

8 Erzwungene Schwingungen

8.1 Allgemeines

In diesem Kapitel werden erzwungene Schwingungen aufgrund harmonischer Anregung behandelt. Für eine Vielzahl von Problemstellungen reicht dieser Ansatz vollkommen aus, zumal alle periodischen Anregungen in eine Summe harmonischer Anregungen in Form von Fourier-Reihen zerlegt werden können (siehe Abschnitt 4.2.3). Des Weiteren wird lediglich der stationäre, das heißt der eingeschwungene Schwingungszustand betrachtet. Die instationären Ein- und Ausschwingvorgänge werden nur kurzzeitig von den Eigenschwingungen überlagert, die durch Dämpfung allmählich unbedeutend klein werden. Allerdings ist auf Resonanzdurchfahrt während der Ein- und Ausschaltvorgänge bei tief abgestimmten Maschinenfundamenten besonders zu achten.

Die in der Praxis hilfreichen Diagramme der Vergrößerungsfunktionen sind umfangreich in [1] niedergeschrieben. Grundsätzlich bleibt für das Studium dieses Abschnittes anzumerken:

- Die Gesamtstruktur schwingt mit der Anregungsfrequenz Ω . Jede Eigenform wird, abhängig von dem Quotienten $\frac{\Omega}{\omega}$ und ihrem Dämpfungsgrad D , unterschiedlich stark angeregt.
- Bei periodischer aber nicht harmonischer Anregung existieren außer der Betriebsdrehzahl (Grundfrequenz) auch höhere Anregungsfrequenzen, die nicht vergessen werden dürfen (Kompressoren, Fußgänger, Glocken).
- Schnell aufeinander folgende Impulsanregung (siehe Kapitel 6) führt zu einer quasi-stationären Anregung von Eigenformen (Schnellschlagbär, Hydraulikhämmer, Streichinstrumente).

Periodische Anregungskräfte in der Baudynamik sind im Allgemeinen Trägheitskräfte infolge rotierender Massen m_R oder translatorisch bewegter Massen m_T (Bild 8.1). Ihre Amplitude \hat{F} ist proportional dem Quadrat der Kreisfrequenz, weshalb man von „qua-

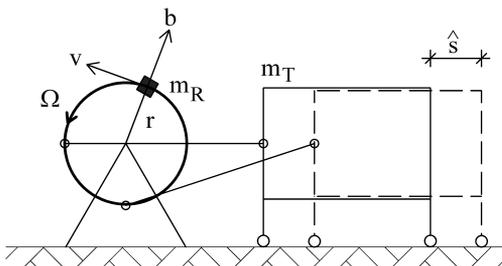


Bild 8.1 Rotierende Massen und translatorisch bewegte Massen

dratischer Anregung“ spricht. Ausgewuchtete Maschinen erzeugen keine Anregungskräfte. Allerdings entstehen im Laufe des Betriebes stets Unwuchten (siehe Abschnitt 5.5).

Anregungskräfte, deren Amplitude \hat{F} unabhängig von der Kreisfrequenz sind, bezeichnet man als „konstante Anregung“. Ein Beispiel dafür sind elektromagnetische Kräfte, deren Amplitude proportional der Stromstärke und der magnetischen Feldstärke ist. Bewegen sich Ladungsträger (zum Beispiel freie Elektronen oder Ionen) in einem magnetischen Feld, so wirkt auf sie die so genannte Lorentzkraft (Bild 8.2):

$$F = Qv \times B \quad (8.1)$$

Hierbei ist B die magnetische Feldstärke, Q die Anzahl der Ladungsträger und v die Geschwindigkeit der Ladungsträger. Steht v senkrecht auf B nimmt F seinen Größtwert an [33]:

$$F = QvB \quad (8.2)$$

Ist Q die Anzahl der Ladungsträger, die in der Zeit t den Querschnitt eines elektrischen Leiters (zum Beispiel Kupferdrahtes) durchströmen, dann ist die Stromstärke:

$$I = \frac{Q}{t} \quad (8.3)$$

Bei konstanter Geschwindigkeit der Ladungsträger ist $v = \frac{l}{t}$, wobei l die Länge des Leiters im magnetischen Feld ist. Dann wird:

$$I = \frac{Qv}{l} \Rightarrow Qv = Il \quad (8.4)$$

Eingesetzt in Gl. (8.2) ergibt sich dann:

$$F = IlB \quad (8.5)$$

Die Formel (8.5) besagt, wenn ein Strom I mit konstanter Geschwindigkeit v (Gleichstrom) durch einen Leiter mit der Länge l fließt, der sich in einem Magnetfeld B befindet, so wirkt auf den Leiter die Kraft F . Ist der Leiter an einem Waagebalken angehängt, so lässt sich die elektromagnetische Kraft messen (Bild 8.2). Fließt der Strom in die ent-

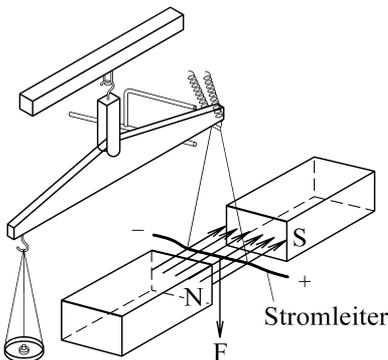


Bild 8.2 Messung der Kraft auf einen Stromleiter im Magnetfeld [33]

gegengesetzte Richtung, so wechselt auch die Kraft ihre Richtung. Wird ein harmonischer Wechselstrom durch den Leiter geschickt,

$$I(t) = \hat{I} \sin \Omega t \quad (8.6)$$

entsteht gemäß Gl. (8.5) eine harmonische Kraft mit der Maximalamplitude \hat{F} :

$$F(t) = I(t) lB \Rightarrow F(t) = \hat{I}lB \sin \Omega t \quad (8.7)$$

$$\hat{F} = \hat{I}lB$$

\hat{F} ist eine konstante Amplitude, welche unabhängig von der Frequenz ist.

Obwohl elektromagnetische Kräfte in der Baudynamik keine Rolle spielen, wird die konstante Anregung im Folgenden ausführlich behandelt. Wenn eine Maschine mit einer bestimmten unveränderlichen Drehzahl läuft, ist die zu dieser Drehzahl gehörige Trägheitskraft (Anregungskraft) konstant. Es handelt sich dann also um eine konstante Anregung. Weitere Angaben finden sich in [13].

8.2 Systeme mit einem Freiheitsgrad

8.2.1 Direkte konstante Anregung – kraftgesteuerte Vorgänge

Auf den Einmassenschwinger (Bild 8.3) wirkt die harmonische Kraft:

$$F(t) = \hat{F} \cos \Omega t \quad (8.8)$$

$$\hat{F} = \text{konst}$$

\hat{F} ist die Kraftamplitude und Ω die Anregungskreisfrequenz. Das dynamische Gleichgewicht am freigeschnittenen System lautet:

