

# 1

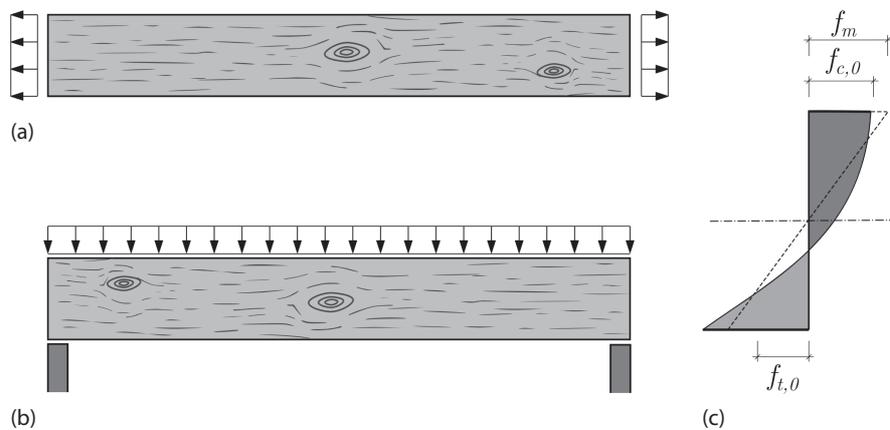
## Theoretische Grundlagen

Es ist immer wieder erstaunlich, wie elegant und ökonomisch Holztragwerke konzipiert und umgesetzt werden können. Und das bei einem Werkstoff, der den Wachstumsbedingungen in der Natur unterliegt und dadurch erhebliche Unregelmäßigkeiten und ausgeprägte anisotrope Festigkeitseigenschaften aufweist. Die ingenieurtechnische Beherrschung dieser Besonderheiten erfolgt auf der Grundlage von ganz unterschiedlichen theoretischen Ansätzen. Diese stammen aus verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen und wurden für die Fragestellungen des Holzbaus adaptiert. Bei manchen Bemessungsregeln – so z. B. bei den sogenannten „Johansen-Formeln“ – sind diese Grundlagen gut nachvollziehbar. Andere normative Regelungen verwenden Formulierungen mit dimensionsgebundenen Beiwerten, deren Herleitung ohne aufwendige Recherche nicht mehr nachvollziehbar ist. In den folgenden Abschnitten werden die wichtigsten theoretischen Grundlagen, welche bei gewöhnlichen Bemessungsaufgaben im Holzbau eine Rolle spielen, erläutert und es wird die Anwendung mit Bezug zum jeweiligen Ingenieurmodell erklärt.

