Quantitative Analyse der rotierenden Wippe

HANS JOACHIM SCHLICHTING | CHRISTIAN UCKE

Ergänzung zu dem Artikel Manchmal hilft nur Trägheit von H. Joachim Schlichting und Christian Ucke, Physik in unserer Zeit **2013**, *44*(5), 240.

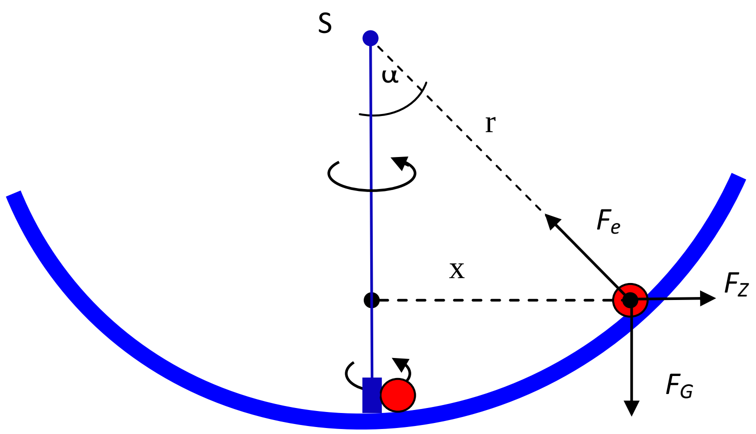

Abb. 1 ***Schnitt durch die rotierende Wippe. Dynamisches Gleichgewicht zwischen den Kräften.***

Wenn man davon ausgeht, dass die Kugel der Masse m reibungsfrei in einer kreisförmigen Wippe mit dem Radius r gleitet (Abbildung 1), dann wird die in tangentialer Richtung wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$, die die Kugel an der Wand der Wippe hochtreibt, betragsmäßig beschrieben durch:

$$F = m \cdot r \cdot \ddot{\alpha} = F_{gt} - F_{zt} \text{ mit } F_{gt} = F_g \sin\alpha\,,\; F_{zt} = F_z \cos\alpha\,, F_g = mg \text{ und } F_z = m \cdot \omega^2 x$$

Dabei sind $\ddot{\alpha}$ die Winkelbeschleunigung, r der Radius der Wippe, m die Masse der Kugel g = 9,81 m/s^2 die Erdbeschleunigung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Wippe und $x = r \cdot \sin\alpha$ der Abstand der Kugel von der Drehachse. F_{gt} ist die Tangentialkomponente der Gewichtskraft F_g und F_{zt} ist die Tangentialkomponente der Zentrifugalkraft F_z.
Durch Einsetzung erhält man:

$$F = m \cdot r \cdot \ddot{\alpha} = mg\sin\alpha - m \cdot \omega^2 r \sin\alpha \cos\alpha\,. \tag{1}$$

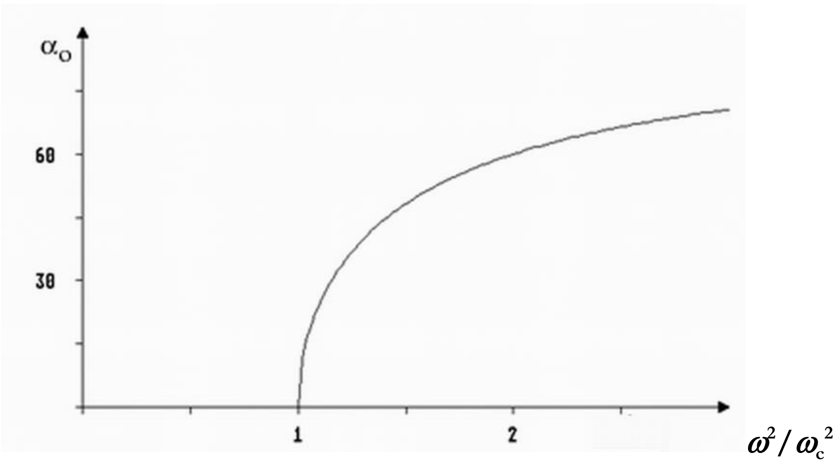

Abb. 2 ***Der Gleichgewichtswinkel α_0 der Wippe als Funktion des Quadrats der Drehgeschwindigkeit ω^2 in Einheiten von ω_c^2.***

Im dynamischen Gleichgewichtszustand (konstante Drehgeschwindigkeit) verschwindet $\boldsymbol{F}$. Daraus lässt sich der jeweilige Gleichgewichtswinkel der Kugel bestimmen. Setzt man in (1) $\boldsymbol{F} = 0$ und löst nach α auf, so ergibt sich (Abbildung 2):

$$\alpha = \pm\, \alpha_0 = \arccos(g/r\omega^2). \qquad (2)$$

Für $\boldsymbol{\omega} < \boldsymbol{\omega}_c$ erhält man als Lösungen:

$\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$.

