

# Zusatzmaterial zur Levitationswaage für Hochtemperatur-Supraleiter

MICHAEL BECKER | JEROME MEISER | MICHAEL R. KOBLISCHKA | UWE HARTMANN

Dieses Dokument ist eine Ergänzung zum Artikel „In der Schweben“ in **Physik in unserer Zeit**, 42. Jahrgang 2011, Nr. 6, S.285. Es enthält folgende Abschnitte zum physikalischen Modell und zur Auswerte- und Steuerungssoftware:

- Durchführung an Schulen und Universitäten
- Feldberechnung
- Berechnung des Pinning-Potentials
- Anmerkungen zur Technik
- Vorbereitung und Ablauf eines Experiments
- Auswertungsprogramm in MAPLE
- Graphische Oberfläche der Steuerungssoftware
- Quelltext in DLL
- Literatur.

## Durchführung an Schulen und Universitäten

Der Versuch „Levitationswaage“ kann für mehrere Zielgruppen eingesetzt werden. Sowohl bei Studierenden als auch bei Schülern sollte am Anfang des Praktikums eine spielerische Kontaktaufnahme mit einfachen Levitationsversuchen stehen. Die explizite Gestaltung des Versuches hängt aber sehr stark von den Rahmenbedingungen (Dauer des Praktikums, Kenntnisstand der Schüler oder Studierenden, Gruppengröße) ab. Im Folgenden machen wir daher einige Vorschläge für die konkrete Gestaltung des Praktikums.

- Schüler (Mittelstufe): Die Messung kann mit Hilfestellung durch einen Betreuer durchgeführt werden. Allerdings ist eine vollständige Auswertung insbesondere mathematisch, aber auch physikalisch zu anspruchsvoll. Die zugrunde liegenden Modelle können kaum vertieft werden, da wichtige Begriffe wie Stromstärke, magnetisches Feld oder Lorentz-Kraft den Schülern je nach Klassenstufe noch nicht bekannt sind. Die Kraft-Abstands-Kurven können mit Hilfestellung durch den Betreuer gemessen und geplottet werden. Man sollte sich jedoch eher auf die Beobachtung und Beschreibung grundlegender Phänomene konzentrieren.

Dazu zählen:

- Es sind anziehende und abstoßende Levitationskräfte möglich. Diese Kräfte kann man in einfachen Experimenten auch spüren.
- Es ist stabile und instabile Levitation möglich.

- In gewissen Anordnungen ist es möglich, dass der Magnet oder der Supraleiter um eine Achse frei rotieren kann. Dies versucht man in reibungsfreien Lagern (im Gegensatz zum herkömmlichen Kugellager) auszunutzen.
- Levitation ist auch in anderen Bereichen der Physik möglich. Besonders einfach lässt sich beispielsweise die Levitation eines Graphitplättchens über einigen Permanentmagneten demonstrieren.
- Schüler (Oberstufe): Die Messung kann selbstständiger durchgeführt werden als bei den Mittelstufenschülern. Grundlegende Begriffe wie Stromstärke, magnetisches Feld oder Lorentz-Kraft sollten den Schülern bekannt sein, so dass man Elemente der zugrunde liegenden Modelle zumindest qualitativ besprechen kann (beispielsweise das Critical-State-Modell, die kritische Stromdichte, die Energiedissipation bei Fluss Schlauchbewegung, thermisches Flusskriechen, Wechselwirkung zwischen Abschirmströmen und äußerem Magnetfeld).
- Studierende: Die Vorbereitung auf das Praktikum sollte eine selbstständige Einarbeitung in die Grundlagen umfassen. Als Übungsaufgabe vor dem Versuch können Teile des Modells nachgerechnet werden. Beispielsweise könnten die zur Auswertung benötigten Werte für  $I(z)$  und  $B(z)$  (Näheres siehe nächsten Abschnitt) berechnet werden. In unserer Arbeit wurde dies mit Maple durchgeführt (Näheres siehe weiter unten). Die Werte können aber auch mit Programmiersprachen wie C berechnet werden. Eine weitere Übungsaufgabe könnte darin bestehen, dass eine Abschätzung für den Fehler der Positionierung aufgrund der Längenänderung beim Abkühlen gemacht werden soll.

