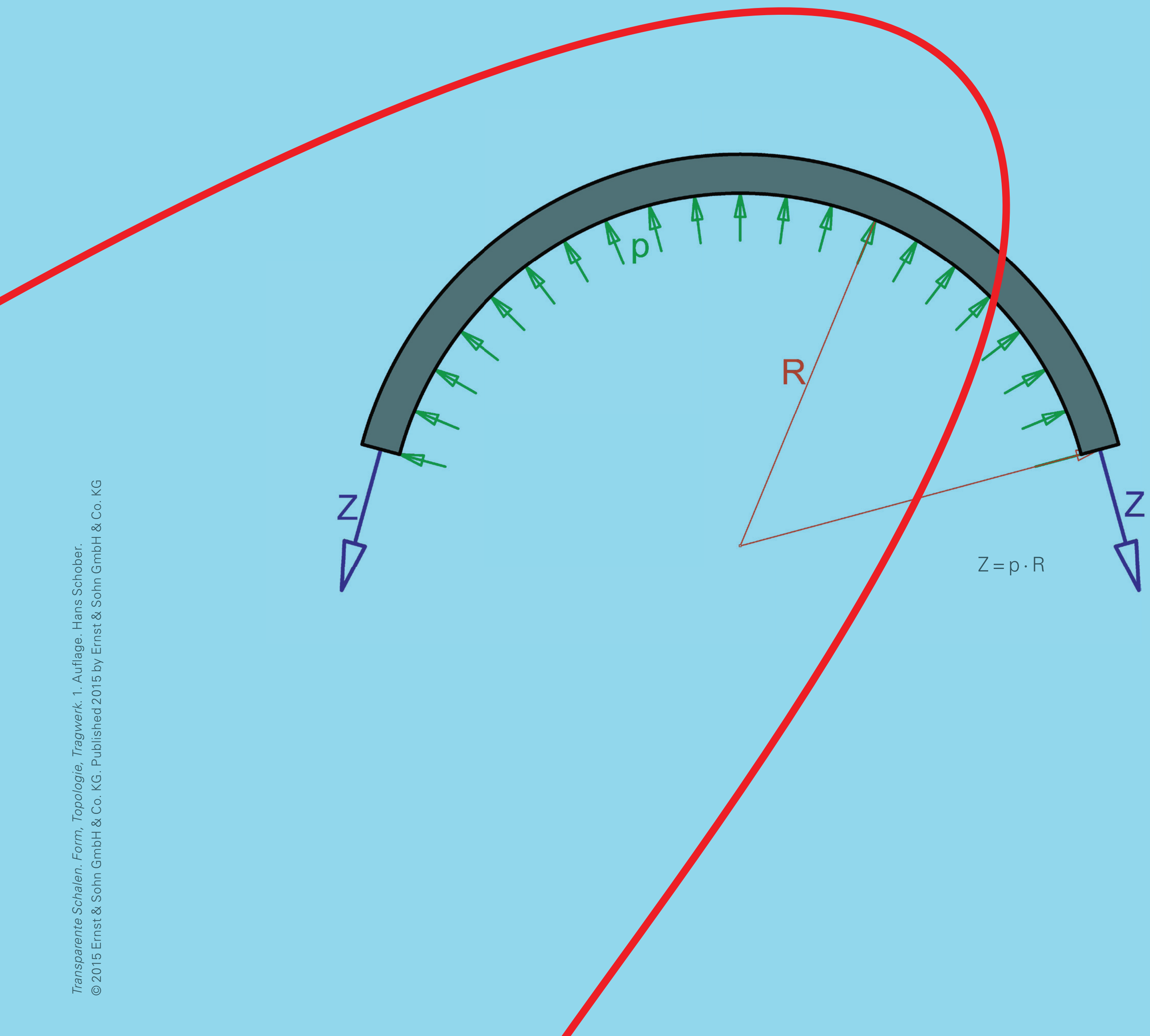
1 Allgemeines zu Schalen

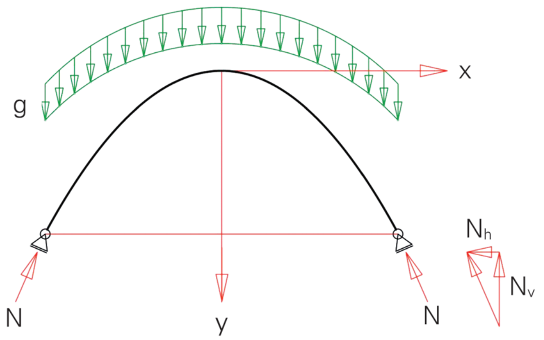


1 Allgemeines zu Schalen

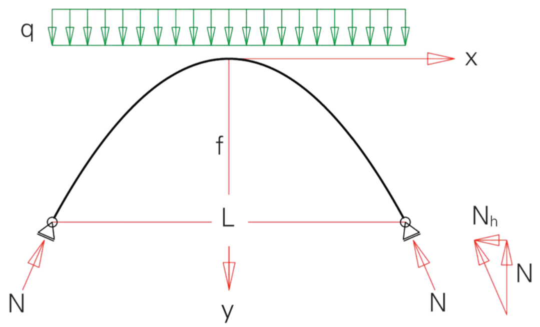
Schalen sind auf natürliche Weise schön und effizient, weil die fließende und doppelt gekrümmte Form Lasten ohne Biegung, nur in der Fläche, also nur über Zug- und Druckkräfte fortleiten kann. Sie brauchen daher bedeutend weniger Material als biegebeanspruchte, ebene Tragwerke, beispielsweise Träger oder Platten.
Es besteht aber ein Gegensatz zwischen günstigem Tragverhalten und schwieriger, da doppelt gekrümmter Herstellung. Die Lösung dieses Gegensatzes ist eine wichtige Voraussetzung für den erfolgreichen Schalenbau.
Sollen Schalen durchsichtig sein, also verglast werden, muss man sie so in Stäbe auflösen, dass eine Struktur mit möglichst großer Transparenz entsteht. Günstige Voraussetzungen für optimale Transluzenz bieten doppelt gekrümmte Flächentragwerke mit Dreiecksmaschen. Nur das Dreiecksraster ist in der Lage, Kräfte im Wesentlichen ohne Stabbiegung nur in der Fläche fortzuleiten, eine notwendige Voraussetzung für einlagige Membranschalen.
Die Wirtschaftlichkeit transparenter Schalen hängt wesentlich von der Fügung der Netzstäbe im Knoten und der Form der Eindeckung ab.

1.1 Zum Entwurf von Schalen

Für die Berechnung von Schalen stehen heute leistungsfähige Programme mit relativ einfacher Geometrie- und Lasteingabe und übersichtlicher Ergebnisdarstellung zur Verfügung.