Im Falle $\alpha = 0$ befindet sich das System im Minimum. Der durch $\alpha = \pi$ gegebene Gleichgewichtszustand kann von unserer Kugel natürlich nicht eingenommen werden. Wie wir uns bereits qualitativ klargemacht haben, kann das Minimum nur verlassen werden, wenn die Kugel zumindest ein kleines Stückchen aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wird und die Winkelgeschwindigkeit den kritischen Wert

$$\omega_c = \sqrt{g/r}$$

überschreitet. Dieser Wert folgt aus (2) aus der Bedingung $\alpha_0 = \arccos 1 = 0$. Nur für größere Werte von ω ergibt sich für die Arccos-Funktion für α_0 ein endlicher Wert.

Da die Kugel im Prinzip ihren stationären Gleichgewichtszustand an einer der beiden gewölbten Wände annehmen kann, resultieren jeweils zwei symmetrische Lösungen: $\pm\alpha$.

Multipliziert man die Bewegungsgleichung mit $\dot{\alpha}$, so folgt:

$$F\,\dot{\alpha} = mr\,\ddot{\alpha}\,\dot{\alpha} = mg\,\sin\alpha\,\dot{\alpha} - m\omega^2 r\,\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\alpha}\,.$$

Schreibt man die Ausdrücke als zeitliche Ableitung des Integrals, so kommt man zur Energiebilanzgleichung des Systems:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\sin^2\alpha - 1\right) = 0.$$

Um dimensionslose Einheiten zu erhalten, wurde durch *mr* und ω_c^2 dividiert. Man erkennt in der ersten Klammer einen Ausdruck für die kinetische Energie. Der zweite Klammerausdruck ist die (effektive) potentielle Energie bzw. das Potential *U*:

$$U = 1 - \cos\alpha - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\sin^2\alpha\,.$$

Die frei verfügbare Integrationskonstante wurde 1 gesetzt, damit das Minimum des Potentials bei $\alpha = 0$ liegt. An der Kurvenschar (Abbildung 3) ersieht man, dass *U* für $\omega \leq \omega_c$ ein Minimum bei $\alpha = 0$ besitzt: Die Kugel bleibt dann in Ruhe. Erst für $\omega > \omega_c$ bilden sich plötzlich zwei Minima aus, in die die Kugel „hineinrollt“. Welche Seite sie wählt, bleibt dem Zufall überlassen.

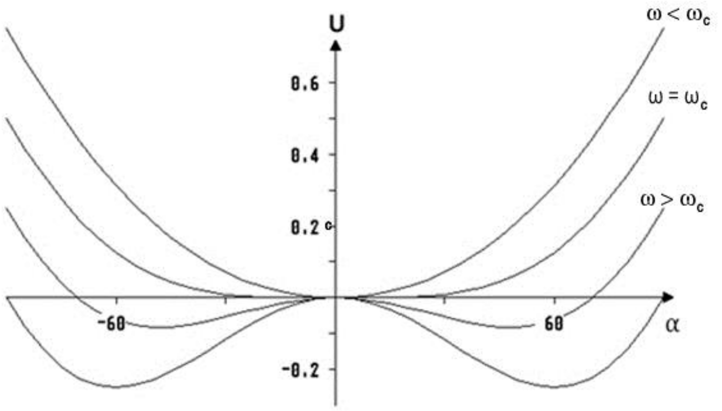

Abb. 3 ***Effektives Potential U der Kugelwippe als Funktion der Auslenkung α für (von oben nach unten) zunehmende Drehgeschwindigkeiten. Das Potential zeigt, welche Auslenkungswinkel die Kugel bei gegebenen Drehgeschwindigkeiten annimmt. Bei der kritischen Drehgeschwindigkeit ω_c wird die Symmetrie gebrochen. Bei höheren Geschwindigkeiten entstehen zwei Minima.***