Bei allen Zielgruppen sollten nach Möglichkeit zwei Schüler oder Studierende zusammenarbeiten, da am Anfang jeder Messung mehrere zeitkritische Aktionen am PC und am Messaufbau ausgeführt werden müssen. Sinnvollerweise übernimmt ein Schüler oder Student den PC und einer die Messeinrichtung. Bei Schülern kann auch darauf verzichtet werden, dass der gesamte Versuch bei den Dummy-Messungen mit demselben Timing wiederholt wird.

### Feldberechnung

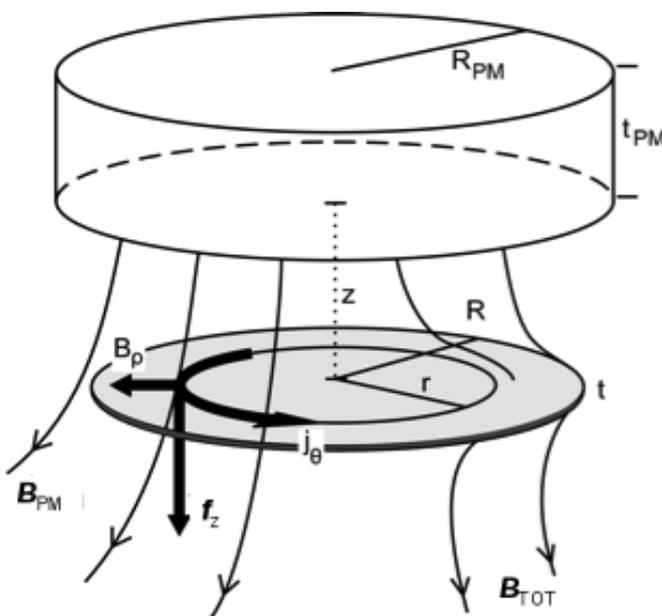
Wegen der Symmetrie unserer Permanentmagnet-HTSL-Konfiguration ergibt sich eine Stromdichte, die mit einer azimuthalen Komponente  $j_\theta$  beschrieben werden kann (Abbildung 1). Daraus folgt, dass die Kraftdichte, die aus der Wechselwirkung zwischen  $j_\theta$  und dem lokalen Feld des Permanentmagneten  $\mathbf{B}_{PM}$  folgt, geschrieben werden kann als

$$\mathbf{f} = \mathbf{j}_\theta \times \mathbf{B}_{PM}. \quad (1)$$

Die Levitationskraftdichte ist die vertikale Komponente von  $\mathbf{f}$ . Daraus folgt, dass die Gesamtkraft durch das integrierte Produkt von  $j_\theta$  und der radialen Komponente  $B_\rho$  des Felds des Permanentmagneten ausgedrückt werden kann:

$$F_z(z) = \int_0^R B_\rho(r, z) j_\theta t 2\pi r \, dr, \quad (2)$$

$t$  ist hier die Dicke des scheibenförmigen Supraleiters,  $R$  sein Radius (Abbildung 1). Mit magneto-optischen Experimenten konnte in [1] gezeigt werden, dass der Dünnsfilm bei einer Temperatur von 77 K vollständig von Fluss durchsetzt ist, wenn das lokale Feld etwa 18 mT überschreitet. Damit kann das Modell des kritischen Zustandes für alle Messpunkte angewendet werden.



**Abb. 1** Kräfte zwischen der supraleitenden Probe (unten) und dem Permanentmagneten (oben). In der dieser Situation bewegt sich der Supraleiter vom Magneten weg.

Unser Permanentmagnet (PM) erreicht dieses Feld bereits in einem Abstand von ungefähr 20 mm. Dies bedeutet, dass der größere Teil der Kraft-Abstandskurven in einem Bereich liegt, in dem die Größe von  $j_\theta(r)$  der kritischen Stromdichte  $j_0$  entspricht.

