

Hundert Jahre Mie-Theorie

UWE KREIBIG

Dieses Dokument enthält Ergänzungen zum gleichnamigen Artikel in *Physik in unserer Zeit*, 39. Jahrgang 2008, Nr. 6, S. 281. Es enthält folgende Abschnitte:

- Leben und Werk von Gustav Mie
- Die Mie-Theorie und ihr Aufbau
- Korrekturen und Erweiterungen der Mie-Theorie
- Literatur

Leben und Werk von Gustav Mie

1868, 29. Sept. geboren in Rostock, Wokrenter Straße [5,10,11] (nach anderen Quellen: in Freiburg/Breisgau [2]) als Sohn eines Versicherungskaufmanns (in anderen Quellen [6]: eines Pastors). Er selbst gab den Ursprung seines ungewöhnlichen Namens als hugenottisch an, seine Mutter stammte von Salzburger Religionsflüchtlingen ab [3].

Schulabschluss in Rostock (Abiturnoten: „sehr gut“ in Mathematik; „mangelhaft“ in englischer Aussprache)[5].

Ab 1886 Studium an der Uni Rostock [1] (Fächer: Mathematik, Physik, Chemie, Zoologie, Geologie, Mineralogie, Astronomie sowie Logik und Metaphysik [5]).

1889 Uni Heidelberg [5]; Schüler von Leo Königsberger; Betreuung der Mineraliensammlung des Instituts.

1891 Staatsexamen in Mathematik und Physik.

3.8.1891, 4 Mon. später [2] Promotion in Heidelberg im Fach Mathematik mit „Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen“ Betreuung L. Königsberger. In [24] wird als Titel stattdessen angegeben: „Über die Bedingungen, unter welchen unendliche Differentialgleichungssysteme und die partielle Differentialgleichung $\delta z / \delta x = (\delta z / \delta y \cdot \delta z^2 / \delta y^2)$ unter Voraussetzung positiver Coefficienten Integrale haben“.

1892 Kurze Tätigkeit an einer Dresdner Privatschule [1] als Mathematiklehrer.

1892 Von Otto Lehmann nach Karlsruhe eingeladen, um dort das physikalische Praktikum zu betreuen [2, 3] und sich zu habilitieren. Arbeit mit den Hertzschen Geräten, um die etwa 4 Jahre zuvor von Heinrich Hertz durchgeführten Experimente zu wiederholen [1,3]. Intensive Beschäftigung mit der Elektrodynamik.

Erste Publikation: exp. und theor. Untersuchungen elektromagnetischer Felder an 2 parallelen Leitern [3].

Leitungsaufgaben an Karlsruher Bibliothek [26].

1897 Habilitation für theoretische Physik [2] in Karlsruhe [2] (andere Quelle [5]: in Göttingen).

ab 1900 : experimentelle Untersuchungen der Fortpflanzungen elektrischer Wellen an versilberten Drähten [27].

1901 Heirat mit Beate Hess [3], „die die Tochter des Wirts des Gasthauses ‚Schiff‘ war“ [25].

1902 Extraordinarius der Theoretischen Physik an der Uni Greifswald.

1903 „Die neueren Forschungen über Ionen und Elektronen“ in Sammlung elektrotechnischer Vorträge Bd.4 (Enke, Stuttgart).

1905 Vertreter der Experimentalphysik und Direktor des Physikalischen Instituts der Uni Greifswald als Nachfolger von W. König.

1908 Theoretische Publikation „Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen“ in Annalen der Physik 25. (Erste exakte und vollständige Lösung und numerische Auswertung des elektrodynamischen Problems. Entdeckung des „Mie-Effektes“.)

Zeitgenössische Arbeiten zum selben Problemkreis:

L. Lorenz, „Lysvevægelsen i og uden for en af plane lysbølger belyst kugle“ K. Dansk Vidensk Selsk Forh. (1890) [9]. (Theoretische Behandlung des Einfalls einer ebenen Welle auf eine transparente Kugel, jedoch in Näherung und ohne Bezug auf Maxwell-Theorie.)

H. Siedentopf, R. Zsigmondy „Über Sichtbarmachung und Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen...“, Annalen der Physik 10 (1903). (Entdeckung der auf Lichtstreuung beruhenden Dunkelfeld-Mikroskopie.)

Walter Steubing „Über die optischen Eigenschaften kolloidaler Goldlösungen“ Annalen der Physik 26 (1908) (Greifswalder Dissertation über Messung von optischen Eigenschaften von Gold-Kolloiden).

