Eine Anwendung der Hilbert-Transformation

HEINZ KRENN

Dieses Dokument ist eine Ergänzung zum Artikel „Diskrete Physik und schnelle Transformationen" in **Physik in unserer Zeit**, 43. Jahrgang 2012, Nr. 5, S. 236.

Zweidimensionale Magnetisierungsstruktur

Die Hilbert-Transformation ist viel allgemeiner anwendbar und nicht auf kausale Systeme alleine beschränkt. Als Beispiel wollen wir die Magnetfeldstärke $\boldsymbol{H} = (H_x, H_y)$ einer zweidimensionalen Magnetisierungsstruktur berechnen (Abbildung 1 Mitte). Sie könnte etwa auf einer magnetischen Speicherplatte eine Spur mit in Spurrichtung verschieden langen Bits sein, angedeutet durch die Länge der N-S-Magnetpole. Die „Breite" der Spur läuft unendlich weit in die Zeichenebene hinein und aus ihr heraus. Im Raum oberhalb und unterhalb der magnetischen Spur fallen die Magnetfelder exponentiell ab [1].

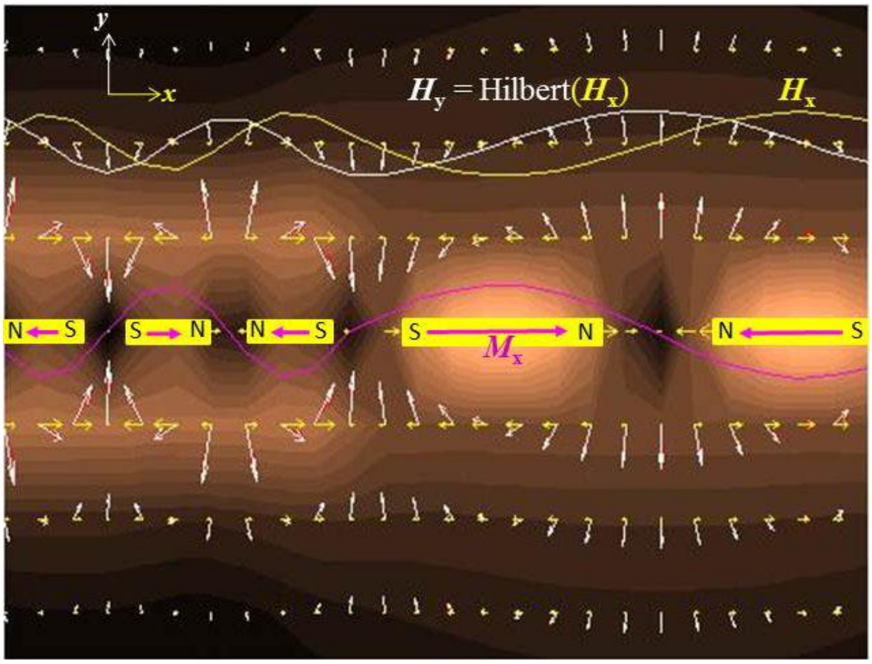

Abb. 1 *Schnittbild der Magnetfeldstärke im Außenfeld einer zweidimensionalen Magnetisierungsspur. Die eingezeichneten Magnetpole erzeugen Quellen und Senken des Magnetfeldes, das exponentiell nach oben und unten abfällt. Ist längs einer Zeile die x-Komponente des Magnetfeldes bekannt (gelbe Kurve), so kann man durch Hilbert-Transformation die y-Komponente (weiße Kurve) berechnen.*

Die rechteckförmige Magnetisierungsstruktur und die daraus entspringenden Magnetfelder können wir durch Fourier-Synthese in harmonische Wellen mit einer Grundwelle $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ und deren Oberwellen $\pm n \cdot k_0$ (n = 1, 2,..) zusammensetzen. Für jede können wir jeweils ein harmonisches magnetostatisches Potential

$$\Phi(\pm n \cdot k_0, x, y) = A \cdot \exp[-\mathrm{sign}(\pm n \cdot k_0 y) \pm i \cdot n \cdot k_0 x]$$

hinschreiben, wobei x und y die Ortskoordinaten in der Bildebene sind und A eine Konstante ist. Die sign-Funktion ist ±1, je nach Vorzeichen ihres Arguments.