$$F_T(t) + F_D(t) + F_R(t) = \hat{F} \cos \Omega t \Rightarrow$$

$$m\ddot{s}(t) + c\dot{s}(t) + ks(t) = \hat{F} \cos \Omega t \quad (8.9)$$

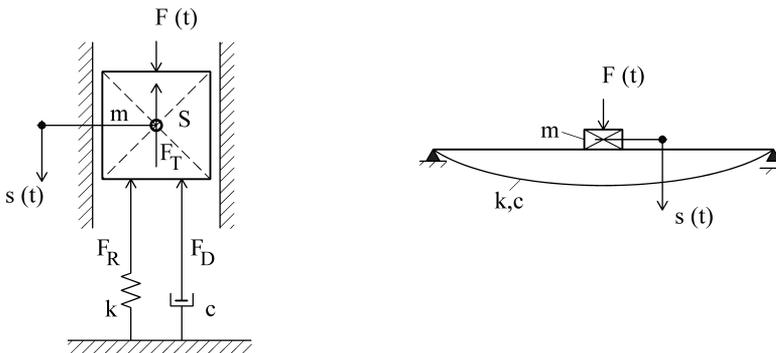


Bild 8.3 Einmassenschwinger mit direkter Anregung

Damit liegt eine inhomogene Differentialgleichung vor, deren Lösung sich aus der allgemeinen Lösung für die homogene Differentialgleichung $s_h(t)$ und der partikulären Lösung für die inhomogene Differentialgleichung $s_p(t)$ zusammensetzt:

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) \quad (8.10)$$

Wie eingangs erwähnt, wird durch Dämpfung der homogene Teil der Differentialgleichung $s_h(t)$ binnen kurzem sehr klein. Zieht man nur den partikulären Teil der Lösung in Betracht und setzt den Nullphasenwinkel $\varphi = 0$, bietet sich folgender harmonischer Ansatz für die Verschiebung an:

$$s(t) = \hat{s} \cos(\Omega t - \alpha) \quad (8.11)$$

α gibt den Phasenwinkel an, um welchen die Anregungskraft \hat{F} hinter der Verschiebung s zurück bleibt. Gl. (8.11) zweimal abgeleitet ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -\hat{s}\Omega \sin(\Omega t - \alpha) \\ \ddot{s}(t) &= -\hat{s}\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Bezüglich der Argumente für die trigonometrischen Beziehungen gilt $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird aus den Verschiebungsgrößen:

$$-m\hat{s}\Omega^2 \cos \alpha + c\hat{s}\Omega \sin \alpha + k\hat{s} \cos \alpha = \hat{F} \quad (8.13)$$

Die einzelnen Terme der Bewegungsgleichung können als vektorielle Kräfte interpretiert und ausgehend von einer waagerechten Bezugslinie abgetragen werden (Bild 8.4). Diese Vorgehensweise ist besonders hilfreich, wenn das Zusammenspiel der Kräfte in einem dynamischen Zeigerdiagramm grafisch dargestellt wird. Unter Einführung der nachstehenden Beziehungen kann aus Bild 8.4a abgelesen werden:

$$\begin{aligned} -\underbrace{m\hat{s}\Omega^2}_{\hat{F}_T} \cos \alpha + \underbrace{c\hat{s}\Omega}_{\hat{F}_D} \sin \alpha + \underbrace{k\hat{s}}_{\hat{F}_R} \cos \alpha &= \hat{F} \\ \underbrace{(\hat{F}_R - \hat{F}_T)}_{\hat{F}_1} \cos \alpha + \underbrace{\hat{F}_D}_{\hat{F}_2} \sin \alpha &= \hat{F} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Das Bild 8.4a zeigt oben die vektorielle Darstellung der dynamischen Kräfte für den Einmassenschwinger mit vorgegebenem Nullphasenwinkel φ . Die Anregungskraft \hat{F} ist gegenüber der waagerechten Bezugslinie um den Winkel α geneigt. Auf der Bezugslinie sind die Federkraft \hat{F}_R und die Trägheitskraft \hat{F}_T aufgetragen. Die Trägheitskraft zeigt in die entgegengesetzte Richtung der Federkraft. Im rechten Winkel zur Trägheitskraft wirkt die Dämpfungskraft \hat{F}_D . Aus der Grafik lässt sich mit Hilfe des Pythagoras ablesen:

$$(\hat{F}_R - \hat{F}_T)^2 + \hat{F}_D^2 = \hat{F}^2 \quad \Rightarrow \quad (k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2 = \left(\frac{\hat{F}}{\hat{s}}\right)^2 \quad (8.15)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Verschiebungsamplitude freistellen.

$$\hat{s} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \quad (8.16)$$

Der Nachlaufwinkel α kann mit:

$$\tan \alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \quad (8.17)$$

bestimmt werden. Im Resonanzfall entspricht die Anregungskreisfrequenz Ω der Eigenkreisfrequenz ω und der Nachlaufwinkel nimmt den Wert $\alpha = 90^\circ$ an.

