

Warum ist Fahrradfahren so einfach?

GERT FRANKE | WILFRIED SUHR | FALK RIEß

Dieses Dokument ist eine Ergänzung zum Artikel „Gleichgewicht auf zwei Rädern“ von Wilfried Suhr und H. Joachim Schlichting in *Physik in unserer Zeit*, 38. Jahrgang 2007, Nr. 5, S. 238. Es enthält einen Artikel, der im Original in *PRO VELO* **1990**, 21, 5 erschien.

Physikalische Modelle der Fahrraddynamik

Warum ist Fahrradfahren so einfach?

Das Fahrrad als Objekt der Physik

Obwohl Fahrradfahren so einfach ist, daß ein entsprechend motiviertes Kind von vier oder fünf Jahren es in einem Nachmittag erlernen kann, haben sich immer wieder Physiker, Mathematiker und Ingenieure ernsthaft mit einer Theorie des Fahrrades (genauer: einer Theorie des Gleichgewichts und seiner Stabilität bei einem bewegten Masse-Fahrrad-System) beschäftigt. Die Faszination, die von diesem Problem ausgeht (und die auch uns zur Beschäftigung damit geführt hat), liegt zum einen in der Tatsache, daß das Fahrrad ein ungewöhnliches mechanisches System ist, das - während der Geradeausfahrt - einen stabilen Zustand bei einem Maximum an potentieller Energie einnimmt. Zum anderen interessiert (und interessiert noch immer) die Frage, ob die Aktionen des Fahrers (Lenkbewegungen, Gewichtsverlagerung) einen entscheidenden Einfluß auf die Stabilität der Fahrzustände ausüben. Oder provokativ gefragt: Kann ein Kartoffelsack radfahren? Um das herauszufinden, stellen wir unsere Untersuchungen unter die beiden Leitfragen: Welche Bahnen des Fahrrades sind überhaupt möglich? Und welche davon sind stabil?

Daß sich die theoretische Analyse als schwieriges Unterfangen herausstellt, liegt an zwei physikalischen Besonderheiten der Fahrradkonstruktion: Erstens hängen die geometrischen Parameter des Fahrrades (Radstand, Nachlauf, Steuerkopfwinkel) beim Verlassen der aufrechten Position in komplizierter Weise von Lenkeinschlag und Kippwinkel ab (der Nachlauf kann sogar sein Vorzeichen ändern), und zweitens handelt es sich um ein nichtholonomes System. Dies bedeutet folgendes: Das Fahrrad hat fünf Freiheitsgrade der Lage im Raum (zwei Koordinaten für die Berührungspunkte der Räder mit dem Boden, zwei Koordinaten für die Lage der Rahmenebene, eine Koordinate für die Verdrehung der Vorderradebene gegen die Rahmenebene). Daraus ergeben sich ∞^5 mögliche Lagen. In jede dieser Lagen kann das Rad durch eine Aufeinanderfolge von erlaubten Bewegungen übergeführt werden, aber es kann nicht in jede mögliche unendlich benachbarte Lage durch eine unendlich kleine Bewegung übergeführt werden. Diese Eigenschaft der Anholonomie kann anschaulich beim

"Rangieren" eines Fahrrades erlebt werden: Eine Position unmittelbar neben dem Rad kann nur durch Hin- und Herfahren oder durch Heben erreicht werden.

Im folgenden soll von zwei Versuchen berichtet werden, diese Schwierigkeit zu überwinden. Zunächst kann man das Problem linearisieren, indem man nur kleine Winkel betrachtet; dann können vergleichsweise einfache mathematische Methoden zur Lösung benutzt werden. Dieses Verfahren ist im Prinzip bekannt und schon öfter angewendet worden [1,3]; wir haben einige Fehler korrigiert und versucht, eine möglichst klare physikalische Beschreibung der auftretenden Kräfte und Momente zu liefern. Falls jedoch diese Einschränkung der kleinen Winkel nicht gemacht werden soll (also auch Kurvenfahrten zutreffend beschrieben werden sollen), kann das Problem nicht streng gelöst werden, sondern es müssen numerische Näherungsverfahren verwendet werden, die die Benutzung einer Rechenanlage erfordern. Hier werden wir nur die Ergebnisse diskutieren und nicht näher auf die Struktur der Bewegungsgleichungen und das verwendete Lösungsverfahren eingehen.

Leider muß in beiden Fällen ein idealisiertes Fahrrad zugrunde gelegt werden, damit die physikalischen Überlegungen sich auf die wichtigsten Parameter beschränken können. Die Einzelteile des Fahrrades (und auch der Fahrer) werden als starre Körper betrachtet; es wird rein rollende Reibung zwischen Rädern und Untergrund vorausgesetzt (kein Durchrutschen); die Räder selbst sollen unendlich dünn, und der Boden soll vollkommen eben sein; Energieverluste durch Luftwiderstand oder durch plastische Verformung von Reifen und Boden werden ausgeschlossen. Das Lenkmoment wird immer gleich null gesetzt, d.h. wir betrachten den Fall des Freihändigfahrens.