Dieser Ansatz gehorcht der Laplace-Gleichung

$$\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2 = 0$$

im freien Raum ($y \neq 0$). Diese Gleichung ist aus der Elektrostatik bekannt und beschreibt die Potentialverteilung im ladungsfreien Raum.

In der Magnetostatik gibt es nur magnetische Dipole. Man könnte folglich annehmen, dass die Gleichung überall, also wegen der „Ladungsfreiheit“ – Nordpole kompensieren Südpole – auch im magnetisierten Medium gilt. Dies ist in der Tat der Fall. Allerdings führt die Begrenzung des Magneten zu Polladungen an den Stirnflächen des Magneten. Das führt zu einer flächenhaften Verteilung von „magnetischen Ladungen“, die außerhalb der Gültigkeit der Laplace-Gleichung liegt und durch die Poisson-Gleichung berichtigt wird.

Da wir nur an der Potential- und Feldverteilung außerhalb der Polladungen interessiert sind, ist dies irrelevant. Allerdings müssen die Stetigkeitsbedingungen für die **B**- und **H**-Felder an der Polfläche des Magneten erfüllt sein, was zu einem Sprung der Normalkomponente von **H** (von $+H_n$ zu $-H_n$) bei Durchtritt durch die Polfläche führt. Die zugehörigen Magnetfeldkomponenten H_x, H_y gewinnt man durch Differentiation des Potentials:

$$H_x = -\partial \Phi / \partial x, \quad H_y = -\partial \Phi / \partial y.$$

Die Amplitude A passen wir nun durch die Stetigkeitsbedingung an das vorgegebene Magnetisierungsprofil $H_x(x, y = 0) = M(x, y = 0)$ für alle Oberwellen $\pm n \cdot k_0$ an. Durch Differentiation des Potential-Ansatzes lässt sich für die harmonischen orthogonalen Magnetfeldkomponenten eine allgemein gültige Beziehung zwischen den Komponenten des Magnetfeldes [1]

$H_y(\pm n \cdot k_0) = i \cdot \mathrm{sign}(\pm n \cdot k_0) \cdot H_x(\pm n \cdot k_0)$

ableiten. Nach „Hilbert-Transformation im Zeit- und Frequenzraum“ (Informationskasten im Artikel im Heft) ist dies gerade die Formulierung der Hilbert-Transformation im reziproken Raum. Also sind die Feldstärke-Komponenten zueinander Hilbert transformiert:

$H_y(x,y) = \mathrm{Hilbert}[(H_x(x,y)]$.

Dies bedeutet die Möglichkeit, aus Kenntnis einer Feldstärkekomponente, etwa $H_x(x,y)$, die dazu orthogonale Komponente $H_y(x,y)$ zu berechnen. Mit Hilfe von FFT gelingt dies auf rasche Weise. Abbildung 1 zeigt die Graphen $H_x(x)$, $H_y(x) = \mathrm{Hilbert}(H_x(x))$ längs einer horizontalen Zeile (y = const). Damit lassen sich in jedem Punkt des zweidimensionalen (x,y)-Raumes die Vektorpfeile der Feldstärke $\boldsymbol{H}$ bestimmen.

Es fällt auf, dass das Potential Φ und somit die Feldstärke $\boldsymbol{H}$ innerhalb einer Länge von $1/\, n \cdot k_0$ in vertikaler ($\pm y$-) Richtung exponentiell abfallen. Je kürzer periodisch die Magnetisierungsstruktur ist, umso steiler fällt das Magnetfeld nach außen ab. Das führt direkt zu den heutigen Anforderungen an die Speicherdichte in magnetischen Datenspeichern. Deswegen „fliegen“ die magnetischen Leseköpfe heutzutage nur noch wenige Nanometer über der Speicherplatte.

Literatur

[1] H. N. Bertram, Theory of Magnetic Recording, Cambridge University Press, Cambridge 1994.