Die Wellenlänge der Undulatorstrahlung

In einem Undulator werden Elektronen durch Magnetfelder auf einen Slalomkurs gebracht. Dabei entsteht elektromagnetische Strahlung, die von einer Wellenlänge dominiert wird. Im Folgenden findet sich eine Herleitung dieser Wellenlänge, die von den Parametern des Undulators und der Elektronenenergie abhängt.

Die nahezu lichtschnellen Elektronen im Undulator strahlen in allen möglichen Wellenlängen. Die für den Undulator charakteristische Wellenlänge ergibt sich daraus, dass sich Strahlung dieser Wellenlänge λ_{em} verstärkend überlagert und somit alle andere Strahlung dominiert.

Es kommt zu einer verstärkenden Überlagerung genau dann, wenn die Elektronen bei einer Undulation (= einer vollständigen Schwingung) um λ_{em} bezüglich der Strahlung zurückfallen. Denn dann sind Elektronen und Strahlung nach einer Undulation wieder in Phase.

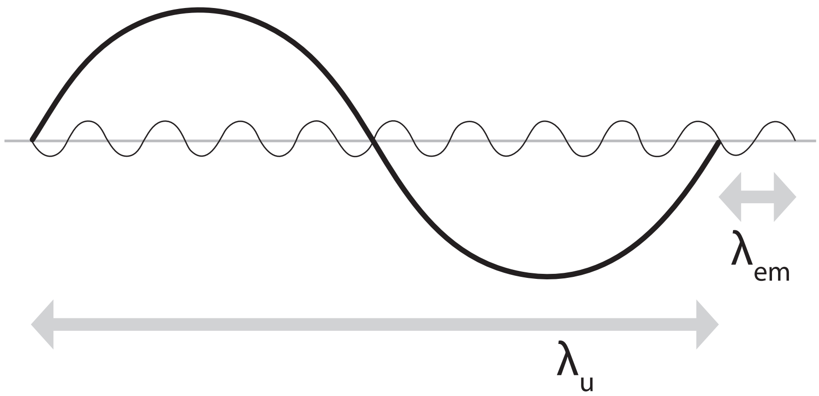

Abbildung 1: Das Bild zeigt eine Undulation eines Elektrons sowie die Strahlung, die es zu Beginn ausgesandt hat. Wenn das Elektron in Längsrichtung um genau eine Wellenlänge λ_{em} zurückgefallen ist, so sind Elektronen und Strahlung nach einer Undulation wieder in Phase.

Um λ_{em} zu berechen, hilft folgende Überlegung: Die Elektronen bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_z$ in Längsrichtung des Undulators und benötigen für eine Undulation die Zeit T, das Licht ist mit c unterwegs, die Länge einer Undulation wird durch λ_u beschrieben. Das Zurückfallen der Elektronen um eine Wellenlänge kann daher beschrieben werden durch

$$\lambda_{em} = (c - \bar{v}_z)T \approx (c - \bar{v}_z)\lambda_u/c.$$

Es gilt also die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}_z$ zu bestimmen. Dazu müssen die Bewegungsgleichungen gelöst werden. Die Elektronen mit der relativistischen Masse γm_e erfahren im Magnetfeld $\mathbf{B}$ des Undulators eine Beschleunigung durch die Lorentzkraft:

$$\gamma m_e \mathbf{a} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Es gilt also für die x-Komponente:

$$a_x = -\frac{e}{\gamma m_e} v_z B_y.$$

Im Falle eines unendlich ausgedehnten Undulators führen Symmetrieüberlegungen zu einer Beschreibung des Magnetfelds in der x-z-Ebene durch

$$B_y(x, y = 0, z) = -B_0 \sin(2\pi z/\lambda_u).$$

Nehmen wir nun an, dass die Änderung von v_z für die Ausrichtung in x-Richtung vernachlässigt werden kann. Dann erhalten wir

$$v_x = \bar{v}_{max,x} \cos(2\pi t/T).$$

Aufgrund der Slalombewegung ändert sich aber $v_z(t)$ mit der Zeit. Es gilt (mit einer Näherung des Wurzelterms):

$$v_z(t) = \sqrt{v^2 - v_x^2(t)} \approx c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}(1 + \gamma^2 v_x^2(t)/c^2)\right).$$

Setzt man nun die Lösung für v_x ein, so ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit in Längsrichtung des Undulators

$$\bar{v}_z(t) = \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)\right) c \text{ mit } K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi m_e c}$$

und damit

$$\lambda_{em} = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \text{ mit } K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi m_e c}.$$

Bei einem Undulator ist der Undulatorparameter K von der Größenordnung 1. Die Gleichung zeigt: Mit zunehmender Energie der Elektronen (γ) nimmt die Wellenlänge ab, mit zunehmenden Magnetfeld (B_0) zu.

Referenzen

- Schmüser P., Dohlus M., Rossbach J. (2008): Ultraviolet and Soft X-Ray Free-Electron Lasers. Introduction to Physical Principles, Experimental Results, Technological Challenges. Springer, Berlin

- Schwarze, H., Förster M., Rincke K., Thomsen, O. (2000): Unterrichtsmaterial zum TESLA-Projekt. Aulis Verlag, Köln

- Khan, S. (2006): Beschleuniger und Speicherringe, Teil 1. http://athene.delta.uni-dortmund.de/ khan/lehre/beschleuniger-ws08/ws08-skript-alt.pdf