1910 „Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus – Eine Experimentalphysik des Weltäthers“ . (Neuaufgaben (in „strengerer, mehr mathematisch formulierter Form“) 1941 [2], 1948 [6].)

1910 Einführung des Mieschen Maß- und Einheitensystems [28].

Weiterhin Arbeit an seiner Einheitlichen Elektromagnetischen Theorie von Feld und Materie unter Einschluss von Relativitätstheorien und der Gravitation. „Suche nach der großen Einheit“, der „Weltfunktion“ (M. Born).

Erste nichtlineare Elektrodynamik.

Bis 1914 jährlicher Winterurlaub in Mittenwald mit Kollegen (u.a. Wien, v. Laue, Sommerfeld, Debye) [1,3].

1912 – 1913 Drei Publikationen „Grundlagen einer Theorie der Materie“ Annalen der Physik 37, 39, 40. Darin Formulierung der „Zustandsgleichung von Mie-Grüneisen [30]“.

1916 Rede anlässlich der Übernahme des Rektorates der Uni Greifswald mit dem Titel „Naturgesetz und Geist“.

1916 Berufung an die Uni Halle (Nachfolger von E. Dorn als Direktor des „Physikalischen Instituts und Laboratoriums“ ; (Dreier-Liste: 1. P. Debye, 2) M. von Laue, 3. G. Mie)).

1917 Ordinarius für experimentelle Physik in Halle. Schwerpunkt auch auf experimentellen Arbeitsgebieten, u.a. [1]:

- Bewegung der Moleküle in Lösungen und Elektrolyten;
- Molekülstruktur hochpolymerer Substanzen [5].

1917 – 1919 Bedeutender Briefwechsel mit A. Einstein (14 Briefe) über unterschiedliche Ansichten bezüglich Feldtheorien, Masse, Gravitation, Relativitätstheorien, Bezugssystemen etc. [2,8].

1921 „Die Einsteinsche Gravitationstheorie. Versuch einer allgemein verständlichen Darstellung der Theorie“ Leipzig, Hirzel-Verlag.

Einrichtung des großen Physikhörsaals [7].

1924 Uni Freiburg: Berufung zum Vorstand des Physikalischen Instituts.

Röntgenstrahlungsexperimente mit Staudinger.

1925 Publikation „Bremsstrahlung und Compton sche Streustrahlung“.

1931 Publikation „Elektrodynamik“ [1].

1935 Emeritierung.

Mie beschäftigte sich besonders auch mit erkenntnistheoretischen und religiösen Fragen [6]. Er gehörte dem oppositionellen „Freiburger Kreis“ [29] an. Als Literatur-Beispiele seien genannt:

1937 Vortrag (publiziert) „Die Denkweise der Physik und ihr Einfluss auf die geistige Haltung des heutigen Menschen“ mit dem Schlusssatz: „Gott gebe, dass das ganze deutsche Volk von der Überspannung der an sich ja gesunden naturwissenschaftlichen Denkweise erlöst und zu ihm zurückgeführt werde!“ „Die göttliche Ordnung in der Natur“, drei Aufsätze (Furche, Tübingen 1946).

1938 Ehrenmitglied der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

1948 Memoiren „Aus meinem Leben“.

1950 Publikation „Zur Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten Körper“, Zeitschr. f. Physik 128.

1957, 13. Februar, in Freiburg gestorben [5].

Die Uni Freiburg ehrt Gustav Mie heutzutage u. a. durch den Gustav-Mie-Studienpreis und die Bezeichnung „Mie-Gebäude“ für das Hauptgebäude der Physik.

Die Mie-Theorie und ihr Aufbau

Als Mie-Theorie wird üblicherweise die Arbeit „Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen“, Annalen 25, 377-445, 1908 bezeichnet. Aber auch die allgemeine elektrodynamische Feldtheorie, die Mie entworfen hat, wird so bezeichnet.

Bisweilen wird auch die Bezeichnung Lorenz-Mie-Theorie benutzt. Ludvig Lorenz veröffentlichte im Jahr 1890 eine umfangreiche Arbeit zum Thema „Transparente Kugel in einer ebenen Lichtwelle“, allerdings mit Näherungen und noch ohne Bezug zur Maxwell-Theorie [9]. Die Arbeit erschien in dänischer Sprache in einer dänischen Zeitschrift (K. Dan. Vidensk. Selsk. Forh. **6** 1-62, 1890). Es ist wenig wahrscheinlich, dass Mie diese Arbeit kannte. Weder er noch Steubing erwähnen sie. Die Mie-Theorie ist daher als ab initio eigenständige Leistung von G. Mie anzusehen.