In diesem Fall kann man schreiben:

$$F_z(\tilde{z}) = j_c t \int_0^R B_p(r, \tilde{z}) 2\pi r \, dr, \quad (3)$$

wobei das Radialfeld eines zylinderförmigen Magneten durch

$$B_p(r, \tilde{z}) = \frac{B_{\text{rem}}}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^1 \left[ \int_0^{2\pi} \frac{(-1)^n \cos \phi \cdot d\phi}{\sqrt{r^2 - 2rR_{\text{PM}} \cos \phi + R_{\text{PM}}^2 + (\tilde{z} + nt_{\text{PM}})^2}} \right]. \quad (4)$$

gegeben ist.  $B_{\text{rem}}$  ist das nominelle Remanenzfeld des PM. Diese Gleichung für  $F_z$  beinhaltet die Abhängigkeit von der kritischen Stromstärke, die remanente Induktion des PM und alle geometrischen Faktoren.

Um die kritischen Ströme in der Probe aus dem gemessenen  $F(d)$ -Diagramm bestimmen zu können, schreiben wir Gleichung (3) um

$$j_c = \frac{F_z(\tilde{z})}{2\pi t \int_0^R B_p(r, \tilde{z}) r \, dr}. \quad (5)$$

Mit Gleichung (4) ergibt dies:

$$j_c(\tilde{z}) = \frac{F(\tilde{z})}{I}. \quad (6)$$

wobei  $I$  gegeben ist durch:

$$I = \frac{tB_{\text{rem}}B_{\text{PM}}}{2} \int_0^R r \int_0^{2\pi} R_{\text{PM}} \cos \phi \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_{\text{PM}} \cos \phi + R_{\text{PM}}^2 + \tilde{z}^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_{\text{PM}} \cos \phi + R_{\text{PM}}^2 + (\tilde{z} + t_{\text{PM}})^2}} \right) d\phi \, dr. \quad (7)$$

Zusätzlich kann es nützlich sein, die magnetische Induktion im Zentrum (also entlang der Achse) zu berechnen:

$$B_{\text{AXIS}} = \frac{B_{\text{rem}}}{2} \left[ \frac{z + t_{\text{PM}}}{\sqrt{(z + t_{\text{PM}})^2 + R_{\text{PM}}^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_{\text{PM}}^2}} \right].$$

Diese Gleichung kann nicht mehr analytisch gelöst werden, sondern muss numerisch mit Hilfe eines Mathematikprogrammes wie MathCad oder Maple gelöst werden. Deshalb müssen die Werte für  $I$  und  $B_{\text{AXIS}}$  für alle Abstände  $z$  berechnet werden, an denen die Levitationskraft gemessen wurde.

Die Feldabhängigkeit der kritischen Stromdichte des Supraleiters kann mit einer Fit-Prozedur erhalten werden. Hierzu ist eine weitere Annahme nötig: Für das Flussprofil  $\partial B / \partial z$  innerhalb des Supraleiters verwenden wir ein exponentielles Modell (Kim-Modell) [2]:

$$j_c(B) = j_0 + j_1 e^{-|B|/B_0},$$

wobei  $j_0$ ,  $j_1$  und  $B_0$  Materialkonstanten sind.

## Berechnung des Pinning-Potentials

Hier zeigen wir, wie man das Pinning-Potential  $U_0$  aus der gemessenen Relaxationsrate [3, 4] berechnet. Der zeitliche Verlauf der Magnetisierung kann beschrieben werden durch

$$M(t) = M_c \left[ 1 - \frac{kT}{U_0} \ln \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right) \right].$$

Die Kriechrate  $S$  eines konventionellen Flusskriechexperimentes ( $B = \text{const.}$ ) ist definiert als

$$S = - \frac{1}{M_c} \frac{d M(t)}{d \ln t}.$$

Hier ist noch der Parameter  $M_c$  enthalten, der nicht so einfach ermittelt werden kann. Dies kann umgangen werden durch eine Normierung, wobei wir die normierte Kriechrate  $R$  erhalten zu

$$R \equiv - \frac{d M(t)}{d \ln t}.$$

Eine analoge Definition können wir für das zeitliche Verhalten der Kraftkomponente  $F_z$  aufstellen:

$$F_z(t) = F_c \left[ 1 - \frac{kT}{U_0} \ln \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right) \right]$$

und

$$R \equiv - \frac{d F_z(t)}{d \ln t}.$$

Hiermit können wir das Haftkraftpotential direkt aus den logarithmischen Diagrammen von  $F_z(t)/F_z(t=0)$  gegen  $\ln t$  bestimmen, wobei wir  $F_z(t=0)$  als Startpunkt unseres Experimentes wählen.