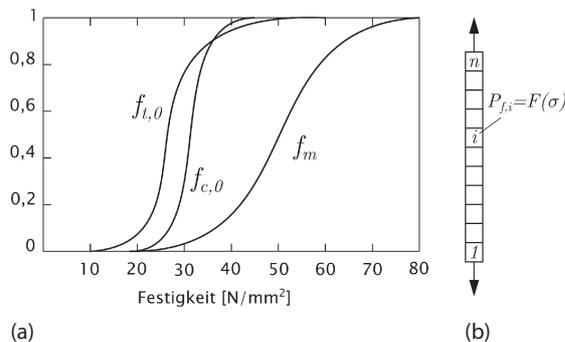
### 1.1 Festigkeiten und Maßstabeffekt

Die Festigkeiten des Holzes hängen von der Dichte, von der Faserstruktur und von den wuchsbedingten Unregelmäßigkeiten ab. Eine besondere Bedeutung haben in diesem Zusammenhang die Äste. Dieser Einfluss wiederum hängt von der Art der Belastung ab: Bei Zug wird der Ast zur Fehlstelle, bei Druck wird der lineare Lastfluss gestört (siehe Band 1, Abschn. 1.2.2). Bei einer Biegebeanspruchung, wo nun gleichzeitig Druck- und Zugspannungen auftreten, hängt der Einfluss eines Astes nicht nur von dessen Größe, sondern ganz entscheidend von seiner Lage ab. Dies wird in Abb. 1.1 veranschaulicht: Aufgrund der Äste ist die Zugtragfähigkeit des Kantholzes im Vergleich zu einer ungestörten, astfreien Probe erheblich reduziert, und zwar mehr oder weniger unabhängig von der Lage des Astes. Im Gegensatz dazu haben Äste nur dann einen Einfluss auf die Biegetragfähigkeit, wenn diese im Bereich des maximalen Biegemoments am zugbeanspruchten Rand liegen. Das ist eine Situation, die eher selten auftritt. Zusätzlich und unabhängig von diesen statistischen Betrachtungen ist auf der Druckseite des biegebeanspruchten Querschnitts ein gewisser Plastifizierungseffekt möglich.

2 | 1 Theoretische Grundlagen



**Abb. 1.1** Kantholz mit Ästen: (a) zugbeansprucht, (b) biegebeansprucht und (c) Spannungsverlauf zur Biegebeanspruchung.



**Abb. 1.2** (a) Statistische Verteilung unterschiedlicher Festigkeiten von Nadelholz nach Hansson und Thelandersson (2003) und (b) Zugstab mit  $n$  Teilabschnitten gleicher Länge.

Die Biegefestigkeit des Holzes ist somit ein eigenständiger Materialkennwert, der höher liegt als die Zugfestigkeit. Dies konnte in der Vergangenheit durch umfangreiche statistische Auswertungen von Versuchen unter Druck-, Zug- und Biegebeanspruchung gezeigt werden (siehe Abb. 1.2a) und spiegelt sich in den normativen Regelungen wider.

Bei der Festlegung von Zug- und Biegefestigkeiten spielt die statistische Verteilung der Äste als Fehlstellen eine entscheidende Rolle. Das betrifft sowohl die Größe des einzelnen Astes als auch seine Lage bezogen auf die Länge des Trägers und die Querschnittshöhe. Zur Beschreibung dieser Effekte wird gerne eine auf Waloddi Weibull (1887–1979) zurückgehende Formulierung verwendet, die auf der Theorie des schwächsten Gliedes einer Kette aufbaut. Diese Betrachtungsweise ist für spröde Versagensarten naheliegend. Abbildung 1.2b veranschaulicht dies für einen Zugstab. Geht man davon aus, dass die Versagenswahrscheinlichkeit für jeden Teilabschnitt  $i$  durch dieselbe Verteilungsfunktion  $F(\sigma)$  des Festigkeitswertes  $\sigma$  bestimmt

wird:

$$P_{f,i} = F(\sigma), \quad (1.1)$$

dann ist die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$P_{s,i} = 1 - P_{f,i}. \quad (1.2)$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit des Stabes mit  $n$  Teilabschnitten ist das Produkt der Überlebenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Abschnitte:

$$P_s = (1 - P_{f,1}) \cdot (1 - P_{f,2}) \cdot \dots \cdot (1 - P_{f,n}), \quad (1.3)$$

$$P_s = (1 - P_{f,i})^n. \quad (1.4)$$

Somit ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit des Stabes zu

$$P_f = 1 - (1 - P_{f,i})^n = 1 - (1 - F(\sigma))^n = 1 - e^{n \cdot \ln(1 - F(\sigma))}. \quad (1.5)$$

Da die Werte  $F(\sigma)$  sehr klein sind, kann der Ausdruck vereinfacht werden zu

$$P_f \approx 1 - e^{-n \cdot F(\sigma)}. \quad (1.6)$$

Für die statistische Verteilung der Festigkeit im unteren Bereich wird nun eine Exponentialfunktion mit

$$F(\sigma) = \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{m} \right)^k \quad (1.7)$$

verwendet. Die beiden Parameter  $m$  und  $k$  charakterisieren die Form der Verteilungsfunktion und werden aus der Auswertung von Versuchsdaten gewonnen. Zusätzlich erfolgt ein Übergang von  $n$  Teilabschnitten zum Integral über das Stabvolumen  $V$ :

$$P_f = 1 - e^{-n \cdot F(\sigma)} = 1 - e^{-\int F(\sigma) \cdot dV} = 1 - e^{-V \cdot F(\sigma)} = 1 - e^{-V \cdot \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{m} \right)^k}. \quad (1.8)$$