Mie verband seine Theorie zudem mit dem Experiment, indem er numerische Vergleiche mit von ihm angeregten Messungen von W. Steubing an Gold-Kolloiden anstellte, die weit über die Rayleigh-Näherung hinausgingen, weil sie höhere Multipol-Moden einschlossen. Historisch ist

also die Bezeichnung Lorenz-Mie-Theorie nicht zwingend, allerdings hält sie die Erinnerung an einen großen theoretischen Optiker in der zweiten Hälfte des 19. Jh. wach.

Mies Theorie ist umfangreich und kompliziert, speziell wegen der Verwendung sphärischer Koordinaten und der expliziten Angabe aller Reihenentwicklungen. Aus der häufigen Benutzung von Näherungslösungen ist zu vermuten, dass sie zwar sehr häufig zitiert wurde (1995 wurde gezählt, dass damals die Zahl der Literaturzitate größer war als die aller Arbeiten Einsteins zusammen), aber nur selten komplett ausgewertet wurde. Schon um 1960 wurde sie in der Pionier-Gruppe C. von Fragsteins erstmals (in Algol für den Rechner Zuse Z22) programmiert und numerisch von H. Roemer [18], F.J. Schoenes [19] und U. Kreibitz [20] ausgewertet.

Heute ist eine große Zahl von Codes im Netz direkt abrufbar [15, 16, 17], sodass Näherungslösungen unwichtig geworden sind.

Der Titel der Arbeit und auch ihre numerischen Ergebnisse scheinen auf den Spezialfall kolloidaler Metallpartikel mit Größen um 20 nm (wie bei den Steubingschen Experimenten) im optischen Spektralbereich einzuschränken, tatsächlich gilt die Lösung aber allgemein, soweit eine Dielektrizitätsfunktion definierbar/bestimmbar ist, d.h. für beliebige Teilchengrößen (von der Molekül-Festkörper Grenze bei 2 nm bis zum μm -Bereich), beliebige elektromagnetische Spektralbereiche (von Mikrowellen bis zum UV) und beliebige Teilchenmaterialien (Elemente, Verbindungen, Metalle, Halbleiter, Dielektrika, Kunststoffe etc.). Dies ermöglicht ihre weite und verbreitete Anwendung, die von der Untersuchung von Nanosize-Effekten bis zu atmosphärischer Optik einschließlich des Regenbogens, automotiven Auspuffgasen, Farbpigmenten, Nahrungs- und Kosmetikartikeln, Aero- und Hydrosolen und Interstellarer Staubmaterie reicht. Allerdings müssen die Partikel stets kugelförmig und voneinander isoliert sein, eine strikte Einschränkung, die oftmals in der Literatur zu leicht genommen wurde und wird.

Die Mie-Theorie liefert Aussagen über elektromagnetische Nah- und Fernfelder, Absorption und winkelabhängige frequenzerhaltende Streuung. Eine wichtige Besonderheit ist das häufige Auftreten von Resonanzstrukturen in den Extinktionsspektren, die durch die hohe Symmetrie der Kugelteilchen verursacht wird.

Im Folgenden wird die Lösungsstruktur der originalen Mie-Theorie kurz skizziert:

1. Annahmen : Einzelnes sphärisches Nanopartikel mit Radius R , aus *beliebigem einheitlichem* Material, eingebettet in *homogenes* dielektrisches Medium. Ebene einfallende Lichtwelle.
2. Formulierung der Maxwell-Gleichungen in Kugelkoordinaten r, θ, φ .
3. Einführung der „scharfen“ Maxwellschen Randbedingungen für die Felder (Sprungfunktionen an der Oberfläche).
4. Einführung von einheitlichen, für das ganze Teilchen incl. Oberfläche geltenden optischen Materialgrößen, der komplexen Dielektrizitätsfunktion für das Teilchenmaterial $\varepsilon(\omega)$ und der reellen Dielektrizitätskonstanten, des Einbettmediums $\varepsilon_{\text{medium}}$, als Zahlenwerte aus Experimenten oder aus der Theorie der kondensierten Materie. Mie übernahm Werte des massiven Materials. Die magnetische Permeabilität wird $\mu(\omega) = 1$ gesetzt.
5. Herleitung der Helmholtzschen Wellengleichung mit skalaren Potentialen in r, θ, φ .
6. Lösung von 5. mit einem Produktansatz für die 3 Potentiale der einfallenden, transmittierenden und gestreuten Wellen.

