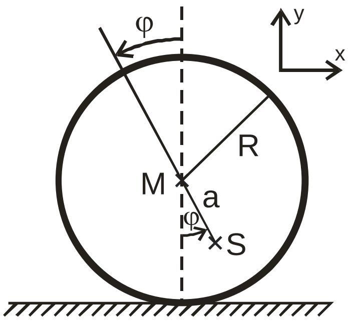
Rollpendel und Geruchsseife

CHRISTIAN UCKE | HANS JOACHIM SCHLICHTING

Dieses Dokument ist eine Ergänzung zum Artikel „Stehaufmännchen, Kolumbus-Eier und ein Gömböc“ in **Physik in unserer Zeit**, 44. Jahrgang 2013, Nr. 4, S. 190.

Bewegungsgleichung eines Rollpendels



Die folgende Herleitung stellte uns freundlicherweise Friedhelm Kuypers von der Hochschule Regensburg zur Verfügung. Sie ist aufgrund der Benutzung des Lagrange-Formalismus sehr kurz. Eine – längere –Herleitung ohne diesen Formalismus findet sich in dem Buch ‚Klassische Mechanik‘ von Walter Greiner.
Gegeben sei auf einer horizontalen Ebene ein Zylinder bzw. eine Kugel, deren Mittelpunkt und Schwerpunkt sich nur in einer Ebene bewegen. Der Schwerpunkt S liegt im Abstand a vom Mittelpunkt M der Kugel mit dem Radius R. Wird die Kugel um den Winkel φ ausgelenkt, rollt sie hin und her.
Für die Koordinaten des Schwerpunkts gilt:

$$x_S = -R\varphi + a\sin\varphi \quad und \quad y_S = -a\cos\varphi$$

bzw. $$\dot{x}_S = -R\dot{\varphi} + a\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{\varphi}\,(-R + a\cos\varphi) \quad und \quad \dot{y}_S = -\dot{\varphi}a\sin\varphi$$

Die kinetische Energie ergibt sich als Summe aus Rotationsenergie (I_S = Trägheitsmoment der Kugel um die Schwerpunktsachse) und Translationsenergie (m = Masse der Kugel)

$$T = \frac{I_S}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 - 2aR\dot{\varphi}^2\cos\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

Die potentielle Energie ist $V = -mga\cos\varphi$ (g = Erdbeschleunigung)

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L = T - V = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mga\cos\varphi$$

Die Bewegungsgleichung folgt aus $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Es ist $$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\dot\varphi$$

und $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = [I_S + m(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)]\ddot\varphi + 2aRm\sin\varphi \cdot \dot\varphi^2$$

und $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = maR\sin\varphi \cdot \dot\varphi^2 - mga\sin\varphi$$

Damit lautet die exakte Bewegungsgleichung

$$\left[I_S + m\left(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi\right)\right]\ddot\varphi + maR\sin\varphi \cdot \dot\varphi^2 + mga\sin\varphi = 0$$

Eine explizite Lösung existiert nicht. Numerisch lässt sich diese Differenzialgleichung mittels Programmen wie Mathematica, Matlab o. ä. berechnen.

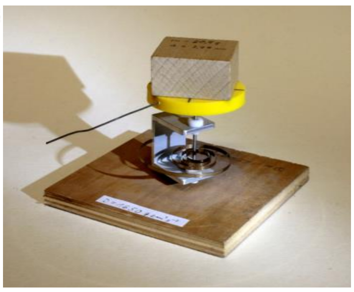
Für kleine Winkel φ ergibt sich die Näherung

$$[I_S + m(R-a)^2]\ddot\varphi + mga\varphi = 0$$

Daraus folgt für die Schwingungsdauer T für kleine Winkel φ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_S + m(R-a)^2}{mga}}$$

Trägheitsmoment und Schwingungsdauer der Geruchseife


Vorhanden ein kleiner Drehteller mit Drillfeder. Bestimmung dessen Winkelrichtgröße D des Drehtellers mit der Formel

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$ I_0 = Trägheitsmoment Drehteller; T_0 = 0,8s

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}}$ I_1 = Trägheitsmoment bekannter Körper,

z. B. Quader bezüglich Achse durch die Mitte.

Daraus folgt mit $I_1 = \frac{ma^2}{6}$ Trägheitsmoment gleichseitiger Quader
(m = 20,9g; a = 3,98cm; T_1 = 1,4s)

$$D = \frac{4\pi^2 I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2 - T_0^2} \cdot \frac{ma^2}{6} = \frac{4\pi^2}{1{,}4^2 s^2 - 0{,}8^2 s^2} \cdot \frac{20{,}9g \cdot 3{,}98^2 cm^2}{6} = 1650 gcm^2 s^{-2}$$

und

$$I_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2} D = 27 gcm^2$$

Die Geruchseife wird mit dem Schwerpunkt zentriert auf die Achse des Drehtellers positioniert.

Aus

$$T_G = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_G}{D}}$$ folgt mit T_G = 3,4s

$$I_G = \frac{T_G^2}{4\pi^2} D - I_0 = \frac{3{,}4^2 s^2 \cdot 1650 gcm^2 s^2}{4\pi^2} - 27 gcm^2 = 483 gcm^2 - 27 gcm^2 = 456 gcm^2$$

Für die Schwingungsdauer T eines Objektes auf einer horizontalen Ebene gilt für kleine Winkel

$$T_{theor} = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + m_G (R-a)^2}{m_G \cdot g \cdot a}} = 2\pi \sqrt{\frac{456 gcm^2 + 129g(2{,}325cm - 0{,}425cm)^2}{129g \cdot 1000 cms^{-2} \cdot 0{,}425cm}} = 0{,}815s$$

Gemessen wurde aus einem Video T_{exp} = 0,83s, d.h. im Rahmen üblicher Messunsicherheiten eine sehr gute Übereinstimmung.

Bei einem Winkel von 70° ergibt die Berechnung mit der exakten Differenzialgleichung mit Mathematica T_{theor} = 0,94s. Experimentell ergibt sich T_{exp} = 0,91s.

Die Nichtlinearität eines solchen Rollpendels ist größer als bei einem Fadenpendel! Rollpendel $T_{70°}/T_{1°}$ = 1,15; Fadenpendel $T_{70°}/T_{1°}$ = 1,10.