In Bild 8.4a unten ist klar zu erkennen, welchen bedeutsamen Einfluss die Dämpfung bei Resonanz hat, da sie als einzige Größe der Anregungskraft entgegenwirkt. Betrachtet man ein ungedämpftes System, so entscheidet wesentlich die Frequenzabstimmung $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ über die Art der Schwingung (Bild 8.4b und c). Ist die Eigenkreisfrequenz ω größer als die Anregungskreisfrequenz Ω , so schwingen Anregungskraft und Masse im Gleichtakt. Liegt die Anregungsfrequenz unterhalb der Eigenfrequenz, so schwingen beide im Gegenteil.

Für den Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$ bedeutet dies, dass der Phasenwinkel $\alpha = \pi$ beträgt und die Schwingungsamplitude gegen Null geht. Die hohe Anregungsfrequenz vermag die träge Masse der Struktur nicht in Schwingungen zu versetzen.

Das Bild 8.4d zeigt, wie im Fall einer freien ungedämpften Schwingung die Anregungskraft und die Rückstellkraft gegenläufig wirken und so im dynamischen Gleichgewicht bleiben, was dem Vektordiagramm des statischen Gleichgewichtes entspricht (Bild 8.4e).

Die Division der Gl. (8.15) durch die Federsteifigkeit k führt nach Einführung der Terme

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega}, \quad s_{\text{stat}} = \frac{\hat{F}}{k}$$

auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m}{k} \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{c}{k} \Omega\right)^2 &= \left(\frac{\hat{F}}{k\hat{s}}\right)^2 \Rightarrow \\ \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{k} \Omega\right)^2 &= \left(\frac{s_{\text{stat}}}{\hat{s}}\right)^2 \Rightarrow \\ (1 - \eta^2)^2 + \left(\frac{c}{k} \Omega\right)^2 &= \left(\frac{s_{\text{stat}}}{\hat{s}}\right)^2 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Die kritische Dämpfung c_{krit} bezeichnet die kleinste Dämpfung einer freien Schwingung. Nach einer Anfangsauslenkung findet lediglich eine asymptotische Annäherung an die statische Nulllinie des dynamischen Systems statt. Die kritische Dämpfung (siehe Kapitel 9) ist definiert als:

$$c_{\text{krit}} = 2\sqrt{km} \Rightarrow k = \frac{c_{\text{krit}}\omega}{2} \quad (8.19)$$

Des Weiteren bietet sich die Definition des Dämpfungsmaßes an, welches das Verhältnis der vorhandenen Dämpfung zur kritischen Dämpfung beschreibt.