Trotzdem benötigt der entwerfende Ingenieur gutes theoretisches Wissen zum Tragverhalten von Schalen, um im Entwurfsstadium die Weichen für ein ästhetisches und effizientes Tragwerk richtig zu stellen. Ein falsches Tragwerkskonzept kann zwar mit Hilfe des Computers und entsprechender Dimensionierung der Tragglieder machbar gemacht werden, das Ergebnis ist jedoch weder effektiv noch innovativ.
Ausreichendes Wissen um das Tragverhalten von Schalen wird hier vorausgesetzt.
Beim Entwurf sollte stets der Membranzustand angestrebt werden, also ein momentenfreier Zustand. Voraussetzung dafür ist zunächst eine kontinuierliche doppeltgekrümmte Form. Im Gegensatz zum Bogen, der Lasten nur dann momentenfrei abträgt, wenn die Bogenform auf die Art der Belastung abgestimmt ist (Stützlinienform, Bild 1.1), kann eine einzige Schalenform verschiedene Belastungen momentenfrei abtragen. Die Stützung der Schale muss lediglich membrangerecht, das heißt in Richtung der Schalenfläche erfolgen und Einzellasten müssen vermieden oder möglichst flächig eingeleitet werden. Die aus den Verträglichkeitsbedingungen auftretenden Störmomente in der Schale können mit dem Computer zuverlässig ermittelt werden.
Die Schalenkräfte im Membranzustand können leicht von Hand abgeschätzt werden. Solche einfachen Abschätzungen sind zur Kontrolle von Computerergebnissen und für die Entwurfsarbeit sehr wichtig.
Bei Kenntnis der resultierenden Last P_1 oberhalb des Rundschnittes können die Membrankräfte für beliebig rotationssymmetrisch belastete Rotationsschalen einfach abgeschätzt werden (Bild 1.2).