### Anmerkungen zur Technik

Die von uns eingesetzte Laborwaage PW 254 der britischen Firma Adam Equipment hat einen Wägebereich von maximal 250 g (2,45 N). Sie erreicht eine Auflösung von 0,0001 g (1  $\mu$ N) und einer Standardabweichung von 0,0002 g (2  $\mu$ N). Die Waage verfügt zudem über eine RS-232 Schnittstelle, über die sie an einen PC angeschlossen werden kann.

Damit die Waage zusammen mit der Steuerungssoftware verwendet werden kann, muss sie folgendermaßen konfiguriert sein: Als Wägeeinheit muss Newton eingestellt sein. Außerdem muss im Menu zu den Parametern der seriellen Schnittstelle der Punkt „stable“ auf „off“ stehen. Dies verhindert, dass die Waage, nachdem sie vom PC aufgefordert wurde, eine Messung durchzuführen, auf einen stabilen Wert wartet. Ein Messwert, der innerhalb des Stabilitätsbereiches der Waage nicht mehr schwankt, kann wegen des Einflusses des Stickstoffs nicht erreicht werden.

### Vorbereitung und Ablauf eines Experiments

Die Vorbereitung und der Ablauf einer Messung geschieht in folgenden Hauptschritten:

- Die Software wird vorbereitet: Es wird eine Steuerdatei geöffnet und eine Wertedatei angelegt. Außerdem wird die Waage initialisiert.
- Der Nullpunkt des Abstandszählers wird festgelegt: Der Probenhalter wird ohne Probe und Stickstoff mit dem Motor in die Nähe des Magneten gefahren. Danach wird der Probenhalter von Hand solange nach oben gefahren, bis er den Magneten berührt. Diesen Punkt erkennt man daran, dass sich die Anzeige der Waage um das Gewicht des PVC-Stabes mit dem Magneten ändert. Da das Substrat eine Dicke von 0,5 mm hat, wird der Probenhalter nun mit dem Motor um 0,5 mm nach unten gefahren. Diese Stellung wird in der Steuerungssoftware als Nullpunkt des Abstandszählers festgelegt.
- PVC-Stab und Probe werden auf eine Achse gebracht: In der Kupferplatte sind konzentrische Kreise eingeritzt. Die Waage wird vorsichtig verschoben, so dass der PVC-Stab sich in dem äußersten Kreis befindet. Anschließend wird der Probenhalter mit dem Motor in die Ausgangsstellung gefahren. Die Probe wird im inneren Kreis des Probenhalters mit einem Tropfen Alkohol, der mit einem Wattestäbchen auf die Kupferplatte aufgetragen wird, festgeklebt. Um längere Messungen zu ermöglichen, kann um die Probe noch mit einem Schild versehen werden.
- Der Versuchsaufbau wird abgekühlt: Der Timer der Steuerungssoftware wird auf 0 gestellt und Stickstoff in den Container gefüllt. Die Höhe des Stickstoffes über der Kupferplatte kann mit einem Lineal gemessen werden. Mit einem Becherglas, an dem ein Griff befestigt ist, kann Stickstoff entnommen oder nachgefüllt werden, falls eine bestimmte Höhe erreicht werden soll. Sobald die Kupferplatte kalt ist (man erkennt dies daran, dass der Stickstoff aufhört, an der Platte zu sieden), kann der Deckel auf den Container gelegt werden. Anschließend wird das Steuerfile gestartet. Nun verläuft die Messung automatisch.