Kräfte am Fahrrad

Um etwas anschauliche Einsicht in die Fahrradphysik zu bekommen, wollen wir zunächst die Kräfte bzw. Drehmomente diskutieren, die auf das Fahrrad wirken und ihr Zusammenwirken quantitativ un-

tersuchen. Dazu betrachten wir ein "ideales Fahrrad", das stationär auf einer Kreisbahn fährt; der Lenkereinschlagwinkel ϕ (positiv bei Linkseinschlag) und der Kippwinkel κ des Fahrradrahmens (positiv bei Kippen nach rechts) sollen also konstant sein. Zur Vereinfachung nehmen wir außerdem an, daß diese Winkel so klein sind, daß lineare Näherungen ($\sin \phi \approx \phi$ im Bogenmaß (Radian), $\cos \phi \approx 1$) erlaubt und quadratische Terme (proportional zu $\phi^2, \kappa^2, \phi\kappa$) vernachlässigbar sind. Das Fahrrad soll also fast geradeaus fahren, der Kreisbahnradius sehr groß sein.

Durch diese Einschränkung vereinfacht sich eines der schwierigsten Probleme der Fahrradphysik – die Fahrrad-Geometrie – entscheidend, denn die "klassischen" Fahrradbau-Parameter Radstand, Nachlauf und Steuerkopfwinkel (L, N, β) sind in linearer Näherung konstant. Das erlaubt es, die Fahrrad-geometrie auf ein Ersatz-Modell zu reduzieren (siehe Abbildung 1, Idee nach Papadopoulos [3]), bei dem die Räder auf Punkte zusammengeschrumpft sind, an denen das Fahrrad den Bodenkontakt hält. Weitere wichtige Größen dieses Modells sind die Lage des Gesamtschwerpunkts (Höhe h und Abstand S vom Hinterrad), die Gesamtmasse m von Fahrrad, Fahrer und Gepäck sowie Radius r der Räder und deren Trägheitsmoment Θ (für Rotation um die Nabe).

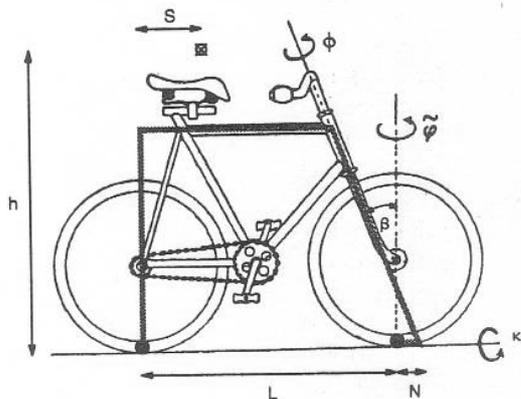


Abbildung 1: Ersatzmodell für die Fahrradgeometrie (graue Balken). Die schwarzen Kreise markieren die Radaufstandspunkte, der durchkreuzte Kreis den Schwerpunkt. (Zeichnung nach Sommerfeld [1]).

Projiziert man diese Konstruktion (mit eingeschlagenem Lenker, aber aufrechtem Rahmen) auf den Boden (Abb. 2), kann man den Zusammenhang zwischen Lenkwinkel ϕ und Bahnradius R ablesen. Der Winkel zwischen den Rollrichtungen der beiden Räder ist die Bodenprojektion des Lenkwinkels $\tilde{\varphi} = \phi \cos \beta$. Da sich die Räder auf Kreisbahnen be-

wegen, sind ihre Rollrichtungen senkrecht zum jeweiligen "Fahrstrahl"; daher ist $\tilde{\varphi}$ auch der Winkel, unter dem sich diese Fahrstrahlen im Bahnmittelpunkt schneiden. In dem rechtwinkligen Dreieck in Abbildung 2 ist also $L \approx R \tan \tilde{\varphi} \approx R \tilde{\varphi}$ und damit

$$R = \frac{L}{\phi \cos \beta} \quad (1)$$

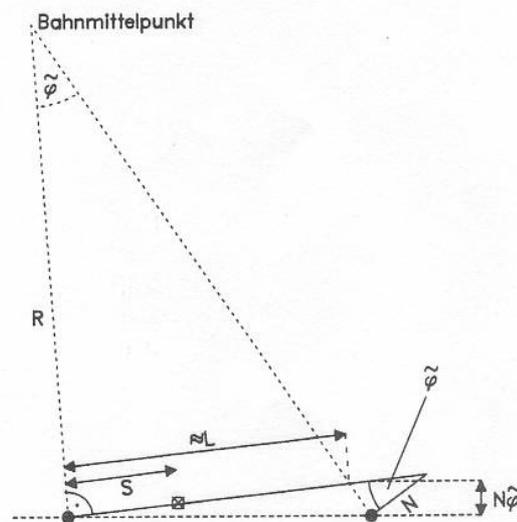


Abbildung 2: Bodenprojektion des Modells bei eingeschlagenem Lenker aber aufrechtem Rahmen. Aus Gründen der deutlichen Darstellung ist in der Zeichnung der Winkel $\tilde{\varphi}$ relativ groß gewählt, so daß die lineare Näherung recht ungenau ist.