Stützlinienform für Bogen unter Eigenlast
$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a} - a$ (Kettenlinie)



Stützlinienform für Bogen unter Gleichlast q
$x^2 = 2p \cdot y$ (Parabel)

Auflagerkräfte: $N_h = \frac{q \cdot L^2}{8 \cdot f}, \; N_v = q \cdot \frac{L}{2}$ (1)

Bild 1.1 Stützlinienform eines Bogens ist belastungsabhängig (Abschätzung der Normalkräfte und Biegemomente im Bogen bzw. der Tonne siehe auch Abschnitt 4.2)

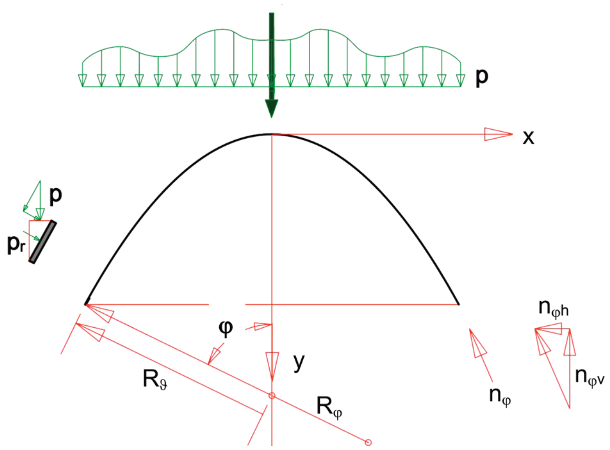


Bild 1.2 Abschätzung der Membrankräfte n_φ, n_ϑ einer Rotationsschale, R_φ ist der Krümmungsradius in Meridianrichtung, R_ϑ in Ringrichtung

Meridiankraft $n_\phi = -\frac{P_1}{2 \cdot \pi \cdot R_\vartheta \cdot \sin^2 \varphi}$ (2)

Die Ringkraft n_ϑ kann durch zweifache Anwendung der Ringformel $Z = p \cdot R$ einfach ermittelt werden. Aus n_φ ergibt sich eine Umlenkkraft u nach außen von $u = \frac{n_\varphi}{R_\varphi}$ und mit der Ringformel $Z = p \cdot R$ eine Ringkraft

$$n_\vartheta = \frac{n_\varphi}{R_\varphi} \cdot R_\vartheta$$

Die äußere Last p erzeugt eine radiale Lastkomponente p_r. Mit der Ringformel $Z = p \cdot R$ erhält man die Ringkraft $n_\vartheta = p_r \cdot R_\vartheta$ und somit Ringkraft

$$n_\vartheta = -R_\vartheta \cdot \left(p_r + \frac{n_\varphi}{R_\varphi} \right) \quad (3)$$

