Theorie zum Bierdeckelsalto

FRIEDHELM KUYPERS | CHRISTIAN UCKE

Dieses Dokument ist Zusatzmaterial zum Artikel „Bierdeckelsalto“, erschienen in Physik in unserer Zeit **2015**, *46*(4), 194.

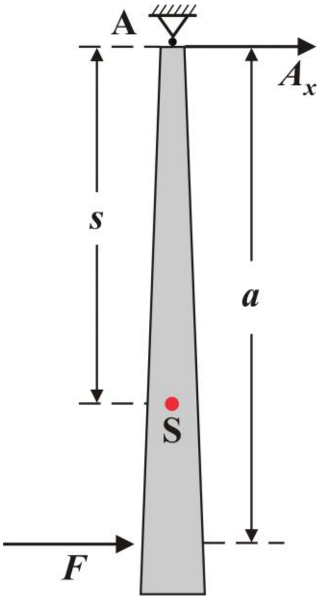

Abb. 1 ***Ein kurzer Kraftstoß wirkt auf den hängenden Stab. Das Lager A übt während des Stoßes auf den Stab die horizontale Kraft A_x aus.***

Betrachten wir zunächst das vergleichbare System in Abbildung 1: Auf einen Stab, der im Drehgelenk A ruhend aufgehängt ist, wirkt ein kurzer horizontaler Stoß. Während des Stoßes übt das Lager die Kraft A_x auf den Stab aus. Das Vorzeichen von A_x wird erst in Gleichung (4) bestimmt.

Das zweite Newtonsche Axiom $F(t) = \dot{p}(t)$ führt nach einer Integration über die Zeit auf

$$\hat{F} := \int_0^t F(t')\,dt' = \int_0^t \dot{p}(t')\,dt' = p(t) - p(0)$$

Demnach ist das Zeitintegral $\hat{F}$ der Kraft – „Kraftstoß“ oder „Stoßkraft“ genannt – gleich der Impulsänderung.

Nach Abbildung 1 liefert die Zeitintegration des Schwerpunktsatzes:

$$\int_0^T \left[F(t) + A_x(t)\right] dt = \hat{F} + \hat{A}_x = m\,v_S \qquad (1)$$

mit v_S = Schwerpunktgeschwindigkeit direkt nach dem Schlag
T = Stoßdauer.

In gleicher Weise liefert die Zeitintegration des Drehimpulssatzes:

$$I_S\,\omega = (a-s)\int_0^T F(t)\,dt - s\int_0^T A_x(t)\,dt$$

$$I_S\,\omega = (a-s)\hat{F} - s\hat{A}_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gl.(1)}}}{=} a\hat{F} - s m v_S \tag{2}$$

mit ω = Winkelgeschwindigkeit des Stabes unmittelbar nach dem Kraftstoß
I_S = Trägheitsmoment des Stabes für Drehungen um den Schwerpunkt.

Zusammen mit der kinematischen Beziehung

$$v_S = s\,\omega \tag{3}$$

haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten v_S, ω, $\hat{A}_x$. Mit dem Steinerschen Satz folgt:

$$\hat{A}_x = m v_S\left(1-\frac{I_S}{m a s}-\frac{s}{a}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ I_A = I_S + m s^2}}{=} m v_S\left(1-\frac{I_A}{m a s}\right). \tag{4}$$

Folglich ist die Lagerkraft A_x genau dann Null, wenn

$$a = \frac{I_A}{m s} =: a_{\text{krit}}\,. \tag{5}$$

Der Angriffspunkt des Kraftstoßes $\hat{F}$, für den die Lagerkraft A_x verschwindet, heißt im Maschinenbau „Stoßmittelpunkt“. Wird ein drehbar gelagerter Körper in diesem Punkt geschlagen, so treten im Lager A keine zusätzlichen Kräfte auf. Beim Hammer und beim Tennisschläger werden die Griffe so geformt, dass beim Schlagen möglichst geringe Stoßkräfte in der Hand auftreten. Lager in Maschinen werden so konstruiert, dass Stöße keine Lagerreaktionen verursachen. Wenn der Stab in Abb. 1 frei pendelt, so ist die Länge a_{krit} die reduzierte Pendellänge.

Für $a > a_{\text{krit}}$ bzw. $a < a_{\text{krit}}$ ist $A_x > 0$ bzw. $A_x < 0$, d. h. das Lager in Abbildung 1 übt eine Kraft nach rechts bzw. nach links auf den hängenden Stab aus.