Die Kräfte wollen wir in einem Koordinatensystem diskutieren, das mit dem Fahrrad mitbewegt wird. Dabei müssen drei verschiedene Klassen unterschieden werden:

- Statische Kräfte, die durch die Schwerkraft und die zu deren Ausgleich auftretenden Bodenkraften auf die Räder hervorgerufen werden.
- Dynamische Kräfte, die durch die Zentrifugal- bzw. Zentripetalkraft hervorgerufen werden, die auf der Kreisbahn auftreten. Sie sind im Gegensatz zu den statischen Kräften abhängig von der Fahrgeschwindigkeit.
- Gyroskopische Kräfte, die auf der Kreiselwirkung der Räder beruhen und ebenfalls geschwindigkeitsabhängig sind.

Statische Momente

Da Produkte von ϕ und κ im Rahmen der linearen Näherung vernachlässigt werden sollen, müssen bei der Bestimmung der Kräfte Auslenkungen in beiden Freiheitsgraden nicht gleichzeitig berücksichtigt werden. Das heißt, daß immer einer der Winkel gleich 0 gesetzt werden kann, während der andere einen geringen Wert bekommt. So erhält man ϕ - und κ -abhängige Terme, die dann addiert werden.

Ist das Fahrrad um den Winkel κ (nach rechts) geneigt, dann wirkt die Schwerkraft mg nicht mehr genau in der Ebene des Rahmens. Die zur Rahmenebene senkrechte Komponente ist $F_{\text{seit}} = mg\kappa$. Diese Seitenkraft wirkt am Schwerpunkt und erzeugt daher ein Kippmoment (Drehmoment, das das Fahrrad nach rechts zu kippen versucht)

$$K_{S1} = hF_{\text{seit}} = mgh\kappa \quad (2)$$

Die Seitenkraft muß durch eine entsprechende Gegenkraft auf die Räder aufgefangen werden, von der nach den Hebelgesetzen der Anteil $F_{\text{seit}}^v = F_{\text{seit}} \frac{S}{L}$ auf das Vorderrad entfällt. Diese Kraft greift am Nachlauf als Hebel an und verursacht ein Drehmoment NF_{seit}^v , dessen die Komponente $NF_{\text{seit}}^v \cos\beta$ in Richtung der Lenkachse wirkt. Da die Gegenkraft nach links wirkt und den Lenker nach rechts drehen will, ist das Vorzeichen negativ:

$$M_{S1} = -mg \frac{NS}{L} \kappa \cos\beta \quad (3)$$

Ist das Fahrrad dagegen nicht geneigt, aber der Lenker um ϕ eingeschlagen, dann ist der Schwerpunkt gegenüber der Verbindungslinie der beiden Radaufstandspunkte (die Achse der Kippbewegung) um den Betrag $N\phi \frac{S}{L}$ verschoben (Abb. 2). Dazu addieren wir noch die Verschiebung des Schwerpunkts w aus der Fahradebene heraus, die durch seitliche Körperneigung des Fahrers (nach rechts) verursacht wird. Die Gewichtskraft erzeugt daher ein Kippmoment von

$$K_{S2} = -mg \left(\phi \frac{NS}{L} \cos\beta - w \right) \quad (4)$$

Die Aufstandskraft am Vorderrad $F^v = mg \frac{S}{L}$ erzeugt an dem seitlichen Hebel $N\phi$ ein Drehmoment in Rollrichtung. Da die Lenkachse nicht senkrecht auf dieser Richtung steht, wirkt eine Komponente $\sim \sin\beta$ davon auf die Lenkung:

$$M_{S2} = mg\phi \frac{NS}{L} \cos\beta \sin\beta \quad (5)$$

Dynamische Momente

Die Zentrifugalkraft auf das Fahrrad in der Kreisbahn beträgt $F_Z = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{L} \phi \cos\beta$, ist also nicht von κ abhängig und bewirkt deshalb nur jeweils einen Beitrag zu Kipp- und Lenkmoment. Da die Kraft am Schwerpunkt angreift, ist der Kipp-Beitrag

$$K_D = hF_Z = mv^2 \phi \frac{h}{L} \cos\beta \quad (6)$$

Auf die Lenkung wirkt die Zentripetalkraft, die vom Boden auf die Räder ausgeübt wird und die Zentrifugalkraft kompensiert. Wieder entfällt wegen der Hebelgesetze der Anteil $\frac{S}{L}F_Z$ auf das Vorderrad und bewirkt am Hebel N ein Drehmoment, von dem ein Anteil $\sim \cos\beta$ auf die Lenkung übertragen wird. Bei positivem ϕ wirkt die Zentripetalkraft nach links und erzeugt damit ein negatives Moment:

$$M_D = -mv^2 \phi \frac{NS}{L^2} \cos^2\beta \quad (7)$$

Gyroskopische Momente

Ein gyroskopisches Moment ist die spürbare Tendenz eines rotierenden Körpers, einer erzwungenen Richtungsänderung seiner Rotationsachse auszuweichen: $\vec{M} = -\dot{\vec{J}} = -\Theta\dot{\vec{\omega}}$, wobei \vec{J} der Drehimpuls des Körpers, Θ sein Trägheitsmoment ist und $\vec{\omega}$ den Betrag der Winkelgeschwindigkeit und die Richtung der Rotationsachse hat. Beim Fahrrad ist die Rotationsgeschwindigkeit der Räder $\omega = \frac{v}{r}$ (r ist der Rad-Radius), ihr Drehimpuls daher $J = \Theta \frac{v}{r}$ in Richtung der Rad-Nabe. Aufgrund der Kreisfahrt ändern diese Drehimpulse ständig ihre Richtung: $\dot{J} = J\Omega$, wobei $\Omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{L} \phi \cos\beta$ die Winkelgeschwindigkeit der Kreisfahrt ist und $\dot{\vec{J}}$ entgegen der Rollrichtung zeigt. Das resultierende gyroskopische Moment zeigt also in Rollrichtung und wirkt damit unmittelbar als Kippmoment:

$$K_G = 2\Theta\phi \frac{v^2}{rL} \cos\beta \quad (8)$$

Der Faktor 2 beruht auf der Annahme zweier gleicher Räder. Sind die Räder verschieden groß, muß $2\frac{\Theta}{r}$ durch $\frac{\Theta_v}{r_v} + \frac{\Theta_h}{r_h}$ ersetzt werden. Auf die Lenkung wirkt die Komponente des Vorderradmoments, die in Richtung der Lenkachse zeigt:

$$M_G = -\Theta\phi \frac{v^2}{rL} \cos\beta \sin\beta \quad (9)$$

Gleichgewichts-Zustände

Abgesehen vom Lenkmoment, das der Fahrer beim Steuern ausübt (und das bei freihändigem Fahren gleich 0 ist), sind mit den Gleichungen (2) bis (9) alle wesentlichen Kipp- und Lenkmomente erfaßt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht berücksichtigt sind alle Momente, die darauf beruhen, daß der Schwerpunkt des Vorderradsystems (Rad, Gabel und Lenker) nicht auf der Lenkachse liegt und Schwer- und Zentrifugalkraft hier direkt auf die Lenkung wirken können. Beim "Normalrad" sind diese Terme gering; bei schwerbepacktem Vorderrad oder ohne Fahrer können sie aber wichtig werden.

Damit die Kreisbahn, von der wir ausgegangen sind, auch wirklich stationär ist, muß die Summe aller Kipp- und Lenkmomente jeweils 0 ergeben. Zunächst leiten wir aus der Kippmomentenbilanz $K_{S1} + K_{S2} + K_D + K_G = 0$ einen Zusammenhang zwischen ϕ und κ im Gleichgewicht ab:

$$\kappa = -\phi \frac{\cos \beta}{hL} \left(\frac{hv^2}{g} + 2 \frac{\Theta}{rm} \frac{v^2}{g} - NS \right) - \frac{w}{h} \quad (10)$$

Die Winkel sind also proportional bis auf einen zusätzlichen Kippwinkel zum Ausgleich der asymmetrischen Schwerpunktlage. Wie zu erwarten, muß bei konstantem Lenkwinkel ϕ das Fahrrad mit wachsender Geschwindigkeit immer stärker gekippt werden, um die zunehmende Fliehkraft und das gyroskopische Kippmoment zu kompensieren. Dabei ist die Wirkung des dynamischen Kippmoments (erster Term der Klammer) mit Abstand der wichtigste Effekt.

Um nun auch die Lenkmomenten-Bilanz aufstellen und daraus die notwendige Gleichgewichts-Korrektur w zu berechnen, wird der einzige Beitrag zum Lenkmoment, der von κ abhängt, (M_{S1}) mit Hilfe dieses Zusammenhangs als Funktion des Lenkwinkels ϕ ausgedrückt. Betrachten wir zunächst nur den Hauptterm von Gl. (10), so ergibt dieser beim Einsetzen in Gl. (3)

$$M_{S1} = mv^2 \phi \frac{NS}{L^2} \cos^2 \beta + \dots \quad (11)$$

einen Ausdruck, der das dynamische Lenkmoment M_D gerade kompensiert. Im Kipp-Gleichgewicht heben sich die beiden größten Lenkmomente also gerade gegenseitig auf! Das ist anschaulich so zu verstehen, daß sich im Kipp-Gleichgewicht Schwer- und Zentrifugalkraft so addieren, daß die resultierende Kraft wieder in der Ebene des Fahrradrahmens liegt und folglich keine seitliche Kraft auf die Lenkung wirken kann. Die übriggebliebenen Terme beruhen auf gyroskopischen Effekten sowie darauf, daß bei eingeschlagenem Lenker der Aufstandspunkt des Vorderades etwas außerhalb der Rahmenebene liegt.