Geht man davon aus, dass als unterer Grenzwert der Festigkeit  $\sigma_0 = 0$  eingesetzt werden kann, dann beträgt die Versagenswahrscheinlichkeit bei konstanter Spannung innerhalb des Volumens  $V$

$$P_f = 1 - e^{-V \cdot \left( \frac{\sigma}{m} \right)^k}, \quad (1.9)$$

d. h. die Versagenswahrscheinlichkeit hängt somit von der Spannung im Bauteil und von seinem Volumen ab sowie von den aus der statistischen Auswertung von Versuchen gewonnenen Parametern  $m$  und  $k$ . Einen guten Überblick zu diesem Verfahren gibt Isaksson (2003).

Im Rahmen der Weibull-Theorie geht man davon aus, dass die Formparameter  $m$  und  $k$  unabhängig vom Volumen der Versuchskörper sind. Damit können für zwei unterschiedliche Volumina  $V_1$  und  $V_2$  die zugehörigen Festigkeiten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ins

## 4 | 1 Theoretische Grundlagen

Verhältnis gesetzt werden, mit der Bedingung, dass die Versagenswahrscheinlichkeit in beiden Fällen gleich groß sein soll:

$$1 - e^{-V_1 \cdot \left(\frac{\sigma_1}{m}\right)^k} = 1 - e^{-V_2 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{m}\right)^k}, \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow -V_1 \cdot \left(\frac{\sigma_1}{m}\right)^k = -V_2 \cdot \left(\frac{\sigma_2}{m}\right)^k, \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (1.12)$$

Auf diese Formulierung wird im EC5 an zwei Stellen zurückgegriffen: Die charakteristischen Werte bzw. die Bemessungswerte der Biege- und der Zugfestigkeit dürfen um einen Beiwert  $k_n$  erhöht werden.

Für Vollholz gilt:

$$k_n = \min \left\{ \left(\frac{150}{h}\right)^{0,2}, 1,3 \right\}, \quad (1.13)$$

Für Brettschichtholz gilt:

$$k_n = \min \left\{ \left(\frac{600}{h}\right)^{0,1}, 1,1 \right\}, \quad (1.14)$$

Der Beiwert darf in Ansatz gebracht werden, wenn die jeweiligen Referenzhöhen, die anstelle des Referenzvolumens verwendet werden, unterschritten werden. Die Referenzhöhen betragen 150 mm bei Vollholz und 600 mm bei Brettschichtholz. Werte kleiner als 1,0, die sich bei höheren Querschnitten ergeben, dürfen unberücksichtigt bleiben.

Beim Querkzugnachweis im Firstbereich von Satteldachträgern und gekrümmten Trägern aus Brettschichtholz wird der Bemessungswert der Querkzugfestigkeit mit Bezug auf ein Referenzvolumen  $V_0$  angepasst:

$$k_{vol} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{0,2}. \quad (1.15)$$

Die Anwendung dieser Formulierung wird in Abschn. 2.2.1 erläutert.

Bei aller Klarheit stößt die Anwendung der Weibull-Theorie immer wieder an ihre Grenzen. Unter anderem dann, wenn es um die einheitliche Festlegung der Formfaktoren für konkrete Bemessungsaufgaben geht. Eine Alternative zu einer geschlossenen Herleitung bieten Parameterstudien mithilfe von Computersimulationen, bei denen statistische Effekte mit der Monte-Carlo-Methode berücksichtigt werden. Wichtige Beiträge dazu stammen von Foschi und Barrett (1980), Colling (1990) und Serrano et al. (2001).