7. Rücktransformationen der Potentiale in Felder. Einführung von elektrischen und magnetischen „Partialwellen“ für die einfallende, die transmittierende und die gestreute Lichtwelle. Da $\mu(\omega) = 1$, beruhen die magnetischen Partialwellen nur auf elektrischen Wirbelströmen.
8. Repräsentation der Felder der 3 Variablen durch infinite Reihen von Zylinderfunktionen, von sphärischen Harmonischen und von harmonischen Funktionen (Bessel-Funktionen, Legendre-Polynome und trigonometrische Funktionen für r , θ und φ .) Es erfolgt eine orthogonale Multipol-Moden-Entwicklung mit Modennummern $n = 1$ (Dipol), 2 (Quadrupol), 3 (Oktopol)... Berechnung von Nah- und Fernfeldern, Polarisations-abhängigkeiten und Winkelabhängigkeit des Streulichts möglich.
9. Berechnung der Mie-Koeffizienten aus den Maxwellschen Randbedingungen für die verschiedenen Moden. Deren Maxima liefern für viele Materialien spezielle Resonanzen. Zwei Arten von Resonanzen sind zu unterscheiden:
 - a. Kleine Teilchen aus absorbierenden Materialien können „Mie Resonanzen“, oder „Polarisationsresonanzen“ im Teilchenvolumen zeigen. Unterschiedliche Ursachen dafür möglich : opt. Interband-Übergänge, Plasmon-Polariton-Anregungen bei metallischen Teilchen, opt. Phononen, Excitonen bei Halbleitern.
 - b. In großen dielektrischen Teilchen (größer als Wellenlänge) können „direkte Feldresonanzen“, „morphologische Resonanzen“ auftreten. Ursache: stehende Oberflächenwellen.
10. Anwendung von Poyntings Gesetz zur Berechnung der Messgrößen für *ein* Teilchen: einfallende, absorbierte und gestreute Intensitäten.
11. Extrapolation auf N -Teilchen-Systeme (ohne Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung) mit dem Lambert-Beer-Gesetz.
12. Ergebnisse: Intensitäts/Frequenz-Spektren für Absorption, frequenzerhaltende Streuung und Extinktion. Berechnung von Nahfeldern (mit long. Feldkomponenten) und Fernfeldern (transv. Felder), Polarisationsabhängigkeiten und Winkelabhängigkeiten des Streulichtes („Mie-Effekt“) möglich.
13. *Inverse Applikation*: Berechnung von Zahlenwerten der Dielektrizitätsfunktion , der Teilchengröße und weiteren Parametern aus Messspektren. Dazu sind 2 voneinander unabhängige Messdatensätze erforderlich (weil aus zwei Teilen, $\text{Re}\{\varepsilon\}$ und $\text{Im}\{\varepsilon\}$ besteht). Als zweite Messgröße bietet sich der von Gans und Happel [18] 1909 berechnete „relative Brechungsindex-Unterschied“ $L = (\sqrt{\varepsilon_{\text{sample}}} - \sqrt{\varepsilon_{\text{medium}}}) / \sqrt{\varepsilon_{\text{medium}}}$ an [19]. L ist allerdings nur mit höchstempfindlicher Interferometrie zu messen. Daher wurde diese Messung auch durch eine Kramers-Kronig-Analyse ersetzt [22].

Korrekturen und Erweiterungen der Mie-Theorie

Die originale Theorie von Mie ist die erste exakte und vollständige, lineare Lösung des elektromagnetischen Problems einer beliebigen Kugel in einem monochromatischen, ebenen, elektromagnetischen Feld. Allerdings enthält sie zahlreiche einschränkende Annahmen und Bedingungen, die z. T. wenig realistisch sind und einen quantitativen Vergleich mit Messergebnissen speziell bei Proben mit kleinen Nanopartikeln erschweren oder unmöglich machen. Die Literatur ist voll von solchen oft unbefriedigenden Versuchen. Bei größeren Teilchen, z. B. Glaskugeln, Latex-Teilchen etc. hingegen ist dieses Problem geringer.