Durch die Kompensation der größten Beiträge wird verständlich, warum die Theorie von Jones (und die darauf aufbauenden) [2], die ausschließlich die statischen Terme (in nichtlinearer Rechnung) untersuchten, das Lenkverhalten von Fahrrädern nicht realistisch beschreiben können. Klar wird auch, warum entgegen einer ersten Abschätzung der Größenordnungen gyroskopische Beiträge doch eine entscheidenden Rolle spielen können.

Stellt man nun mit den übriggebliebenen Termen die Lenkmomentenbilanz für freihändiges Fahren $M_{S1} + M_{S2} + M_D + M_G = 0$ auf und löst sie nach der Schwerpunktsverschiebung w auf, so ergibt sich

$$\frac{w}{h} = -\phi \cos \beta \left(\tan \beta - \mu - \frac{\Theta}{mNS} \frac{v^2}{gr} (\tan \beta - 2\mu) \right) \quad (12)$$

mit der Abkürzung $\mu = \frac{NS}{hL}$. Beim Vergleich der Größenordnung der einzelnen Terme für das "Normalfahrrad" ($L \approx h \approx 1$ m, $N \approx 5$ cm, $S \approx 30$ cm, $\Theta \approx 0,15$ kg m², $\beta \approx 20^\circ$) stellt sich heraus, daß μ gegenüber $\tan \beta$ vernachlässigt werden kann. (Die verbleibenden Terme gehen auf das statische Moment M_{S2} und das gyroskopische Lenkmoment M_G zurück.) Die Größenordnung der berechneten Schwerpunktsverschiebung liegt demnach im üblichen Geschwindigkeitsbereich unter etwa 0,5 cm pro Grad Lenkeinschlag und kann durch Bewegungen des Oberkörpers des Fahrers in realistischen Größenordnungen erreicht werden.

Bei hohen Geschwindigkeiten wird der Proportionalitätsfaktor allerdings schnell größer, so daß nur noch ein kleiner Winkelbereich erreicht werden kann. Da die beiden Hauptterme unterschiedliche Vorzeichen haben und nur der zweite geschwindigkeitsabhängig ist, gibt es eine bestimmte Geschwindigkeit v_{\pm} , bei der das Vorzeichen der Verschiebung wechselt. Im Bereich dieser Geschwindigkeit sollte die Steuerung durch Gewichtsverlagerung besonders wirkungsvoll sein, weil hier kleine Verschiebungen große Änderungen des Winkels bewirken. Für das "Normalfahrrad" ergibt sich

$$v_{\pm} \approx \sqrt{gr \frac{mNS}{\Theta}} \approx 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (13)$$

Auf die Bedeutung dieser charakteristischen Geschwindigkeit werden wir später noch genauer eingehen.

Nichtlineare Erweiterung

Nur wenig Übung ist erforderlich, um bei angemessener Fahrgeschwindigkeit freihändig eine Kurve zu

durchfahren. Dabei sind Lenk- und Kippwinkel sowie die Position des Fahrers zwar nicht völlig konstant, aber die Tatsache, daß Abweichungen vom Gleichgewicht in beiden Richtungen durch Fahrerbewegungen kompensiert werden können, zeigt, daß derartige Bewegungsabläufe im näheren Umfeld stationärer Gleichgewichtszustände stattfinden. Abgesehen von der idealen Geradeausfahrt ist stationäre Radfahrt nur auf exakten Kreisbahnen denkbar. Eine annähernde Realisierung solcher Bahnen bleibt aber wohl eher versierten Radturnern vorbehalten. Die Parameter, für die stationäres Gleichgewicht eintritt, sind für den untersuchten Fahrradtyp charakteristisch, denn bereits kleine Änderungen an der Radgeometrie oder der Massenverteilung können ihre Größe stark beeinflussen. Zur Berechnung dieser Gleichgewichtsparameter haben wir das im vorigen Kapitel erörterte Fahrradmodell herangezogen, dessen Gültigkeitsbereich sich aufgrund der vorgenommenen Linearisierungen auf kleine Kipp- und Lenkwinkel beschränkt. Dieser Gültigkeitsbereich kann auf alle erdenklichen Fahrradlagen erweitert werden, wenn alle Nichtlinearitäten in das Modell einbezogen werden. Ein Beispiel dafür ist die (hörbar) erhöhte Geschwindigkeit beim Durchfahren einer Kurve in Schräglage. Eine Erweiterung des bisherigen Modellansatzes zur Beschreibung nichtlinearen Verhaltens würde sehr umständlich und unübersichtlich werden. Aus diesem Grund haben wir, ausgehend von einer exakten Lösung für die Fahrradgeometrie, mittels eines formal gehaltenen physikalischen Ansatzes nichtlineare Bewegungsgleichungen der Dynamik des Fahrrades aufgestellt, die diese volle Nichtlinearität beinhalten und auch auf exotische Rahmenkonstruktionen anwendbar sind (siehe [4]). Stationäre Bahnen stellen in diesem Modell einen Sonderfall der simulierten Bewegungen des Fahrrades dar, wenn alle Reibungsterme entfallen, die Energie also erhalten bleibt.