Wir kommen nun auf den dünnen Bierdeckel an der Tischkante zurück. Da der Tisch in Punkt A (siehe Abb. 1) nur eine Kraft nach oben ausüben kann, folgt aus den vorangehenden Rechnungen mit $s = l/2$ sofort:

Für $a < a_{\text{krit}} = \dfrac{2 I_A}{m l}$ *hebt der Bierdeckel sofort vollständig von der Tischplatte ab.*

Für $a > a_{\text{krit}} = \dfrac{2 I_A}{m l}$ *bleibt der linke Rand des Deckels anfangs noch auf dem Tisch liegen.*

Für einen quadratischen Bierdeckel mit Seitenlänge *l* (rechteckig mit der kurzen Kantenlänge *l* senkrecht zur Tischkante) bzw. einen runden Bierdeckel mit Radius $R = l/2$ bzw. einem elliptischen Bierdeckel mit der kurzen Halbachse *b* (kleine Halbachse senkrecht zur Tischkante) folgt aus Gl. (5):

$$a_{\text{krit}}^{\text{Quader}} = \frac{\frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2}{m\frac{l}{2}} = \frac{2}{3} l,$$

$$a_{\text{krit}}^{\text{Kreis}} = \frac{\frac{1}{4} m R^2 + m R^2}{m R} = \frac{5}{4} R = \frac{5}{4} b. \qquad \text{(6a/b)}$$

Anmerkung: Das Trägheitsmoment eines quadratischen Quaders mit der Masse *m*, der Kantenlänge *l* und der Höhe *h* bezüglich einer Drehung durch den Schwerpunkt und einer Achse parallel zu einer Kante beträgt $I_{\text{Quad}} = \frac{1}{12} m(l^2 + h^2)$. Wenn $h << l$ (flacher, quadratischer Bierdeckel) ergibt sich $I_{\text{Quad}} = \frac{1}{12} m l^2$.
Das Trägheitsmoment eines elliptischen Zylinders mit der Masse m, den Halbachsen *a* und *b* und der Höhe *h* bezüglich einer Drehung durch den Schwerpunkt und um die Halbachse *a* beträgt $I_{\text{eZyl}} = \frac{1}{12} m(3b^2 + h^2)$.
Wenn $h << b$ (flacher, elliptischer Bierdeckel) ergibt sich $I_{\text{eZyl}} = \frac{1}{4} m b^2$. Für einen kreisförmigen Zylinder wird *b* durch den Radius *R* ersetzt.

Wir untersuchen nur den einfacheren Fall $a < a_{\text{krit}}$, bei dem der *Bierdeckel sofort vollständig vom Tisch abhebt* und der Schwerpunkt S des Bierdeckels senkrecht hoch fliegt. Es gelten die Gleichungen (1) und (2) mit $A_x = 0$ und $s = R$ bzw. $s = l/2$:

$$\hat{F} = m v_S \qquad (7)$$

$$I_S\,\omega = \left(a - \frac{l}{2}\right)\hat{F} \underset{\text{Gl.(7)}}{\overset{\uparrow}{=}} \left(a - \frac{l}{2}\right) m v_S \qquad (8)$$

Gl. (3) gilt nicht mehr.

Der Angriffspunkt P der Kraft *F* hat direkt nach dem Stoß die Geschwindigkeit

$$v_P = v_S + \omega\left(a - \frac{l}{2}\right) = v_S\left[1 + \left(a - \frac{l}{2}\right)^2 \frac{m}{I_S}\right] \qquad (9)$$

Da der Bierdeckel sehr leicht ist, ist diese Geschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit der Finger vor dem Stoß.

Aus Formel (8) und (9) lässt sich die Winkelgeschwindigkeit für $a \leq a_{krit}$ ableiten; sie erreicht ihr Maximum für $a = a_{krit}$.

$$\omega = v_{\mathrm{P}}\left(a - \frac{l}{2}\right) \Big/ \left[\frac{I_{\mathrm{S}}}{m} + \left(a - \frac{l}{2}\right)^2\right] \tag{10}$$

Mit den Werten aus Formel 6a, b ergibt sich für $a = a_{krit}$

$$v_{\mathrm{S}}^{\mathrm{Quadr.}} = \frac{3}{4} v_{\mathrm{P}} \quad \text{und} \quad v_{\mathrm{S}}^{\mathrm{Kreis}} = \frac{4}{5} v_{\mathrm{P}}\,. \tag{11a, b}$$