Im Laufe der Zeit ist eine Vielzahl mehr oder weniger approximativer und präziser Erweiterungen und Ergänzungen der originalen Mie-Theorie vorgeschlagen oder vorgenommen worden. Noch immer haben viele entsprechende Publikationen nur das Ziel, bessere Übereinstimmung mit Messdaten herzustellen. Allerdings können die Ursachen von Diskrepanzen sowohl in der Mie-Theorie liegen als auch in den Messproben. Denn Herstellung und Charakterisierung von Nanopartikel-Proben „guter Qualität“ gehört zu den schwierigsten Problemen der Nanotechnologie.

Die so im Laufe der Zeit entstandene „modifizierte Mie Theorie“ ist heute in vieler Hinsicht eine auch quantitativ hervorragende Theorie geworden, die zu Recht die Basis der Nanooptik darstellt. Einige solche Erweiterungen und Ergänzungen sind im Folgenden zusammengestellt. Relevante Literatur dazu ist beispielsweise in [14] zu finden.

A Ergänzungen zur Elektrodynamik der Mie Theorie

1. Einfallende Welle ist nicht eben (z. B. fokussierter Laser).
2. Nanoteilchen ist nicht kugelförmig (z.B. bei Deposition auf Substrat, bei Facetten mit Ecken und Kanten oder bei Koaleszenz-Produkten). Analytische Näherungen gibt es z.B. für Ellipsoide und Drähte. Bei beliebigen Formen können Diskretisierungs-Methoden angewendet werden.
3. Sprungartige, zweidimensionale Maxwell-Randbedingungen gelten nicht mehr auf der Nanometerskala (Spill-out-Effekt; Skineffekt, etc). Oberfläche und Grenzflächen werden auf dieser Skala zu dreidimensionalen, inhomogenen Grenzschichten.
4. Oberfläche/Grenzfläche hat Rauigkeiten.
5. Adsorption oder Chemisorption verändert die Oberfläche.
6. Oberflächen/Grenzschichten sind elektrisch geladen a) durch „spill-out“-Effekt, b) infolge des Unterschieds im chemischen Potential von Teilchen und Umgebungsmedium.
7. Teilchenmaterial ist heterogen durch Korngrenzen und durch Fremdstoff-Hüllen (z. B. Oxid-, Sulfid, Chlorid-Hüllen). Es existiert eine Erweiterung auf beliebig viele Schichten („Zwiebelmodell“).
8. Symmetrie der Felder ist herabgesetzt durch ebene Substrate.
9. Im Vielteilchen-System schwanken Teilchengrößen und Formen.
10. In dichtgepackten Vielteilchen-Systemen koppeln benachbarte Teilchen elektrodynamisch über Nahfelder und Fernfelder. Die Probe wird dadurch zu einem System gekoppelter Kugel-Oszillatoren und die inkohärente Einzelteilchen-Streuung erhält kohärente Anteile. Die entsprechend entsprechend durch Hinzufügen eines vierten Potentials, des

Wechselwirkungspotentials, erweiterte Theorie trägt den Namen Generalized Mie Theory (GMT) oder Generalized Multiparticle Mie Theory (GMMT).

B Änderungen der optischen Materialkonstanten

1. Dielektrizitätsfunktion $\varepsilon_{\text{Teilchen}}(\omega, R)$ des nanoskopischen Teilchenmaterials weicht von der des massiven Teilchenmaterials ab. Modifikation durch Einbeziehung von Teilchengrößeneffekten und Ober-/Grenzflächeneffekten, wozu eine Vielzahl von Ansätzen aus der modernen Theorie kondensierter Materie zur Verfügung steht. Die Struktur der Mie Theorie legt nahe, dass auch $\varepsilon_{\text{Teilchen}}(\omega, R)$ als einheitlich für das ganze Teilchen, incl. der Oberfläche, angenommen wird.
2. $\varepsilon_{\text{Teilchen}}(\omega, R)$ ist *nicht* im ganzen Teilchen einheitlich; lokale Funktion $\varepsilon_{\text{Teilchen}}(\omega, r, R)$ ändert sich kontinuierlich zur Ober-/Grenz-Fläche hin und in der Umgebung von Gitterfehlern (Korngrenzen, Verunreinigungen etc.). Ist die Variation radial, dann ist dieser Effekt durch eine Vielzahl konzentrischer Hüllen (siehe „Zwiebelmodell“, Punkt A7) zu approximieren.
3. In der Grenzschicht entstehen elektronische Grenzschichtzustände, die durch Elektronen aus dem Teilcheninnern gefüllt werden können (Chemical Interface Damping, CID; „statischer“ und „dynamischer“ Ladungstransfer [23]).
4. $\varepsilon_{\text{Teilchen}}(\omega, R)$ ist bei hohen eingestrahnten Intensitäten nichtlinear. Das Umgebungsmedium ist nichtlinear.
5. Dielektrizitätskonstante des Umgebungsmediums hängt von Frequenz ab: $\varepsilon_{\text{Medium}} = \varepsilon_{\text{Medium}}(\omega)$.
6. $\varepsilon_{\text{Medium}}$ ist im Grenzbereich inhomogen.
7. Umgebungsmedium ist absorbierend.