## 1.2 Bruchmechanik – sprödes Versagen

### 1.2.1 B- und D-Bereiche

Die Querkzugfestigkeit von Holz ist wesentlich geringer als die Zugfestigkeit in Faserrichtung. Dies ist mit der Struktur der Fasern, deren Orientierung und der daraus resultierenden Anisotropie zu begründen. Bei Überschreitung der Querkzugfestigkeit des Holzes versagt der Werkstoff meist ohne Vorankündigung und ohne erkennbare Verformungen des Bauteils. Da ein solch sprödes Versagen im Bauwerk ausgeschlossen werden soll, wurden im traditionellen zimmermannsmäßigen Holzbau Konstruktionen, bei denen nennenswerte Querkzugspannungen auftreten, möglichst vermieden. Im modernen Holzbau mit weit spannenden und gekrümmten Konstruktionen und bei den zugehörigen Verbindungen sind Querkzugspannungen nicht zu umgehen. Dennoch ist die Vermeidung oder zumindest die Begrenzung von Querkzugspannungen durch konstruktive Maßnahmen eine erste, wichtige Zielsetzung für den werkstoffgerechten Entwurf.

Allgemein unterscheidet man bei stabförmigen Biegeträgern zwischen B-Bereichen, welche nach der klassischen Biegetheorie zu berechnen sind, und den D-Bereichen, mit einem zweiachsigen Spannungszustand infolge von Diskontinuitäten. Die Biegetheorie nach Bernoulli geht vom Ebenbleiben der Querschnitte aus und von einem im Verhältnis zur Spannweite schlanken Querschnitt, der ausschließlich durch Spannungen in Längsrichtung beansprucht wird. Bereiche, wo sich der Querschnitt ändert oder wo Lasten quer zur Stabachse angreifen, weichen von diesen Annahmen ab. Es stellen sich lokal zweiachsige Scheibenspannungszustände ein. Diese ebenen Spannungszustände sind im Holzbau wegen der ausgeprägten Anisotropie besonders zu beachten. Abbildung 1.3 zeigt anschaulich, dass bei einem Träger die D-Bereiche durchaus dominieren können, wenn für deren Länge in etwa die Höhe des betrachteten Querschnitts angesetzt wird.

Für D-Bereiche könnten die Beanspruchungen direkt über Fachwerkmodelle abgeschätzt oder mit einem Finite-Elemente-Modell berechnet werden. Die Bemessung dieser Bereiche erfolgt in den normativen Regeln des Holzbaus allerdings meist indirekt. Tatsächlich auftretende Querkzugspannungen werden nicht explizit ermittelt. Die Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit werden für Ausklinkungen, Queranschlüsse und Durchbrüche mit Beiwerten geführt, welche auf bruchmechanische Betrachtungen und Herleitungen zurückgehen.

Im folgenden Abschnitt wird dazu kurz in die Anwendung der linear-elastischen Bruchmechanik eingeführt und es wird am Beispiel der Ausklinkung gezeigt, wie

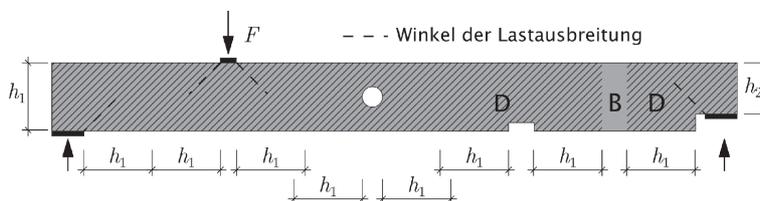


Abb. 1.3 Balken mit B- und D-Bereichen infolge lokaler Diskontinuitäten.