Für den Sonderfall einer Kugelschale unter Gleichlast p ist die radiale Lastkomponente $p_r = p \cdot \cos^2\varphi$ und die resultierende Last $P_1 = \pi \cdot p \cdot R_\vartheta \cdot R_\vartheta \cdot \sin^2\varphi$. Unter Eigenlast g ist die radiale Lastkomponente $p_r = g \cdot \cos\varphi$ und die resultierende Last $P_1 = 2\pi \cdot g \cdot R_\vartheta{}^2 \cdot (1 - \cos\varphi)$.
Setzt man p_r und P_1 in obige Beziehungen ein, erhält man die Membrankräfte der Kugelschale. Diese sind in Bild 1.3 zusammengestellt. Für andere Fälle wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

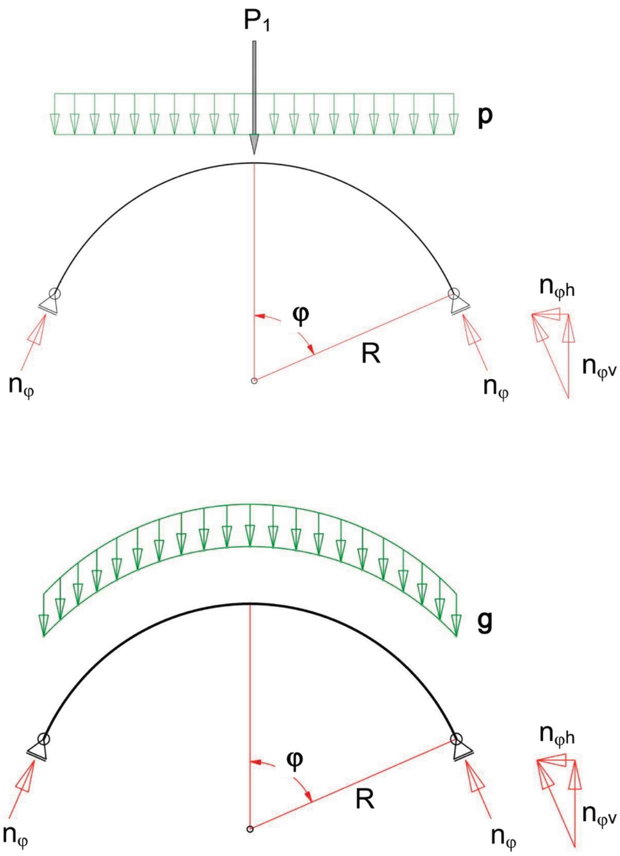


Bild 1.3 Membrankräfte einer Kugelschale

Kugelschale unter Gleichlast
Komponenten der Meridiankraft n_φ:

Horizontalkomponente $n_{\varphi h} = n_\varphi \cdot \cos\varphi$ (4)

Vertikalkomponente $n_{\varphi v} = n_\varphi \cdot \sin\varphi$

Meridiankraft n_φ aus Gleichlast p

$$n_\varphi = -p \cdot \frac{R}{2}$$

Ringkraft n_ϑ aus Gleichlast p

$$n_\vartheta = -p \cdot \frac{R}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Kugelschale unter Eigenlast
Komponenten der Meridiankraft n_φ:

Horizontalkomponente $n_{\varphi h} = n_\varphi \cdot \cos\varphi$ (5)

Vertikalkomponente $n_{\varphi v} = n_\varphi \cdot \sin\varphi$

Meridiankraft n_φ aus Eigenlast g

$$n_\varphi = -g \cdot \frac{R}{1 + \cos\varphi}$$

Ringkraft n_ϑ aus Eigenlast g

$$n_\vartheta = -g \cdot R \cdot \left(\cos\varphi - \frac{1}{1 + \cos\varphi} \right)$$

Weicht die Lagerung einer Schale von der idealen Membranlagerung ab, wenn beispielsweise nur vertikale Auflagerkräfte aufnehmbar sind, kann mit einem steifen Randträger ein membranähnlicher Zustand mit nur geringen und schnell abklingenden Biegemomenten in der Schale geschaffen werden.
Ist der Randträger ringförmig, können die Ringkräfte leicht mit einer Handrechnung abgeschätzt werden (Bild 1.4).

