1:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
K(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= (\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle + 1)^2 \\
&= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1)^2 \\
&= x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 1 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \phi(\mathbf{x})\cdot\phi(\mathbf{y})\rangle &= \left\langle (1,\sqrt{2}x_1,\sqrt{2}x_2,x_1^2,x_2^2,\sqrt{2}x_1x_2)\cdot(1,\sqrt{2}y_1,\sqrt{2}y_2,y_1^2,y_2^2,\sqrt{2}y_1y_2)\right\rangle \\
&= 1+\sqrt{2}x_1\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}x_2\sqrt{2}y_2+x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\sqrt{2}x_1x_2\sqrt{2}y_1y_2 \\
&= 1+2x_1y_1+2x_2y_2+x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+2x_1y_1x_2y_2
\end{aligned}
$$

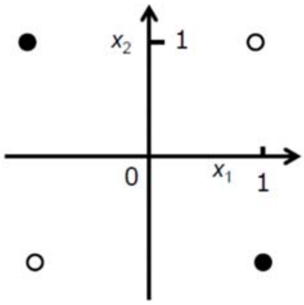
Damit ist gezeigt, dass $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle + 1)^2$.

Aufgabe SVM_2:

Für die XOR-Funktion gilt die folgende Zuordnung (links). In 2D sind die beiden Klassen nicht linear separabel, wie die Abbildung rechts zeigt.

Zuordnung

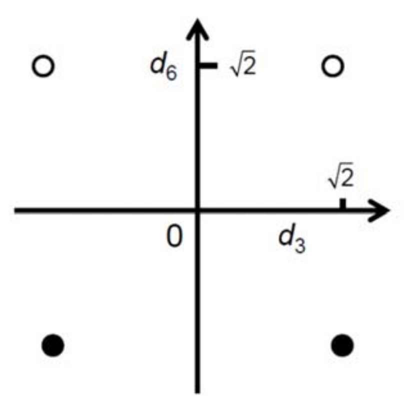
x_1	x_2	y
-1	-1	-1
-1	1	+1
1	-1	+1
1	1	-1



Mit $\phi(\mathbf{x}) = (1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)$ ergeben sich die folgenden Werte für die vier zu klassifizierenden Objekte **x** = (x_1, x_2) und die sechs Dimensionen d_1 bis d_6, die durch $\phi(\mathbf{x})$ definiert werden:

Klasse	x_1	x_2	d_1 1	d_2 $\sqrt{2}x_1$	d_3 $\sqrt{2}x_2$	d_4 x_1^2	d_5 x_2^2	d_6 $\sqrt{2}x_1x_2$
1	-1 1	-1 1	1 1	$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$	1 1	1 1	$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$
2	-1 1	1 -1	1 1	$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$	1 1	1 1	$-\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$

Ein Vergleich der Werte zeigt, dass es die Kombination der Dimensionen d_3 und d_6 erlaubt, die beiden Klassen zu trennen, wie die folgende Abbildung belegt:



Damit ist gezeigt, dass eine SVM unter Verwendung der genannten polynomialen Kernel-Funktion das XOR-Problem lösen kann.