In Abb. 3 sind zum Vergleich der Leistungsfähigkeit beider Modelle die damit errechneten Parameter für stationäre Gleichgewichtszustände nebeneinander gestellt, wobei beide Rechnungen auf den Grunddaten desselben Fahrrades (Hollandrad: Radstand 110 cm, Nachlauf 6.9 cm, Steuerkopfwinkel 21°) beruhen. Jeweils vier Parameter können einem Diagrammpaar zur Angabe eines stationären Zustandes entnommen werden, der im folgenden als Fixpunkt bezeichnet wird: der Lenkwinkel ϕ , der Kippwinkel κ , die auf den Abrollpunkt des Hinterrades bezogene Fahrergeschwindigkeit v , und die Verschiebung w des Fahrerschwerpunkts senkrecht zur Hinterradebene. ($w > 0$ entspricht einer Verlagerung der Fahrer Masse (hier 70 kg) nach rechts). Für $\kappa = 0$ wird $\phi = 0$, was einer

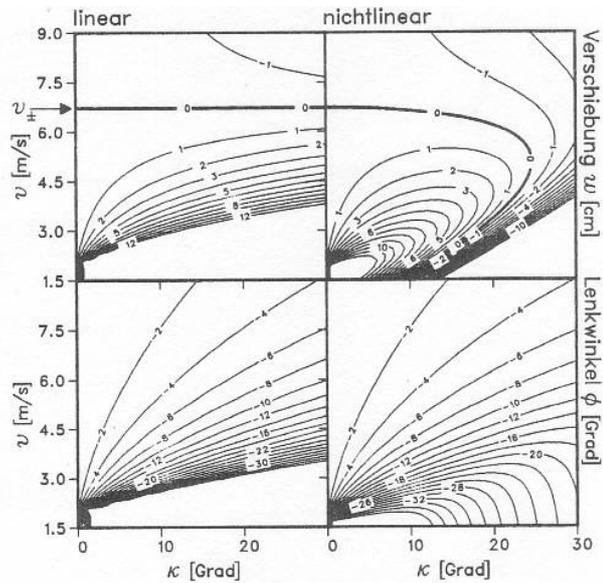


Abbildung 3: Lenkwinkel und Schwerpunktsverschiebung auf stationären Bahnen.

aufrechten Geradeausfahrt gleichkommt. Ist $\kappa > 0$, so werden Kreisbahnen im Sinne einer Rechtskurve durchfahren. (Für $\kappa < 0$ ergäbe sich ein spiegelsymmetrisches Diagramm für Linkskurven). Beide Methoden liefern im Bereich kleiner Winkel κ gut übereinstimmende Fixpunkte. Solange $v < v_{\pm}$ ist, ist die Verschiebung der Fahrer Masse zum Mittelpunkt des Fahrkreises gerichtet. Dies kehrt sich für $v > v_{\pm}$ um. (Erste Experimente mit realen Fahrrädern deuten auf die Richtigkeit dieser Prognose hin). Deutlich erkennbar ist die große Empfindlichkeit der Fixpunktparameter auf kleinste Verschiebungen der Fahrer Masse im Bereich der symmetrischen Position ($w = 0$). Kleine Korrekturbewegungen des Fahrers werden sich dabei um so stärker auswirken, je weniger das Rad geneigt ist. Die Grenzen des linearen Modells können besonders mit der Anzahl auffindbarer Fixpunkte für gegebene Fahrergeschwindigkeiten verdeutlicht werden. Für $v > v_{\pm}$ ist in beiden Modellen nur jeweils ein Fixpunkt zu einem Wert von w auffindbar. Sobald aber eine Geschwindigkeitskoordinate für $v < v_{\pm}$ gewählt wird, liefert das nichtlineare Modell zwei weitere Fixpunkte (wovon einer im Bereich von $\kappa < 0$ liegt).

Aus der Angabe eines Fixpunktes läßt sich noch nicht ersehen, ob der dort vorliegende Zustand gegenüber kleinen Störungen stabil bleibt oder wie ein Kartenhaus zusammenbricht. Derartige Schlüsse können nicht mehr aus einem stationären Modell gefolgert werden, sondern erfordern ein Modell zur Beschrei-

bung des Zeitverhaltens des Systems. Als Basis für die folgenden Stabilitätsbetrachtungen diene daher das oben erwähnte nichtlineare dynamische Modell.

Stabilität ohne Steuerung

Stabilitätsaussagen über das Fahrrad sind bereits zur Zeit der Jahrhundertwende u.a. von Whipple und Sommerfeld [1] getroffen worden. Diese frühen Modelle beruhen allerdings auf geometrischen Näherungen, wodurch sich ihre Aussagekraft weitgehend auf die Geradeausfahrt beschränkt. Teilergebnis der damaligen Untersuchungen war die Angabe einer unteren und oberen Grenzhgeschwindigkeit, für die eigenstabiles Radfahren möglich ist, vorausgesetzt, der Fahrer übt keinerlei Einflüsse aus.