---

Im Versuchsprotokoll wird notiert, wann begonnen wurde, Stickstoff einzufüllen, wann der Deckel aufgesetzt wurde und wann die Messung gestartet wurde. Außerdem wird die Füllhöhe des Stickstoffes notiert. Diese Aufzeichnungen werden benötigt, damit der zeitliche Ablauf der Messung bei der Dummy-Messung möglichst gut reproduziert werden kann.

**Auswertungsprogramm in MAPLE**

Die im Abschnitt „Feldberechnung“ diskutierten Werte für  $I(z)$  und  $B(z)$  müssen berechnet werden. Zu diesem Zweck haben wir das im Folgenden vorgestellte Programm in Maple geschrieben.

```
> restart;
```

Definieren der Funktion I

```
> Integral := z -> t*Brem*Rpm / 2 * Int(r*Int(cos(P) *
  (1/sqrt(r^2 + Rpm^2 - 2*Rpm*r*cos(P) + z^2) - 1/sqrt
  (Rpm^2 + r^2 - 2*Rpm*r*cos(P) + (z+tpm)^2) ), P=0..2*
  pi) , r=0..R ):
```

Definieren der Funktion für das B-Feld im Mittelpunkt der supraleitenden Scheibe

```
> Baxis := z -> Brem/2 * ((z+tpm)/sqrt((z+tpm)^2+Rpm^2
  - z/sqrt(z^2+Rpm^2)):
```

-----  
Für den Magneten M 15 08 1

Konstanten definieren

```
> Brem := 1.03: Rpm:=7.5*10^(-3): tpm :=evalf(8*10^(-3)
  : R := evalf(4*10^(-3)): t:= evalf(400 * 10^(-9)): pi
  := 3.14159265358979323846:
```

-----  
zunächst werden die Werte I und B für die Messungen mit langen Wartezeiten  
berechnet

I berechnen

```
> integrale := seq (evalf(Integral(i)), i=10^(-3)..20*10
  (-3), 10^(-3)):
```

B-Feld im Mittelpunkt der Scheibe berechnen

```
> felder := seq (evalf(Baxis(i)), i=10^(-3)..20*10^(-3),
  10^(-3)):
```

Werte für den langsamen Lauf in eine Datei exportieren

```
> tabelle := [integrale, felder]:
> writedata("M 15 08 1 langsam.txt", tabelle, float);
```

-----  
nun werden I und B für die Messungen mit den kurzen Wartezeiten berechnet  
I berechnen

```
> integrale1 := seq (evalf(Integral(i)), i=20.5*10(-3) .
.30*10(-3), 5*10(-4)):
> integrale2 := seq (evalf(Integral(i)), i=10(-3) .. 20*10(-3),
2.5*10(-4)):
```

B-Feld im Mittelpunkt der Scheibe berechnen

```
> felder1 := seq (evalf(Baxis(i)), i= 20.5*10(-3) .. 30*10(-3),
5*10(-4)):
> felder2 := seq (evalf(Baxis(i)), i= 10(-3) .. 20*10(-3),
2.5*10(-4)):
```

I und Felder in Listen zusammenfassen und brauchbar sortieren

```
> listint := [integrale2, integrale1]:
> listfelder := [felder2, felder1]:
> listintgedreht := []: listfeldergedreht:=[]:
> for i from 1 by 1 to 97
do
    listintgedreht := [op(listintgedreht), listint[98-i]]:
    listfeldergedreht := [op(listfeldergedreht),
listfelder[98-i]]
od:
```

Werte für den schnellen Lauf in eine Datei exportieren

```
> writedata("M 15 08 1 schnell I.txt", listintgedreht,
float);
> writedata("M 15 08 1 schnell Felder.txt",
listfeldergedreht, float);
```

-----  
Für den Magneten M 20 05 1

```
> Brem := 1.14: Rpm:=10*10(-3): tpm :=evalf(5*10(-3)):
R := evalf(4*10(-3)): t:= evalf(400 * 10(-9)): pi :=
3.14159265358979323846:
```

-----  
zunächst werden die Werte I und B für die Messungen mit langen Wartezeiten  
berechnet