$$D = \frac{c}{c_{\text{krit}}} \quad (8.20)$$

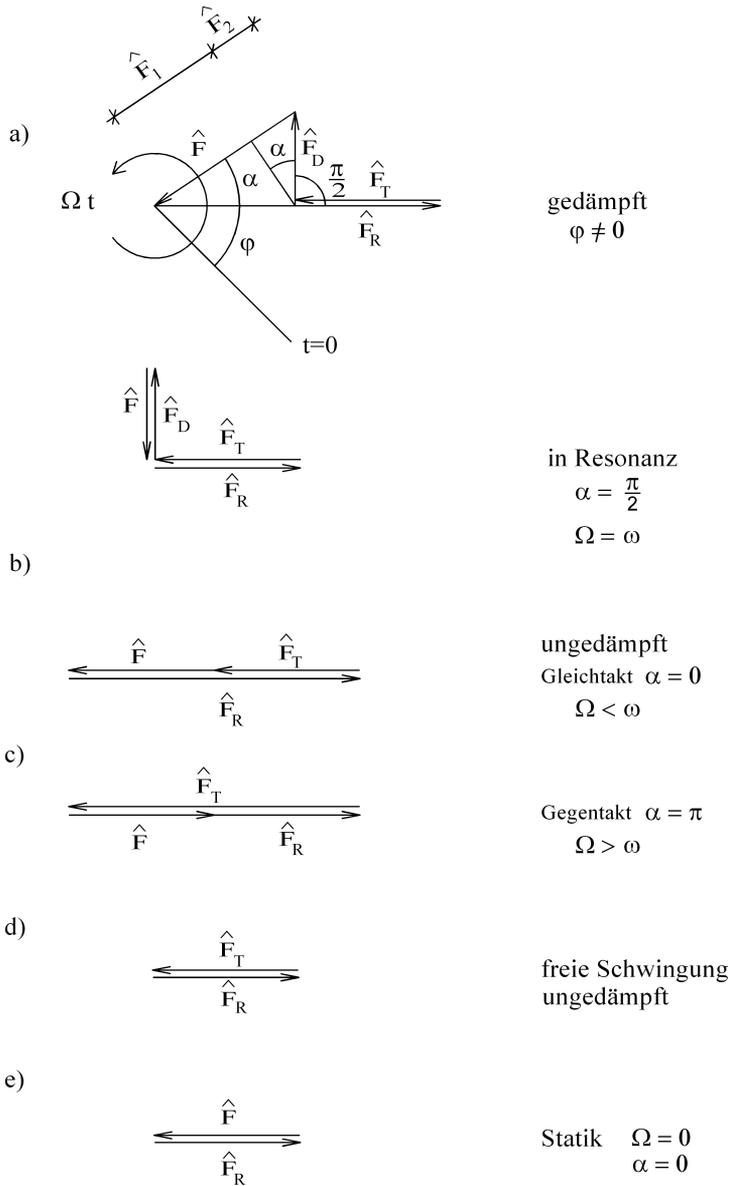


Bild 8.4 Zeigerdiagramme der dynamischen Kräfte

Gl. (8.18) kann mit den getroffenen Definitionen umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} (1 - \eta^2)^2 + \left(\frac{2c}{c_{\text{krit}} \omega} \Omega \right)^2 &= \left(\frac{s_{\text{stat}}}{\hat{s}} \right)^2 \Rightarrow \\ (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2 &= \left(\frac{s_{\text{stat}}}{\hat{s}} \right)^2 \end{aligned} \quad (8.21)$$

Hieraus erhält man die Vergrößerungsfunktion oder dynamische Überhöhung (Bild 8.5):

$$V_1 = \frac{\hat{s}}{s_{\text{stat}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad \text{mit} \quad s_{\text{stat}} = \frac{\hat{F}}{k} \quad (8.22)$$

Anmerkung: Häufig wird der Fehler gemacht, dass für s_{stat} die Verformung infolge der statischen Lasten (Eigengewicht von Fundament und Maschine) angesetzt wird, \hat{F} ist jedoch die Amplitude der dynamischen Kraft.

Mit Hilfe der Vergrößerungsfunktion und $c = 0$ kann die statische Ersatzlast zur Ermittlung der Beanspruchung der Konstruktion errechnet werden.

$$F_{\text{ers}} = \hat{s}k \Rightarrow F_{\text{ers}} = V_1 s_{\text{stat}} k \Rightarrow F_{\text{ers}} = V_1 \hat{F} \quad \text{mit:} \quad (8.23)$$

$$V_1 = \frac{\hat{s}}{s_{\text{stat}}} \quad (8.22)$$

$$V_2 = \frac{\hat{s}}{s_{\infty}} \quad (8.36)$$

$$V_3 = \frac{\hat{s}_F}{\hat{s}_0} \quad (8.46)$$

Das Bild 8.5 zeigt die Verläufe der Vergrößerungsfunktionen V_1 (konstante Anregung), V_2 (quadratische Anregung) und V_3 (aktive bzw. passive Schwingungsisolierung) für unterschiedliche Dämpfungsmaße. Das Maximum der Funktion V_1 befindet sich in der Umgebung von $\eta = 1$. Für praktische Belange bei Schwingungsuntersuchungen reicht es oftmals aus mit zwei Bereichen zu rechnen.