Literatur

Die angegebenen Daten und Informationen sind aus zahlreichen Literaturstellen exzerpiert worden; die Angabe erfolgt nach bestem Wissen, bei Widersprüchen wurde keine Entscheidung vorgenommen. Wir bitten bei Unrichtigkeiten um Nachsicht und um Information des Autors.

- [1] www.catalogus.professorum.halensis.de.
- [2] G. Kohl, Relativität in der Schwebe: die Rolle von Gustav Mie, MPI preprint service Nr. 209, Berlin 2002.
- [3] P. Lilienfeld, Appl. Optics **1991**, 33, 4696.
- [4] www.dpg-physik.de
- [5] SVZ-online: Mecklenburg-Magazin, Nov. 2005.
- [6] H. Hönl, Phys. Blätter **1968**, 24, 498.
- [7] priv. Mitteilung Prof. Gunnar Berg
- [8] W. Hergert, scientia hallensis **2005**, 13.
- [9] H. Kragh, Appl. Optics **1991**, 30, 4688. O. Keller, Optical Works of L. V. Lorenz, in: Progr. Optics 43 (Hrsg. E. Wolf), Elsevier, Amsterdam 2002.
- [10] de.wikipedia.org/wiki/Gustav_Mie
- [11] de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Söhne_und_Töchter_Rostocks
- [12] de.wikipedia.org/wiki/Zustandsgleichung_von_Mie

-
- [13] de.wikipedia.org/wiki/Miesches_Einheitensystem
- [14] U. Kreibig, M. Vollmer, Optical Properties of Metal Clusters, in: Springer Series in Materials Science 25, Springer, Berlin 1995.
- [15] M. Quinten, Wissenschaftlich-Technische Software, 5 Programme, Quinten@t-online.de
P. Laven, Mie and Debye Plots, Philiplaven.com/MiePlot.htm
B. Michel, Mie Calc-frei konfigurierbares Programm für Streulichtberechnungen,
www.unternehmen.com/Bernhard-Michel/MieCalc/index.html
- [16] Th. Wriedt, List of electromagnetic scattering programs
diogenes.iwt.uni-bremen.de/vt/laser/wriedt/index_ns.html
- [17] atol.uscd.edu/scatlib/sphere2.html
- [18] C. v. Fragstein, H. Roemer, Z. Phys. **1958**, 151, 54.
- [19] C. v. Fragstein, H. J. Schoenes Z. Phys. **1967**, 198, 477.
- [20] U. Kreibig, C. v. Fragstein, Z. Phys. **1969**, 224, 307.
- [21] R. Gans, H. Happel, Ann. Phys. **1909**, 29, 277.
- [22] U. Kreibig, Z. Phys. **1970**, 234, 307.
- [23] U. Kreibig, Appl. Phys. **2008**, B 93, 79.
- [24] www.ub.uni-heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/edd/kern
- [25] M. Weber et al., Briefe 1909-1910, Mohr Siebeck Verlag, Tuebingen 1984.
- [26] EUCOR-Bibliotheksinformationen – Informations des bibliotheques 3, 1993.
- [27] D. Freudig, S. Ganter (Hrsg.), Lexikon der Naturwissenschaften, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1996.
- [28] Gustav Mie, de.wikipedia.org/wiki/Miesches_Einheitensystem
- [29] Freiburger Kreis, de.wikipedia.org/wiki/Freiburger_Kreis
- [30] Zustandgleichung von Mie-Grüneisen, wikipedia.org/wiki/Zustandsgleichung_von_Mie