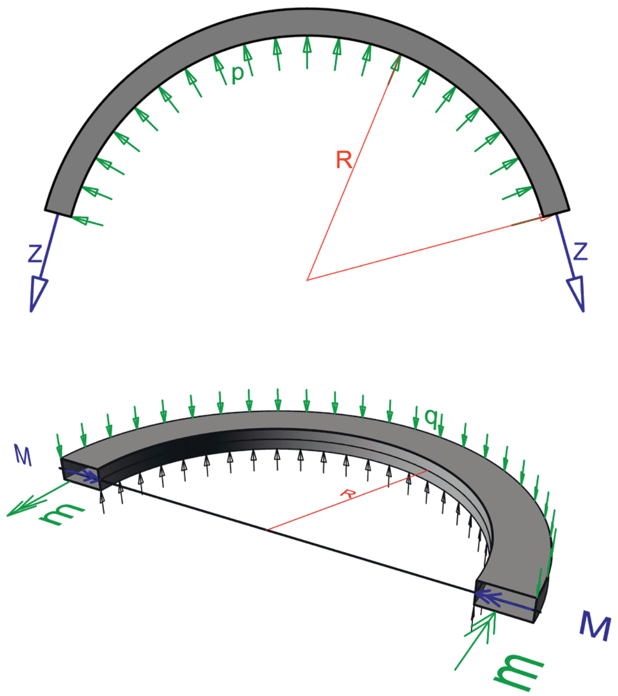


Bild 1.4 Schnittkräfte im Kreisring infolge Radiallast und Krempelmoment

Kreisring unter Radiallast p (rotationssymmetrisch)
Ringzugkraft $Z = p \cdot R$ (6)

Kreisring unter Krempelmoment $m = q \cdot e$ (rotationssymmetrisch)
Biegemoment $M = m \cdot R$ (7)
(oben Zug, unten Druck)
Torsionsmoment $= 0$

Eine wichtige Eigenschaft des mit einem Krempelmoment $m = q \cdot e$ belasteten Ringträgers besteht darin, dass als Schnittgröße im Ring keine Torsion entsteht, sondern ein Biegemoment M, das sich in Ringdruck und Ringzug aufteilt [13]. Diese Eigenschaft wurde schon mehrfach bei gekrümmten Fußgängerbrücken umgesetzt [14].

Eine resultierende Querkraft Q, welche über die Radialkräfte $n = \overline{n} \cdot \cos\varphi$ am Kreisring eingeleitet wird, bewirkt aus Gleichgewichtsgründen die Schubkräfte $t = \overline{n} \cdot \sin\varphi$ (Bild 1.5).

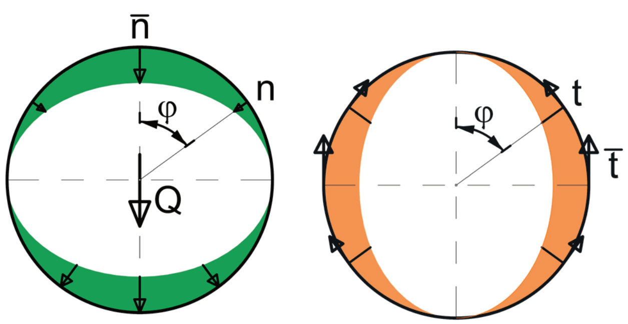


Bild 1.5 Schubkräfte t am Kreisring

Aus $\sum Q = 0$ folgt:

$$\int_0^{2\pi} \overline{n} \cdot \cos^2\varphi \cdot R \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} \overline{t} \cdot \sin^2\varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

$$\overline{n} \cdot R \cdot \pi = \overline{t} \cdot R \cdot \pi = Q$$

$$\max t = \overline{t} = \frac{Q}{\pi \cdot R}$$

maximale Schubkraft $\overline{t}$ aus Q. (8)