$$\text{Resonanznähe: } \eta = 1 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2D} \quad (\text{nach DIN 1311 Gütefaktor } Q)$$

$$\text{Resonanzferne: } D = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{1 - \eta^2}$$

Aus Sicherheitsgründen (Modellfehler) sollte in Resonanznähe mit $\eta = 1$ gerechnet werden. In Resonanzferne ist die Dämpfung im Allgemeinen vernachlässigbar. Weil für $\eta > 1$ die Vergrößerungsfunktion V_1 negative Werte annimmt, wird in vielen Diagrammen ab diesem Punkt der Kehrwert verwendet. In der nachstehenden Tabelle 8.1 werden einige typische Bereiche der Vergrößerungsfunktion V_1 eingehender betrachtet.

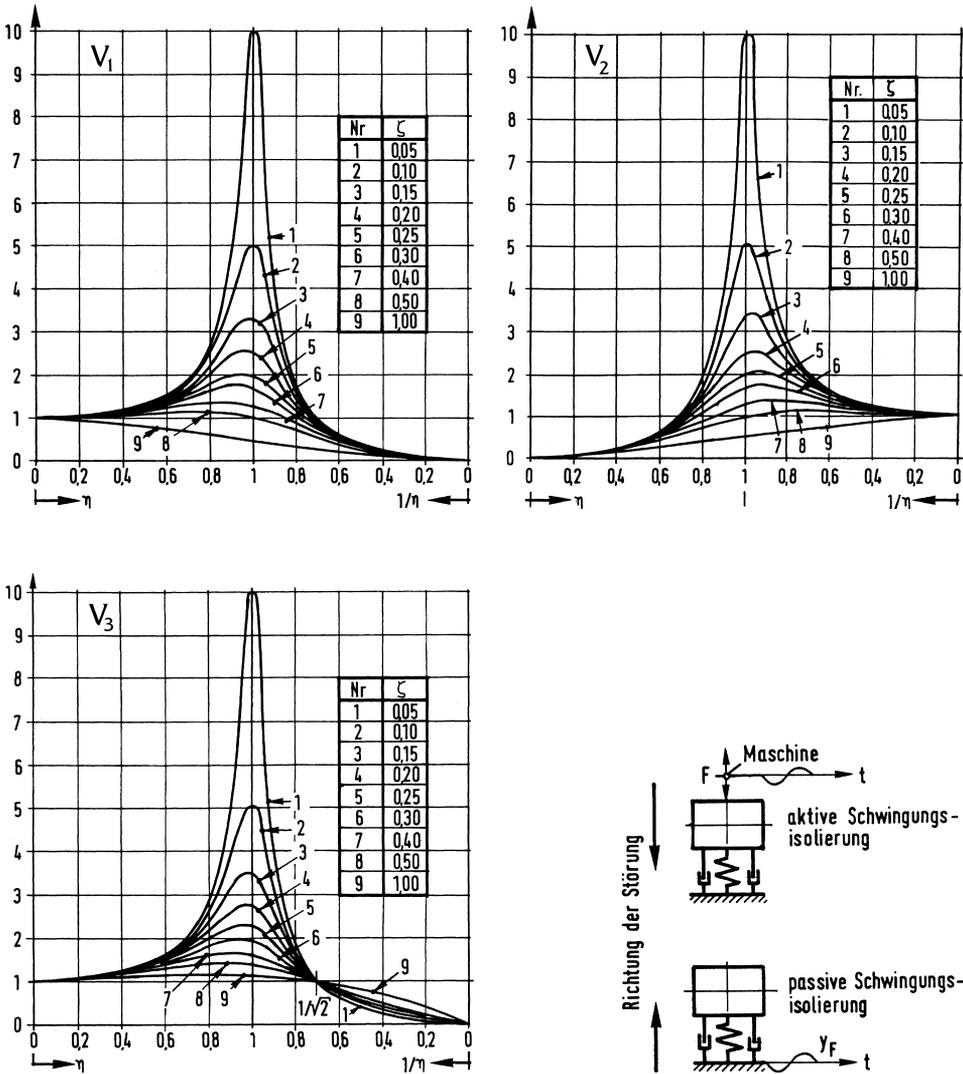


Bild 8.5 Vergrößerungsfunktionen des Einmassenschwingers [1]

Die Tabelle 8.1 unterstreicht, dass nur bei Tiefabstimmung $\omega < \Omega$ und dem Frequenzverhältnis $\eta > \sqrt{2}$ eine Amplitudenreduktion gegenüber s_{stat} zu erreichen ist. Allerdings wird bei Tiefabstimmung während der An- und Ablaufphase von Maschinen die Resonanz durchlaufen. Es ist zu prüfen, ob für die Maschine eine kurzzeitige Amplitudenerhöhung zulässig ist. Eine ausreichend starke Dämpfung verhindert zu große Amplituden beim Resonanzdurchlauf. Kritisch ist meistens ein langsamer Ablaufvorgang. Durch zusätzliches Abbremsen der Maschine kann das Aufschaukeln bei der Resonanzdurchfahrt vermindert werden.