## 6 | 1 Theoretische Grundlagen

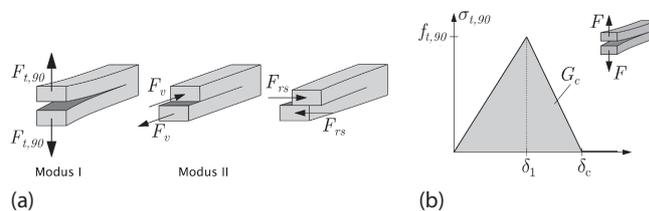
eine bruchmechanisch exakte Lösung in eine vergleichsweise einfach handhabbare analytische Formulierung überführt wird. Anschlüsse und Details mit Querkzugbeanspruchung werden im Kap. 3 umfassend behandelt und es werden dort auch entsprechende Verstärkungsmöglichkeiten zur Aufnahme von Querkzugkräften mit den zugehörigen Bemessungsregeln erläutert.

Einen Sonderfall stellen Satteldachträger und gekrümmte Träger dar. Beim Satteldachträger resultieren die Querkzugspannungen aus der Querschnittsdiskontinuität, das ist der D-Bereich beim First. Beim gekrümmten Träger gilt die Bernoulli-Hypothese aufgrund der unterschiedlich langen Randfasern des differentiellen Balkenelementes nicht und es treten keine lokalen, sondern kontinuierliche Querkzugspannungen im gekrümmten Bereich auf. Diese Zusammenhänge werden in Abschn. 2.2.1 ausführlich behandelt.

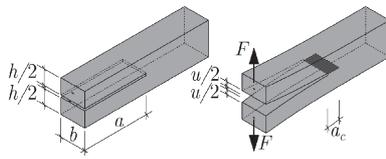
### 1.2.2 Linear-elastische Bruchmechanik – energiebasiertes Bruchkriterium

Grundlage für die Bemessung querkzugbeanspruchter Bereiche im Holzbau ist die linear-elastische Bruchmechanik (LEBM). In der Bruchmechanik wird davon ausgegangen, dass sich ein schon vorhandener Riss oder eine Fehlstelle, welche aus der Produktion bzw. den Wuchsmerkmalen des Holzes resultiert, unter einer Beanspruchung aufweitet und verlängert. Aufgrund des Faserverlaufs kann sich ein Riss im Holz in drei verschiedene Richtungen entwickeln (siehe Abb. 1.4a). Eine Belastung senkrecht zur Faser führt zu einem Aufreißen des Holzes nach Modus I. Schubkräfte in Längsrichtung des Holzes führen zu einem Schubversagen zwischen den Fasern nach Modus II. Die Schubbeanspruchung senkrecht zur Faser nach Modus III wird als Rollschub bezeichnet. In vielen Fällen tritt eine kombinierte Beanspruchung des Holzes nach Modus I und Modus II auf. Da die Rollschubfestigkeit des Holzes wesentlich geringer ist als die Schubfestigkeit längs zur Faser, sollte eine Beanspruchung in Modus III möglichst ganz vermieden werden. Eine Ausnahme gilt allerdings für das Brettsperrholz. Dort spielt der Rollschub beim Lastabtrag eine entscheidende Rolle, wie in Abschn. 2.3 gezeigt wird.

Liegt eine Beanspruchung senkrecht zur Faserrichtung vor, dann reagiert das Holz mit linear-elastischem Verhalten, bis die Querkzugfestigkeit  $f_{t,90}$  oder die maximale Dehnung  $\delta_1$  an der Rissspitze erreicht ist (siehe Abb. 1.4b). Bei Überschreitung der Festigkeit wird ein neuer Riss an dieser Stelle initiiert oder ein vorhandener Riss wird länger. Ab einer gewissen Risslänge kommt es zu einem unkontrollier-



**Abb. 1.4** (a) Beanspruchungsmoden und (b) beispielhafte Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei einer Beanspruchung in Modus I.



**Abb. 1.5** Eingeschnittener Balken mit zwei Einzellasten.

ten Anwachsen des Risses und zu einem Spröbruch ohne Vorankündigung. Die aufgebrachte Last kann nicht gehalten werden und das Bauteil versagt.

