Die sprudelnde Kettenfontäne

HANS JOACHIM SCHLICHTING | CHRISTIAN UCKE

Ergänzung zu dem Artikel „Die rätselhafte Kettenfontäne" von H. Joachim Schlichting und Christian Ucke, Physik in unserer Zeit **2014**, *45*(5), 234.

Quantitative Überlegungen zum Modell der Kettenfontäne

Die folgenden quantitativen Abschätzungen orientieren sich an [1]. Wir gehen von einer Kugelkette mit einer Massenbelegung (Masse pro Einheitslänge) λ aus. Die Kette erhebt sich im stationären Zustand mit der Geschwindigkeit v um die Höhe h_1 über den Kettenhaufen im Becher und fällt dann die Strecke $h_1 + h_2$ hinab zum Boden (Abbildung 1).

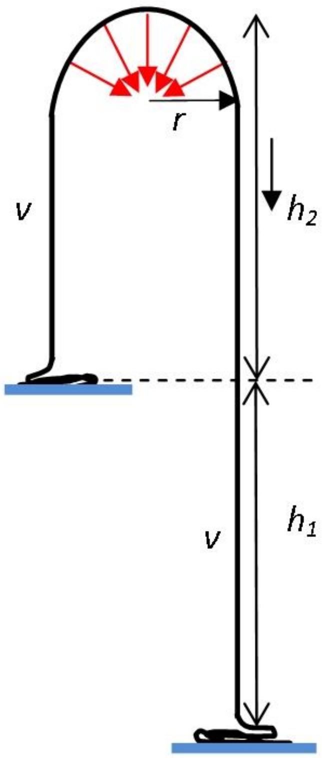

Abb. 1 ***Physikalische Größen bei einer stationären Fontäne.***

Die Bewegungsumkehr vollzieht sich innerhalb eines Bogens mit dem Krümmungsradius r. Wenn man davon ausgeht, dass die Zentripetalbeschleunigung im oberen, gekrümmten Teil der Kette wesentlich größer ist als die Erdbeschleunigung, so dass diese vernachlässigt werden kann, gilt für die Kraft pro Einheitslänge der Kette, also für die Spannung T_k, in der Kurve:

$$\frac{T_\mathrm{k}}{r} = \frac{\lambda v^2}{r} \quad .$$

Daraus folgt:

$$T_{\mathrm{k}} = \lambda v^2. \qquad (1)$$

Die Kraft beziehungsweise Spannung T_{k} ist also unabhängig von der Krümmung, und die Bewegungsfigur der Kette kann daher beliebige Formen annehmen, solange die Gleichung (1) erfüllt ist. Da das „Fließen" der Kette mit konstanter Geschwindigkeit v erfolgt, müssen sich die Kräfte beziehungsweise Spannungen in den Kettengliedern vertikal über dem Kettenhaufen im Gefäß aufheben. Die Spannung T_{k} ist daher gleich der Summe der Spannung in der Kette genau oberhalb des Kettenhaufens im Gefäß, T_{G}, plus der durch die Schwere der Kette gegebenen Spannung:

$$T_{\mathrm{k}} = T_{\mathrm{G}} + \lambda h_2 g\,. \qquad (2)$$

Auf entsprechende Weise gilt für die Spannung T_{k} im vertikal über dem Kettenhaufen auf dem Boden befindlichen Teil der Kette:

$$T_{\mathrm{k}} = T_{\mathrm{B}} + \lambda(h_1 + h_2)g. \qquad (3)$$

Dabei bezeichnet T_{B} die Spannung in der Kette direkt über dem Kettenhaufen auf dem Boden. Im Zeitintervall Δt nimmt die über dem Kettenhaufen im Gefäß aufsteigende Kette eine Masse von $\lambda\, v\, \Delta t$ und damit einen Impuls von $\lambda\, v^2\, \Delta t$ auf. Im Falle einer normalen Kette würde man erwarten, dass dieser Impuls von der Spannung T_{G} in der Kette aufgebracht wird. Wie man den Gleichungen (1) und (2) entnimmt, hieße das im vorliegenden Fall:

$$h_2 = 0.$$

Die Kette würde sich also nicht über den Rand des Bechers erheben. Und da die Kette am anderen Ende durch den Boden zur Ruhe gebracht wird, geht man normalerweise davon aus, dass der Boden den entsprechenden Impuls aufbringt, womit $T_{\mathrm{B}} = 0$ wäre. Ein Vergleich von Gleichungen (1) und (3) führt dann zu dem Ergebnis, dass die Geschwindigkeit der Kette nur von der Höhendifferenz h_1 beider Haufen abhängt:

$$v = \sqrt{h_1 g}.$$

Aus energetischer Sicht ergibt sich, dass pro Einheitslänge der Kette eine potentielle Energie von $\lambda g h_1$ abgegeben wird, aber nur zu einer kinetischen Energie pro Einheitslänge von

$$\frac{1}{2}\lambda v^2 = \frac{1}{2}\lambda h_1 g$$

führt. Die Hälfte der Energie geht also durch Dissipationsvorgänge verloren. Dieses Problem kennt man aber aus anderen Zusammenhängen [1].

Im Falle der Kettenfontäne, bei der $h_2 > 0$, folgt aber, dass $T_{\mathrm{G}} < \lambda v^2$. Die Spannung in der Kette vermittelt also nicht den gesamten Impuls in der aufsteigenden Kette. Für den restlichen Teil ist eine aufwärts gerichtete Kraft pro Kettenlänge T_{R} verantwortlich. Das ist die Spannung, die Kettenelemente erfahren, wenn ihr hinterer Teil beim Aufsteigen mit dem Untergrund kollidiert. Der fehlende Impuls wird also vom Behälter aufgebracht. Insgesamt gilt somit:

$$T_G + T_R = \lambda v^2.$$

Aus Dimensionsgründen sind alle Kräfte und Spannungen proportional zu λv^2, sodass

$T_\mathrm{G} = \alpha\lambda v^2$ und $T_\mathrm{R} = \beta\lambda v^2$.

Aus den obigen Gleichungen folgen nunmehr

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)}$ und $v = \frac{h_1 g}{(1-\alpha-\beta)}$.

Daraus folgt für die Kugelkette, dass $h_2 \sim h_1$, was wir durch unsere Messergebnisse bestätigen können.

Das Verhältnis aus kinetischer und potentieller Energie beträgt demnach:

$$\frac{E_\mathrm{kin}}{E_\mathrm{pot}} = \frac{v^2}{2gh_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\alpha-\beta)}. \qquad (4)$$

Daraus folgt der Fall der normalen Kette, wenn man $\alpha = \beta = 1$ setzt:

$$\frac{E_\mathrm{kin}}{E_\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}.$$

Die Hälfte der potentiellen Energie wird während des Vorgangs dissipiert. Aus Gründen der Energieerhaltung kann das Verhältnis der Energien in Gleichung (4) nicht größer als 1 werden. Daraus folgt

$$\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}.$$

Die höchste Fontäne würde auftreten, wenn

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ und } \beta = 0.$$

Dann wäre $h_1 = h_2$ mit der Folge, dass überhaupt keine Energie dissipiert würde. Die Realität ist meist weit entfernt von diesem Ideal. Aus unseren Messergebnissen folgt beispielsweise

$$h_2 \approx 0{,}13\, h_1.$$

Literatur

[1] J. S. Biggins, M. Warner, Proc. R. Soc. A **2014**, *470*, 1. arxiv.org/pdf/1310.4056.pdf