Tabelle 8.1 Bereiche der Vergrößerungsfunktion V_1

Eigenkreisfrequenz ω Anregungskreisfrequenz Ω	Frequenzverhältnis η	Bemerkung
$\omega \rightarrow \infty$ bzw. $\Omega = 0$	$\eta = 0$	Statischer Fall $V_1 = 1, \hat{s} = s_{\text{stat}}$
$\omega > \Omega$	$\eta < 1$	Hochabstimmung bzw. unterkritischer Bereich $V_1 > 1, \hat{s} > s_{\text{stat}}$
$\omega = \Omega$	$\eta = 1$	Resonanz $V_1 = \frac{1}{2D}, \hat{s} = \frac{s_{\text{stat}}}{2D}$
$\omega < \Omega$	$\eta > 1$	Tiefabstimmung bzw. überkritischer Bereich
$\omega < \Omega$	$\eta = \sqrt{2}$	Tiefabstimmung $D = 0, V_1 = 1, \hat{s} = s_{\text{stat}}$
$\omega < \Omega$	$1 < \eta < \sqrt{2}$	Tiefabstimmung $ V_1 > 1, \hat{s} > s_{\text{stat}}$
$\omega < \Omega$	$\sqrt{2} \leq \eta \leq \infty$	Tiefabstimmung ^{a)} $1 \geq V_1 \geq 0, \hat{s} < s_{\text{stat}}$

a) Bereich der Schwingungsisolierung.

In der Baudynamik werden nur selten Wege, aber häufig Geschwindigkeiten u oder Beschleunigungen a gemessen. Dann ist die Vergrößerungsfunktion entsprechend zu erweitern:

$$\begin{aligned}
 V_1(s) &= \frac{\hat{s}}{s_{\text{stat}}} = \frac{\hat{s}\Omega}{s_{\text{stat}}\Omega} = \frac{\hat{u}}{s_{\text{stat}}\omega\eta} \\
 V_1(u) &= \frac{\hat{u}}{s_{\text{stat}}\omega} \quad V_1(u) = V_1(s)\eta \\
 V_1(a) &= \frac{\hat{a}}{s_{\text{stat}}\omega^2} \quad V_1(a) = V_1(s)\eta^2
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