Die Bruchmechanik beschäftigt sich mit der Erfassung der oben beschriebenen Mechanismen. Die grundlegenden Zusammenhänge für querzugbeanspruchte Holzbauteile wurden von Per Johan Gustafsson (1988) zusammengestellt.

Die erforderlichen Gleichungen können anschaulich und beispielhaft für das in Abb. 1.5 dargestellte Bauteil hergeleitet werden. Die kritische Kraft  $F_{crit}$  ist dann erreicht, wenn ein im lastfreien Zustand bereits vorhandener Riss der Länge  $a$  unkontrolliert fortschreitet.

Das Gesamtpotenzial  $\Pi$  ergibt sich aus der Energiebilanz

$$\Pi = W_i - W_a + W_0, \quad (1.16)$$

mit

- $W_i$  Formänderungsenergie,
- $W_a$  äußere Arbeit,
- $W_0$  Energiefreisetzung.

Die beim Risswachstum in der Bruchfläche freigesetzte Energie  $W_0$  wird z. B. in Wärme und Schall umgewandelt.

Das Risswachstum erreicht den kritischen Wert  $a_c$  und geht in einen instabilen Bereich über, wenn das Maximum der Gesamtenergie erreicht ist (siehe Abb. 1.6a):

$$\frac{d\Pi}{dA} = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{d(W_a - W_i)}{dA} = \frac{dW_0}{dA} = G_c. \quad (1.18)$$

Die in diesem Zusammenhang definierte Griffith-Konstante  $G_c$  ist als Verhältnis der freigewordenen Energie zur Änderung der Bruchfläche definiert. Für das Beispiel aus Abb. 1.5 können die gespeicherte Energie  $W_i$  und die Arbeit der äußeren Lasten  $W_a$  mit der Biegesteifigkeit der Einzelquerschnitte ermittelt werden. Die Formänderungsenergie  $W_i$  wird über die Verformung der Einzelquerschnitte für  $u$  und  $u + du$  in Abb. 1.6b dargestellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Riss bereits instabil ist, d. h., er wächst, ohne dass die Kraft zunimmt. Damit ist die kritische Bruchlast  $F_{crit}$  erreicht.

Mit

$$u = 2 \cdot \frac{F \cdot a^3}{3 \cdot EI} \quad (1.19)$$

8 | 1 Theoretische Grundlagen

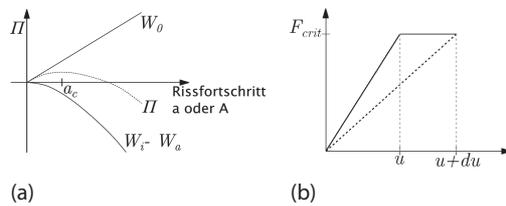


Abb. 1.6 (a) Energiebilanz und (b) Last-Verformungs-Beziehung beim Rissfortschritt.

und

$$I = \frac{b \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} = \frac{b \cdot h^3}{96} \quad (1.20)$$

lässt sich eine Ersatzfedersteifigkeit für die beiden Kragarme in Abb. 1.5 beschreiben:

$$c = \frac{1}{k} = \frac{u}{F} = 2 \cdot \frac{a^3}{3 \cdot EI} = 64 \cdot \frac{a^3}{E \cdot b \cdot h^3} . \quad (1.21)$$

Der Zuwachs der inneren Arbeit (Formänderungsenergie) ergibt sich aus der Differenz von

$$W_{i,u} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot u \quad (1.22)$$

und

$$W_{i,u+du} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot (u + du) \quad (1.23)$$

$$dW_i = W_{i,u+du} - W_{i,u} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot du . \quad (1.24)$$

Der Zuwachs der äußeren Arbeit lässt sich angeben als:

$$dW_a = F \cdot du . \quad (1.25)$$

Durch Einsetzen von Gln. (1.23) und (1.24) in Gl. (1.18) folgt mit

$$dA = b \cdot da \quad (1.26)$$

$$G_c = \frac{1}{b} \cdot \left( F \cdot \frac{du}{da} - \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{du}{da} \right) = F \cdot \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \frac{du}{da} . \quad (1.27)$$

