

Abschätzungen über die beteiligten Energien

MICHAEL VOLLMER, KLAUS-PETER MÖLLMANN

Ergänzung zu dem Artikel „Prost Neujahr – die Physik von Champagnerflaschen“, erschienen in Physik in unserer Zeit **2012**, 43(6), 307.

Für adiabatische Prozesse gilt:

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const.}, \quad (1)$$

wobei $\kappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Für CO_2 bei Raumtemperatur (und auch leicht darunter) beträgt $\kappa \approx 1,30$. Ausgehend von $p_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $p_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ und $T_1 \approx 283 \text{ K}$ findet man für eine rein adiabatische Expansion nach (1) eine Endtemperatur $T_2 \approx 195 \text{ K}$ (circa -80 °C).

Dieser Wert erscheint sinnvoll und ist auch in Übereinstimmung mit Experimenten von ausströmendem CO_2 aus großen Stahlflaschen für technische Gase. Lässt man CO_2 über Reduzierventile mit einigen Atmosphären Überdruck aus Stahlflaschen ausströmen, so bildet sich häufig ohne weiteres Trockeneis, das bei Normaldruck erst bei Temperaturen unter -78,5 °C entsteht.

Um den Endzustand zu erreichen bei der Expansion wird Arbeit $\Delta W = p\Delta V$ geleistet, wobei sich das Gas abkühlt. Gemäß dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre ist die Änderung der inneren Energie ΔU des Gases gegeben durch

$$\Delta U = \delta Q - \Delta W, \quad (2)$$

wobei die ausgetauschte thermische Energie für den vorliegenden adiabatischen Prozess $\delta Q = 0$ ist. Gemäß Vorzeichenkonvention erhöht sich die innere Energie bei Kompression ($\Delta V < 0$), das heißt, wenn von außen Arbeit geleistet wird ($\Delta W < 0$). Im Fall der Expansion wird dem Gas innere Energie entzogen, wodurch sich das Gas abkühlt:

$$\Delta U = c_v m \Delta T. \quad (3)$$

Die Masse des Gases kann aus dem Gasvolumen in der Flasche abgeschätzt werden. Bei $V \approx 5 \text{ cm}^3$ und einer normalen Gasdichte des CO_2 von etwa $2 \text{ kg/m}^3 = 2 \text{ mg/cm}^3$ findet man bei Normaldruck $m \approx 10^{-2} \text{ g}$ (bei einigen Atmosphären Überdruck die entsprechend vielfache Menge). Die spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v beträgt bei Raumtemperatur um $0,65 \text{ J/(g}\cdot\text{K)}$. Bei $m = 10^{-2} \text{ g}$ ergibt sich mit der oben abgeschätzten Temperaturänderung $\Delta T \approx 90 \text{ K}$ für die Erniedrigung der inneren Energie des CO_2 $\Delta U \approx 0,59 \text{ J}$. Diese Energie steht für Abkühlung der Luft und Abtransport der Kondensationswärme zur Verfügung und begrenzt daher automatisch das Volumen der Wolke.

Als einfache Abschätzung nehmen wir an, dass die Raumluft von der Zimmertemperatur 20 °C bis zur Taupunkttemperatur abkühlt, bei 70 % relativer Feuchte sind dies $T_{\text{dp}} = 14,5 \text{ °C}$ entsprechend einer Lufttemperaturerniedrigung um $\Delta T_{\text{dp}} = 5,5 \text{ K}$. Bei Erreichen des Taupunkts setzt Kondensation ein, und die entsprechende latente Wärme muss abgeführt werden. Als grobe Näherung nehmen wir an, die gesamte zur Verfügung stehende Energie gehe über in thermische Energie ΔQ für Abkühlung der Luft mit nachfolgender vollständiger Kondensation des verfügbaren Wasserdampfs (dies ergibt eine Minimalabschätzung), das heißt

$$\Delta Q = c_{v,\text{air}} m_{\text{air}} \Delta T_{\text{dp}} + \lambda m_{\text{W}} \quad (4)$$

wobei $m_{\text{Luft}} = \rho_{\text{Luft}} V_{\text{Luft}}$ die Masse der Luft inklusive des Wasserdampfs im abgekühlten Volumen V_{Luft} ist und $m_{\text{W}} = \rho_{\text{W}} V_{\text{Luft}}$ die Masse des Wasserdampfs in dieser Luft. Für 70 % Luftfeuchte ist $\rho_{\text{W}} = 12,1 \text{ g/m}^3$. A ist die Kondensationswärme des Wassers von etwa 2250 kJ/kg. Aus (4) lässt sich das minimale Luftvolumen bestimmen, das mit der zur Verfügung stehenden Energie gekühlt werden kann um sodann eine Kondensationswolke zu bilden. Für die Energie von 0,59 J ($m \approx 10^{-2} \text{ g}$) findet man $V_{\text{Luft}} \approx 18 \text{ cm}^3$, für einen Überdruck von 4 Atmosphären etwa 72 cm^3 . Die Werte dieser Abschätzung lassen sich durch das Experiment grob bestätigen