Gegenstand unserer Stabilitätsanalyse sind stationäre Kreisfahrten des Fahrrads. Zur Beschreibung dieses Fahrzustandes sind gemäß dem vorigen Abschnitt die vier Parameter ϕ, κ, w, v erforderlich. Aus diesen Angaben kann die Gesamtenergie des Systems errechnet werden. Fordert man umgekehrt die Einhaltung einer bestimmten Gesamtenergie, so ist dies ein zusätzlicher Fixpunktparameter. Einer der vier obigen Parameter kann daher entfallen. Die Wahl fällt auf v , da durch die verbleibenden Parameter die geometrische Lage des Fahrrades beschrieben wird. Wenn außerdem die Verschiebung w konstant bleiben soll, reduziert sich die Parameterzahl auf zwei. Störungen der stationären Fahrt (z.B. durch Bodenebenheiten verursacht) treten daher nur als Abweichungen der Größen ϕ und κ von ihrem Fixpunktwert auf. Durch den Störeinfluß gerät das System in Bewegung, so daß zu einer vollständigen Zustandsbeschreibung zusätzlich die Abweichungen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}$ und $\dot{\kappa}$ von ihrem Fixpunktwert Null angegeben werden müssen. Wenn die aufgetretenen Abweichungen $\Delta\phi, \Delta\kappa, \Delta\dot{\phi}, \Delta\dot{\kappa}$ durch entsprechende Dämpfung wieder verschwinden, so verhält sich das System eigenstabil. Daher ist für die Stabilitätsaussage die Frage nach dem Zeitverhalten der Abweichungen von zentraler Bedeutung. Das Zeitverhalten in unmittelbarer Nähe des Fixpunktes kann durch ein System linearer Bewegungsgleichungen repräsentiert werden, welches durch Linearisierung der Modellgleichungen am Fixpunkt geliefert wird. Typische Lösungen solcher Gleichungen sind Exponentialfunktionen Ae^{-Dt} . D hat dabei die Bedeutung einer Dämpfungskonstante, da die Störung exponentiell zum Wert Null strebt, wenn $D > 0$ ist. Umgekehrt wächst bei negativem Vorzeichen von D die Störung exponentiell an. Entsprechend der vier gestörten Größen $\Delta\phi, \Delta\kappa, \Delta\dot{\phi}, \Delta\dot{\kappa}$

treten in diesem Fall allerdings vier verschiedene Dämpfungskonstanten auf. Für $\Delta\phi$ ergibt sich z.B.

$$\Delta\phi(t) = Ae^{-D_1t} + Be^{-D_2t} + Ce^{-D_3t} + De^{-D_4t} \quad (14)$$

Stabilität ist daher nur möglich, wenn alle Summanden in der Gleichung gegen Null streben. Dafür müssen alle Dämpfungskonstanten positiv sein. Sobald für nur einen Summanden $D < 0$ ist, wächst die Abweichung exponentiell an und der Systemzustand entfernt sich zunehmend vom Fixpunkt.

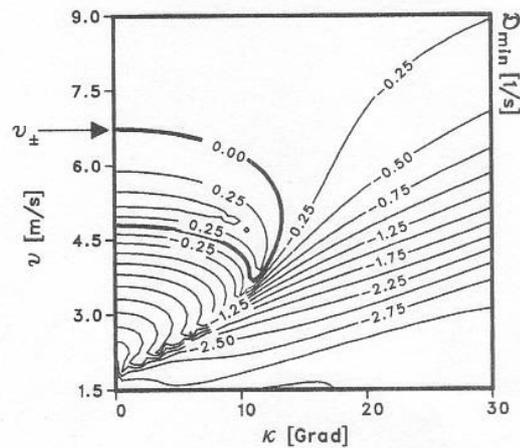


Abbildung 4: Kleinste Dämpfungskonstante D_{min} .

Zur Angabe der Stabilität der in Abb.3 enthaltenen Fixpunkte ist es deshalb ausreichend nur den kleinsten Dämpfungsfaktor D_{min} darzustellen, wie dies in Abb. 4 geschehen ist. Hier wird durch eine dick gezeichnete Linie eine Zone eingrahmt, für die $D_{min} > 0$ ist. Innerhalb dieser Umrandung sind die Fixpunkte eigenstabil, das heißt, freihändige stationäre Kreisfahrt ließe sich trotz gelegentlicher kleiner Störungen ohne regelnden Eingriff des Fahrers aufrechterhalten. Außerhalb der Stabilitätszone ist dagegen eine Regelung (durch Verlagern des Fahrerswerpunkts) zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes erforderlich. Die Regeleinriffe müssen je nach Lage der Fixpunkte unterschiedlich schnell erfolgen. Je kleiner D_{min} ist, um so schneller entfernt sich der Systemzustand von dem des Fixpunktes und um so kürzer muß die Reaktionszeit sein. Aus Abb. 4 folgt daher, daß das Gleichgewicht im Bereich hoher Geschwindigkeiten oberhalb der Stabilitätszone viel leichter zu halten ist, als bei niedrigen Geschwindigkeiten unterhalb der Zone.