Mit der Definition der Ersatzfedersteifigkeit

$$c = \frac{1}{k} = \frac{u}{F} \quad (1.28)$$

und deren Ableitung nach  $u$

$$\frac{dc}{du} = \frac{1}{F} , \quad (1.29)$$

erhält man

$$du = F \cdot dc . \quad (1.30)$$

Die Ableitung von Gl. (1.21) nach  $a$  ergibt

$$\frac{dc}{da} = \frac{3 \cdot a^2 \cdot 64}{E \cdot b \cdot h^3} . \quad (1.31)$$

Mit Gln. (1.30) und (1.31) in Gl. (1.27) eingesetzt, lässt sich eine Bezeichnung zwischen der kritischen Bruchlast und der Griffith-Konstanten angeben:

$$G_c = F_{crit}^2 \cdot \frac{dc}{da} \cdot \frac{1}{2 \cdot b} = \frac{F_{crit}^2 \cdot a^2 \cdot 96}{b^2 \cdot E \cdot h^3} . \quad (1.32)$$

Die zugehörige kritische Bruchlast beträgt:

$$F_{crit} = \sqrt{\frac{G_c \cdot b^2 \cdot E \cdot h^3}{96 \cdot a^2}} . \quad (1.33)$$

Folgende Bezeichnungen wurden für diese Herleitung verwendet:

$u$	Größe der Verformung zwischen den Kragträgern,
$b$	Breite der Rissfläche bzw. des Bauteils,
$a$	Abstand der Lasteinleitung zum Ende des Einschnitts,
$F$	aufgebrachte Last,
$E$	E-Modul des Werkstoffs,
$I$	Flächenträgheitsmoment des Einzelquerschnitts,
$k$	Federkennwert des Biegeträgers,
$c = 1/k$	Federsteifigkeit,
$du$	Änderung der Rissöffnung,
$da$	Änderung der Risslänge,
$dc$	Änderung der Ersatz-Federsteifigkeit,
$G_c$	Bruchenergie [ $\text{J}/\text{m}^2$ ] oder [ $\text{N}/\text{mm}$ ].

Die auf eine infinitesimale Fläche bezogene Energiefreisetzung kann als spezifische Bruchenergie aufgefasst werden. Die Größe der Griffith-Konstanten lässt sich über die Fläche unter dem Last-Verformungs-Diagramm nach Abb. 1.4b veranschaulichen. Hier wurde eine bilinear vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Beziehung verwendet, deren Flächeninhalt der spezifischen Bruchenergie entspricht. Die Bruchenergie des Holzes ist maßgeblich von der Rohdichte abhängig und liegt für Nadel- und Brettschichtholz etwa bei  $G_c = 0,3 \text{ N}/\text{mm}^2$  für Zugbeanspruchung senkrecht zur Faserrichtung. Die Bruchenergie wird aus Versuchen ermittelt.

Die Gleichung für die kritische Kraft  $F_{crit}$  zeigt, dass die maximal aufzubringende Kraft nicht direkt von der Querkzugfestigkeit des Materials abhängig ist. Die bestimmenden Werkstoffparameter sind die spezifische Bruchenergie und der E-Modul. Eine zweite Erkenntnis aus Gl. (1.33) ist die starke Abhängigkeit der Bruchlast von der Querschnittshöhe. Dies zeigt, dass ein reiner Spannungs-Festigkeits-Nachweis der Bauteilgeometrie am Riss nicht ausreicht, da sich ein Maßstabeffekt ergibt, der bei der Bemessung zu berücksichtigen ist.

