Auf der Suche nach dem Heiligen Gral

THOMAS THIEMANN

Dieses Dokument enthält Ergänzungen zum gleichnamigen Artikel in Physik in unserer Zeit, 39. Jahrgang 2008, Nr. 3, S. 116, der die Theorie der Schleifen-Quantengravitation vorstellt. Es enthält folgende Abschnitte:

- Die Quantisierung von Feldtheorien
- Nichtperturbative kanonische Quantisierung
- Literatur – ausführlich und kommentiert

Die Quantisierung von Feldtheorien

Die Quantisierung einer gegebenen klassischen Feldtheorie wie beispielsweise Maxwells Theorie des Elektromagnetismus funktioniert wie folgt. Man gibt eine Algebra der Feldoperatoren an und realisiert diese dann auf einem Hilbert-Raum. Die an Punkten lokalisierten Felder $\phi(x)$ sind eigentlich zu singulär – mathematisch gesprochen handelt es sich um operatorwertige Distributionen. Das Kausalitätsaxiom der Quantenfeldtheorie lässt sich jedoch so aussprechen: Sind die Punkte x,x' in der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bezüglich g_0 raumartig getrennt, dann vertauschen die (bosonischen) Feldoperatoren $\phi(x)$, $\phi(x') = 0$. Hierbei heißen die Punkte x,x' raumartig getrennt, wenn es keine Kurve c in M gibt, die sie verbindet und deren Tangente überall zeitartig oder lichtartig ist. Insbesondere kann also kein Lichtsignal zwischen x,x' ausgetauscht werden.

Die bloße Formulierung dieses für die bisherige Formulierung der Quantenfeldtheorie fundamentalen Axioms nutzt die Kenntnis von g_0 offenbar entscheidend aus denn, sonst könnte man raumartig getrennt gar nicht definieren. Anders ausgedrückt: Nimmt man der Quantenfeldtheorie den Hintergrund g_0, dann bricht ihr axiomatisches Gebäude zusammen. Eine Theorie der Quantengravitation muß also das Begriffsgebäude der Quantenfeldtheorie radikal verallgemeinern: Was wir benötigen ist eine Quantentheorie von Geometrie und Materie auf einem Raum (mathematisch differenzierbare Mannigfaltikeit) ohne zugehörige Hintergrundsmetrik g_0.

Nichtperturbative kanonische Quantisierung

Dieses Verfahren ist aus den Vorlesungen über klassische Mechanik und Quantenmechanik wohlbekannt. Es besteht aus folgenden zwei Schritten, deren Beschreibung ich allerdings drastisch vereinfache und dabei auch auf Indizes verzichte.

Schritt 1: Klassische Hamiltonsche Formulierung

Startend von einer Lagrange-Funktion geht man mit Hilfe einer Legendre-Transformation zur Hamiltonschen Formulierung über. Diese besteht in einer Beschreibung der Dynamik durch verallgemeinerte Ortskoordinaten q und kanonisch konjugierter (bezüglich der Poissonklammer) Impulse p sowie einer Hamilton-Funktion (Energiefunktion) $H(q,p)$. Im Fall der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Lagrange-Funktion die von Einstein und Hilbert angegebene.

Für die Allgemeine Relativitätstheorie gilt noch, dass die zugehörige Wirkung Symmetrien besitzt – hier die allgemeinen Koordinatentransformationen, mathematisch die Diffeomorphismen von M. In solchen Fällen mit Symmetrie unterliegt die Theorie zusätzlichen (allgemein mehreren) Zwangsbedingungen $C(q,p)$. Sie rühren daher, dass man aufgrund der Symmetrie bei der Legendre-Transformation nicht alle Geschwindigkeiten v nach den Impulsen p auflösen kann. Die von diesen Zwangsbedingungen erzeugten kanonischen Transformationen sind Eichtransformationen. Von Interesse sind daher nur eichinvariante Größen, also Observablen \$F\$, die unter diesen Transformationen invariant sind.

Schritt 2: Quantisierung

Die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse q,p werden zu Operatoren $\hat{q},\hat{p}$ erhoben, die den kanonischen Vertauschungsrelationen $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$ und Adjungiertheitsrelationen $\hat{q}^\dagger = \hat{q}, \hat{p}^\dagger = \hat{p}$ genügen sollen. Diese Operatoren sollen auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ dargestellt werden, auf dem auch die Zwangsbedingungen $\hat{C} = C(\hat{q},\hat{p})$ und die Hamiltonfunktion $\hat{H} = H(\hat{q},\hat{p})$ als abgeleitete Operatoren „wohldefiniert" sind.

Die klassischen Zwangsbedingungen $C(q,p) = 0$ werden in der Quantentheorie durch die „Einschränkung" von $\mathcal{H}$ auf physikalische Zustände gelöst, die die Bedingung $\hat{C}\psi = 0$ erfüllen. Diese Gleichungen sind in der Quantengravitation als Wheeler-DeWitt-Gleichungen bekannt. Der resultierende physikalische Hilbert-Raum muss dann eine Darstellung der Quantenobservablen erlauben, also derjenigen Operatoren, die mit den Zwangsbedingungen kommutieren.

Literatur

Darstellungsproblem und Hilbert-Raum der Schleifen-Quantengravitation:

J. Lewandowski et al., Commun. Math. Phys. 2006, 267, 703.
A. Ashtekar, C.J. Isham, Class. Quant. Grav. 1992, 9, 1433.
A. Ashtekar, J. Lewandowski, in: Knots and Quantum Gravity, (Hrsg.: J. Baez), Oxford University Press, Oxford 1994.

Quanten-Spin-Dynamik:

T. Thiemann, Physics Letters 1996, B380, 257.
T. Thiemann, Class. Quant. Grav. 2006, 23, 2211.

Physikalische Anwendungen der Schleifen-Quantengravitation:

T. Thiemann, Class. Quant. Grav. 1998, 15, 1281.
H. Sahlmann, T. Thiemann, O. Winkler, Nucl. Phys. 2001, B606, 401.
K. Giesel, T. Thiemann. Algebraic quantum gravity I. Conceptual setup.
A. Perez, Quant. Grav. 2003, 20, R43.
J. Brunnemann, T. Thiemann, Class. Quant. Grav. 2006, 23, 1395.
M. Bojowald , H. A. Morales-Tecotl, Lect. Notes Phys. 2004, 646, 421.
A. Ashtekar et al., Phys. Rev. Lett. 2000, 85, 3564.

Review-Artikel und Bücher zum Überblick über das Gebiet:

C. Rovelli, Quantum Gravity, Cambridge University Press, Cambridge 2004.
T. Thiemann, Modern Canonical Quantum General Relativity, Cambridge University Press, Cambridge 2007.
C. Rovelli, Living Rev. Rel. 1998, 1, 1.
A. Ashtekar, J. Lewandowski, Class. Quant. Grav. 2004, 21, R53.
L. Smolin, An invitation to loop quantum gravity. Download: arxiv.org/abs/hep-th/0408048
T. Thiemann. Lect. Notes Phys. 2003, 631, 41.

Weitgehender Überblick über die gesamte bisher erschienene Literatur zur Schleifen-Quantengravitation:

A. Hauser, A. Corichi, Bibliography of publications related to classical self-dual variables and loop quantum gravity. Download: arxiv.org/abs/gr-qc/0509039