Beruhigungsmasse

In der Baudynamik verwendet man den Begriff der Beruhigungsmasse m_B , um zu zeigen, dass durch eine Vergrößerung der Fundamentmasse eine Verkleinerung der Amplituden des Fundamentes und der Maschine zu erreichen ist. Unterschieden werden zwei Fälle (Bild 8.6):

a) Variation der Federsteifigkeit k bei $\omega = \text{konst}$ (Bild 8.6a)

Für die Amplitude der Verschiebung $\hat{s} = f(m_B)$ gilt Gl. (8.16) mit $c = 0$:

$$\hat{s} = \frac{\hat{F}}{k - m_B \cdot \Omega^2} = \frac{\hat{F}}{m_B(\omega^2 - \Omega^2)} \tag{8.25}$$

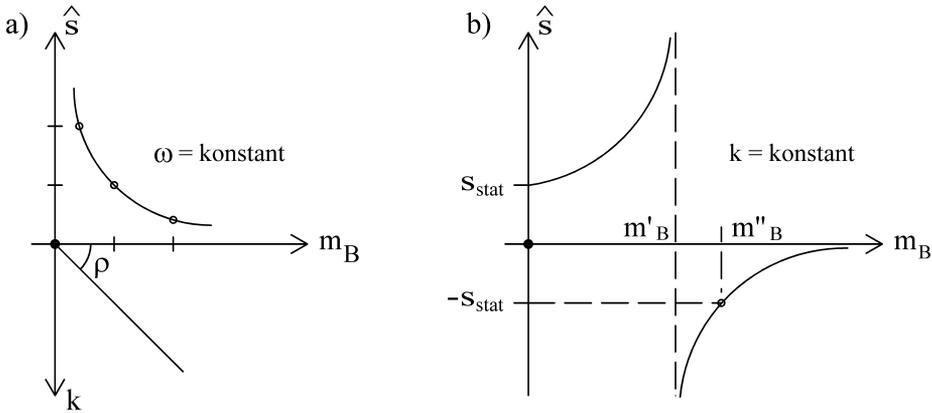


Bild 8.6 Beruhigungsmasse

Um $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_B}} = \text{konst}$ zu erreichen, muss die Federsteifigkeit der veränderten Beruhigungsmasse angepasst werden. Für $k = \omega^2 m_B$ berechnet sich der Winkel ρ zu $\rho = \arctan \omega^2$. Der Winkel ρ gibt an, wie groß die Federsteifigkeit k gewählt werden muss, wenn die Beruhigungsmasse m_B einen bestimmten Wert annimmt. In der Nähe der Resonanzstelle $\eta = 1$ und $c \neq 0$ wird aus Gl. (8.16):

$$\hat{s} = \frac{\hat{F}}{2 \cdot m_B \cdot D \cdot \Omega^2} \quad (8.26)$$

b) Federsteifigkeit $k = \text{konst}$ (Bild 8.6b)

Bei einer bestimmten Federkonstanten k und $c = 0$ lässt sich die Verschiebung $\hat{s} = f(m_B)$ gemäß Gl. (8.16) berechnen:

$$\hat{s} = \frac{\hat{F}}{k - m_B \cdot \Omega^2}$$

Wenn die Beruhigungsmasse $m_B = 0$ ist, wird $\hat{s} = s_{\text{stat}} = \frac{\hat{F}}{k}$. Im weiteren Verlauf hat die Funktion eine Unstetigkeit an der Stelle $m'_B = \frac{k}{\Omega^2}$ und nähert sich hier einer vertikalen Asymptote an. Der gewünschte Effekt einer Beruhigungsmasse tritt also erst dann auf, wenn $m_B > m'_B$. Nach kurzem Umformen der Formel (8.25) findet man heraus, dass erst ab einer Masse $m_B > m''_B = \frac{2k}{\Omega^2}$ die Verschiebung \hat{s} kleiner als s_{stat} wird.

Die statische Ersatzlast $F_{\text{crs}} = \hat{s} \cdot h = V_1 \cdot \hat{F}$ und damit die Beanspruchung der Konstruktion, werden durch die Beruhigungsmasse nicht verändert.