I berechnen

```
> integrale := seq (evalf(Integral(i)), i=10(-3) .. 20*10(-3)(
-3), 10(-3)):
```

B-Feld im Mittelpunkt der Scheibe berechnen

```
> felder := seq (evalf(Baxis(i)), i=10(-3) .. 20*10(-3),
```

```
10^(-3)) :
```

Werte für den langsamen Lauf in eine Datei exportieren

```
> tabelle := [integrale,felder]:
> writedata("M 20 05 1 langsam.txt",tabelle,float):
```

-----  
 nun werden I und B für die Messungen mit den kurzen Wartezeiten berechnet  
 I berechnen

```
> integrale1 := seq (evalf(Integral(i)),i=20.5*10^(-3) .
.30*10^(-3),5*10^(-4)) :
> integrale2 := seq (evalf(Integral(i)),i=10^(-3)..20*10^
(-3),2.5*10^(-4)) :
```

B-Feld im Mittelpunkt der Scheibe berechnen

```
> felder1 := seq (evalf(Baxis(i)),i=20.5*10^(-3)..30*10^(-
3), 5* 10^(-4)) :
> felder2 := seq (evalf(Baxis(i)),i= 10^(-3)..20*10^(-
3),2.5*10^(-4)) :
```

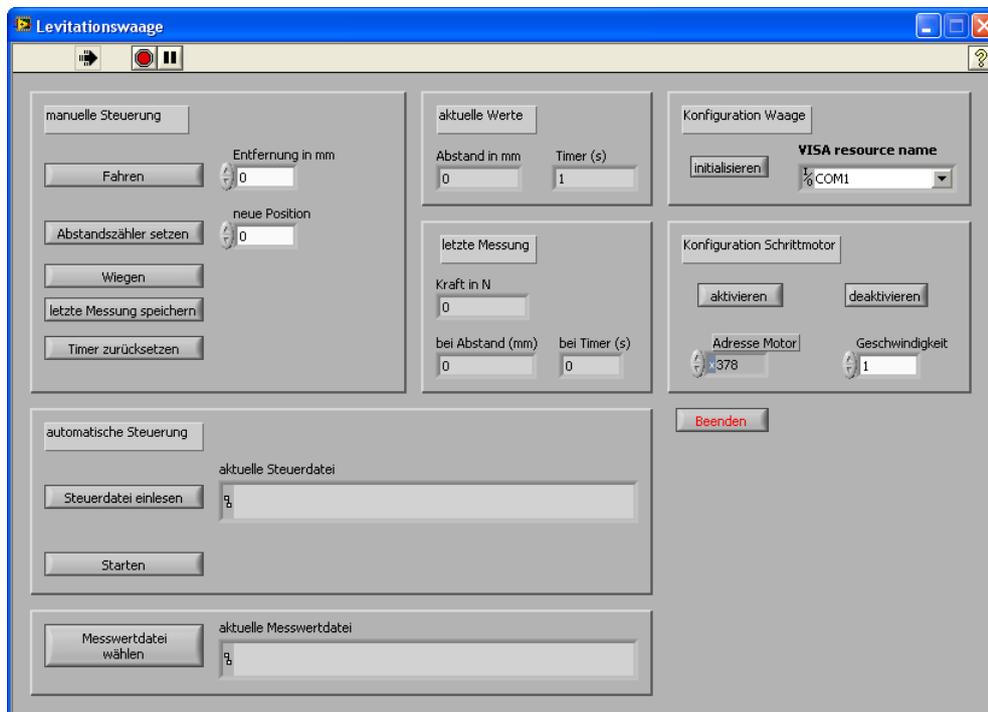
I und Felder in Listen zusammenfassen und brauchbar sortieren

```
> listint := [integrale2,integrale1]:
> listfelder := [felder2,felder1]:
> listintgedreht := []: listfeldergedreht:=[]:
> for i from 1 by 1 to 97
do
  listintgedreht := [op(listintgedreht),listint[98-i]]:
  listfeldergedreht := [op(listfeldergedreht),
listfelder[98-i]]
od:
```