Die in Gl. (13) hergeleitete charakteristische Geschwindigkeit v_{\pm} tritt bei kleinem κ und dem Vorzeichenwechsel von w (also bei $w = 0$) auf (siehe Abb. 3 oben). Aus mathematischen Gründen stimmt

sie mit der oberen Grenzggeschwindigkeit für die Eigenstabilität des Fahrrades überein. Diese Grenzggeschwindigkeit ist bedeutungsgleich mit der oberen Grenzggeschwindigkeit aus den klassischen Modellen der oben erwähnten linearen dynamischen Theorie [1], die außerdem ein unteres Limit für Stabilität liefern. Ein Modell nichtlinearer Dynamik des Fahrrades erweitert Stabilitätsaussagen um den Parameter des Kippwinkels und läßt asymmetrische Massenverteilungen zu.

Die Zone eigenstabiler Fahrzustände in Abb. 3 muß es zwar nicht bei jedem Fahrrad geben, allgemein läßt sich aber sagen: Wenn es einen solchen Bereich gibt, dann ist v_{\pm} seine obere Grenzggeschwindigkeit mit $\mathcal{D}_{\min} = 0$. Auch dies ist wieder ein Hinweis darauf, daß sich ein Fahrrad im Bereich der Geschwindigkeit v_{\pm} besonders leicht steuern läßt.

Wer sich bis hierher durchgearbeitet hat, wird festgestellt haben, daß sich mit physikalischen Methoden im wesentlichen nur physikalische Probleme lösen lassen, und nicht solche des "wirklichen Lebens". Daß die gewonnenen Ergebnisse nicht absurd sind, zeigen Konsistenzprüfungen und die Übereinstimmung mit der Alltagserfahrung in einigen Punkten. Aber selbst wenn eine aufwendige experimentelle Überprüfung das Modell verifizieren würde, wäre der konkrete Nutzen für den Radler oder den Fahrradbauer noch nicht erwiesen. Bislang fehlen wichtige Parameter des realen Fahrrads im Modell, so z.B. das Eigenschwingungsverhalten des Rahmens und der Reifenschlupf. Immerhin können Voraussagen über das zu erwartende Fahrverhalten von exotischen Rahmengeometrien gemacht werden, wobei allerdings eine geübte und geschickte Fahrerin die Grenzen des Fahrbaren weit hinaus schieben kann. Und auch dieses "Geschick" kann ansatzweise quantifiziert werden: nämlich als die aus den Dämpfungsfaktoren ableitbaren Zeitkonstanten, d.h. die Reaktionszeiten, innerhalb derer auf Instabilitäten geantwortet werden muß, können angegeben werden. Die Grenzen der Leistungsfähigkeit physikalischer Erkenntnismethoden sind zwar noch nicht erreicht, aber absehbar. Die subjektive Beurteilung des Fahrverhaltens von Fahrrädern kann durch sie jedenfalls nicht ersetzt werden.

Gert Franke, Wilfried Suhr und Falk Rieß,
Fachbereich Physik, Universität Oldenburg

Literatur

- [1] F.J.W. Whipple:
The stability of the motion of a bicycle
The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **30**, S. 312 (1899).
F. Klein, A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels, Band IV, Leipzig 1910
- [2] D.E.H. Jones: The stability of the bicycle
Physics today **23** No. 3, S. 34 (1970)
Y. Le Hénaff: Dynamical stability of the bicycle
European Journal of Physics **8**, S. 207 (1987)
- [3] J. Papadopoulos:
Bicycle dynamics, the meaning behind the math
Bike Tech 6/1988, S. 13
- [4] G. Franke, W. Suhr, F. Rieß:
An advanced model of bicycle dynamics
European Journal of Physics, im Druck

Anhang

Die vollständigen Formeln mit allen bisher vernachlässigten Beiträgen lauten:

$$\frac{w}{h} = -\phi \cos \beta \left\{ \tan \beta - \mu \frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon} - \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon} \frac{N \cos \beta}{L} - \frac{v^2}{gS} \frac{\Theta}{mrN} \left(\frac{\tan \beta}{1+\epsilon} - 2\mu \right) \right\}$$

$$\kappa = -\phi \cos \beta \left\{ \frac{v^2}{gS} \left(\frac{S}{L} + \frac{\Theta \tan \beta}{mrN(1+\epsilon)} \right) - \tan \beta + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \left(\epsilon \frac{N \cos \beta}{L} - \mu \right) - \epsilon \mu \cos \beta \right\}$$

$$v_{\pm} = \sqrt{gS \frac{mrN}{\Theta}} \sqrt{1 + \frac{\epsilon \tan \beta + \mu - \epsilon^2 \frac{N \cos \beta}{L}}{\tan \beta - 2\mu(1+\epsilon)}}$$

mit den Abkürzungen

$$\mu = \frac{NS}{hL} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{m_v S_v}{mS} \frac{L}{N \cos \beta}$$

m_v ist dabei die Masse des Lenksystems (Vorderrad, Gabel, Lenker und evtl. Gepäck) und S_v der Abstand seines Schwerpunktes von der Lenkachse.