Werte für den schnellen Lauf in eine Datei exportieren

```
> writedata("M 20 05 1 schnell I.txt",listintgedreht,
float):
> writedata("M 20 05 1 schnell Felder.txt",
listfeldergedreht,float):
```

## Graphische Oberfläche der Steuerungssoftware



**Abb. 2** Screenshot von der graphischen Oberfläche der Steuerungssoftware.

Die graphische Benutzeroberfläche (Graphical User Interface, GUI) der Software ist in Abbildung 2 dargestellt. Der Versuchsaufbau kann manuell oder automatisch gesteuert werden. Die manuelle Steuerung dient insbesondere dazu, den Aufbau auf den nächsten Versuch vorzubereiten. Über den Button „Messwertdatei wählen“ kann eine Datei angelegt werden, in die sowohl die manuelle also auch die automatische Steuerung die Messwerte schreiben. Das Panel „aktuelle Werte“ zeigt die aktuelle Position des Schrittmotors und den aktuellen Stand des Timers an. Das Panel „letzte Messung“ zeigt die zuletzt gemessene Kraft zusammen mit der Position und dem Stand des Timers, an dem die Messung durchgeführt wurde, an.

Die automatische Steuerung arbeitet die Befehle einer Steuerdatei ab, die über den Button „Steuerdatei einlesen“ geladen werden kann. In jeder Zeile kann maximal ein Befehl stehen. Manche Befehle können einen Parameter haben, der nach einem Tabulator auf den Befehl folgt. Es können folgende Befehle verwendet werden:

- timer0: setzt den Timer zurück.
- fahre: fährt den Probenhalter um die im Parameter angegebene Entfernung. Die Entfernung muss in mm angegeben werden. Bei positiven Angaben fährt der Probenhalter nach unten, bei negativen nach oben.
- messe: misst die Kraft und schreibt sie zusammen mit der aktuellen Position und dem aktuellen Stand des Timers in die Messwertdatei.
- warte: wartet die Dauer, die als Parameter angegeben ist (in ms).

Hat eine Zeile nicht das Format eines Befehls, so wird sie ignoriert. Dies kann für Kommentare genutzt werden.

Die Waage wird über die serielle Schnittstelle (RS232) angesprochen. Sind mehrere serielle Schnittstellen am Computer vorhanden, so kann über das Eingabefeld „VISA resource name“ die richtige Schnittstelle gewählt werden. Die Schrittmotorsteuerung wird über den Parallelport angesprochen. In dem Eingabefeld „Adresse“ muss die Registeradresse des Parallelports, die im Windows-Geräte-Manager in Erfahrung gebracht werden kann, eingetragen werden.

Sowohl die serielle als auch die parallele Schnittstelle sind heute veraltet und nicht mehr in jedem PC anzutreffen. Es gibt jedoch günstige PCI-Karten oder USB-Adapter, die diese Schnittstellen bereitstellen, sodass die Software auch mit neuen PCs verwendet werden kann. Der Vorteil dieser Schnittstellen liegt darin, dass sie sehr leicht programmiert werden können. Außerdem hätte man bei der Schrittmotorsteuerung einen wesentlich größeren Schaltungsaufwand benötigt, wenn man sie über neuere Schnittstellen wie zum Beispiel USB realisiert hätte.

## Quelltext in DLL

Um in Origin mit der Modellfunktion `fit` zu können, wurde eine DLL programmiert, die von Origin aufgerufen werden kann. Dazu wurde das mit Origin mitgelieferte Beispiel `\samples\Curve Fitting\FittingWithExternalDLL.opx` um die Funktion „Kraft-ZweiPM“ erweitert. Alle Dateien, die zu dem Beispielprojekt hinzugefügt oder geändert werden mussten, sind im Folgenden gelistet:

Listing FitFuncs.c

```
#include <windows.h>
#include <math.h>
#include "FitFuncDef.h"
#include "romberg.h"

// Konstanten
const double pi=3.141592653589793;
const double m0=1.256637061435917e-6; // Permeabilität des
    Vakuums

// Funktionen, die von KraftZweiPM gebrauch twerden
//
//                               Funktion Integrand
double integrand(double phi, double *p) {
    double c,d,e;
    c=sqrt(pow(p[1],2) + pow(p[2],2) - 2 * p[1] * p[2] * cos
        (phi));
    d = (p[0] + p[3] + sqrt(pow(c,2) + pow((p[0]+p[3]),2)))
        / (p[0] + sqrt(pow(c,2) + pow(p[0],2)));
    e = (p[0] + p[4] + sqrt(pow(c,2) + pow((p[0]+p[4]),2)))
        / (p[0] + p[3] + p[4] + sqrt(pow(c,2) + pow((p[0]+p
        [3]+p[4]),2)));
    return cos(phi) * log(d*e);
}
```

```

}

// meine Fit-funktion
int FAR PASCAL KraftZweiPM(FIT_PARA_LIST)
{
// Parameters
#define B          p[1]          // Remanenz beider PM's
// Independent Variables
#define h          x[1];        // Abstand zwischen den
    PM's
    if ( HAS_FUNC_DERIV )
    {
        return NONE;
    }
    if ( GET_FUNC_VALUE )
    {
        double ParamRom[5];
        ParamRom[0] = h;
        ParamRom[1] = p[2];      //a
        ParamRom[2] = p[3];      //b
        ParamRom[3] = p[4];      //ta
        ParamRom[4] = p[5];      //tb
        // Modellfunktion berechnen
        y[1] = 0.5 * B * B * (1/m0) * p[2] * p[3] *
            Romberg(integrand, ParamRom, 0, 2*pi,
                0.000000001);
        if ( MATH_ERR )
        {
            RETURN_ERR;
        }
        return 0;
    }
    return 0;
#undef k
#undef h

```

Listing: FitFuncs.def

```
LIBRARY    FitFuncs
HEAPSIZE  1024
EXPORTS
    KraftZweiPM                @50
```

Listing B.3: romberg.h

```
#pragma once
typedef double (*funktionstyp) (double, double *);
double Romberg
    (funktionstyp f,
     double * params,
     double ugrenze,
     double ogrenze,
     double epsilon);
```

Listing B.4: romberg.c

```
#include "romberg.h"

double h(int i, double ugrenze, double ogrenze) {
    return (ogrenze - ugrenze) / pow(2.0, i);
}

double Romberg (funktionstyp f, double * params, double ugrenze,
               double ogrenze, double epsilon) {
    int i = 1;
    double T[100][100]; // Array für das Rombergschema

    //Berechne T[0][0]
    T[0][0] = (ogrenze - ugrenze) / 2 * (f(ogrenze, params)
        + f(ugrenze, params));

    //Hauptschleife über der Variablen i
```

```

do {
    //Berechne T[i][0]
    double zwsumme = 0;
    int n;
    int j = 0; int k=1;
    n = (int)pow(2.0, i-1);
    for (j = 0; j<n; j++){
        zwsumme += f(ugrenze + h(i-1,ugrenze,
            ogrenze)/2 + j*h(i-1,ugrenze, ogrenze
            ), params);
    }
    T[i][0] = 0.5*T[i-1][0] + h(i-1,ugrenze, ogrenze)
        /2 * zwsumme;
    //Berechne alle T[i][1] bis T[i][k=i]
    for (k=1; k<i+1; k++) {
        T[i][k] = T[i][k-1] + (T[i][k-1] - T[i-1][k-1]) / (pow(4.0, k) - 1);
    }
    i++;
} while ( fabs(T[i-1][i-1] - T[i-1][i-2]) > epsilon );
//solange wiederholen bis die gewünschte Genauigkeit
erreicht ist
return T[i-1][i-1];

```

### Literatur

- [1] A. Riise et al., Phys. Rev. B **1999**, *60*, 9855.
- [2] Y. B. Kim et al., Phys. Rev. Lett. **1962**, *9*, 306.
- [3] Y. Yeshurun et al., Rev. Mod. Phys. **1996**, *68*, 911.
- [4] M. Koblischka, Magnetic Properties of High-Temperature Superconductors, Alpha Science, Oxford, 2009.