### 1.2.3 Anwendung der Bruchmechanik

Die im vorgehenden Abschnitt ausführlich beschriebene Vorgehensweise kann nun auf konkrete statisch-konstruktive Randbedingungen angewandt werden. Gustafsson (1988) leitet für das in Abb. 1.7 dargestellte Auflager eines symmetrischen Trägers mit der Breite  $b$  die kritische Last her:

$$F_{crit} = \frac{b \cdot \alpha \cdot h \cdot \sqrt{\frac{G_c}{h}}}{\sqrt{\frac{0,6 \cdot (\alpha - \alpha^2)}{G_{xy}} + \beta \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (\frac{1}{\alpha} - \alpha^2)}{E_x}}}} \quad (1.34)$$

Dabei berücksichtigt er die elastischen Anteile aus der Biege- und Schubverformung des Trägers mit dem Elastizitätsmodul  $E_x$  und dem Schubmodul  $G_{xy}$  sowie die zusätzliche elastische Verformung im Bereich der Ausklinkung als Kragarm bis zur Rissspitze. Die Beiwerte  $\alpha$  und  $\beta$  beschreiben die Geometrie der Ausklinkung (siehe Band 1, Abschn. 2.8.3).

Dieser Term wird von Larsen et al. (1992) so umgestellt, dass die kritische Last als eine mit  $k_{vV}$  abgeminderte Schubtragfähigkeit des reduzierten Querschnitts definiert wird.

$$F_{crit} = k_{vV} \cdot f_V \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot h_{eff} \quad (1.35)$$

mit

$$k_{vV} = \frac{\frac{1,5}{f_V} \cdot \sqrt{G_c}}{\sqrt{h} \cdot \left( \sqrt{\frac{E_x}{G_{xy}} \cdot 0,6 \cdot (\alpha - \alpha^2)} + \beta \cdot \sqrt{6 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2\right)} \right)} \quad (1.36)$$

Aus Versuchen kann für das Verhältnis von Bruchenergie zur Schubfestigkeit ein Parameter  $k_n$  angegeben werden und im Nenner kann für das Verhältnis von  $E_x$  und  $G_{xy}$  der Wert 16 eingesetzt werden. Damit erhält man  $k_{vV}$  in der in EC5 verankerten Formulierung

$$k_{vV} = \frac{k_n}{\sqrt{h} \cdot \left( \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} + 0,8 \cdot \beta \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha} - \alpha^2} \right)} \quad (1.37)$$

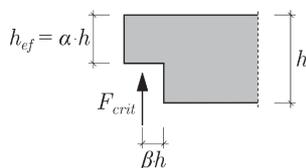


Abb. 1.7 Ausgeklinktes Trägerauflager.

## 1.3 Plastizitätstheorie

### 1.3.1 Einführung und Historie

Die Ermittlung von Schnittgrößen in Tragwerken und der daraus resultierenden Spannungen basiert auch heute noch fast ausschließlich auf der Elastizitätstheorie und auf den darauf aufbauenden baustatischen Verfahren, welche Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt wurden. Dies ist so, obwohl es in der Realität den bei der elastischen Berechnung vorausgesetzten Spannungsnullzustand nicht gibt, da die Tragelemente bei allen Konstruktionswerkstoffen herstellungsbedingte Eigenspannungen aufweisen. Bei Bauteilen aus Holz oder Holzwerkstoffen entstehen diese Eigenspannungen vor allem durch Quellen und Schwinden sowie durch die äußeren Kräfte, die bei der Herstellung von überhöhten oder gekrümmten Brettschichtholzträgern aufgebracht werden.

Erste Ansätze zur direkten Traglastberechnung gibt es seit Anfang des 20. Jahrhunderts, worüber Kurrer (2002) anschaulich und detailreich berichtet. Aus diesen ersten Ansätzen entwickelte sich die Plastizitätstheorie mit den beiden Grenzwertsätzen.

Der *kinematische Grenzwertsatz* definiert die Belastung eines Tragsystems, welches die Gleichgewichtsbedingungen und die geometrischen Randbedingungen mit einem kinematisch zulässigen Bewegungszustand erfüllt, als oberen Grenzwert der Traglast. Folgende Randbedingungen sind dabei zu beachten:

- Die Fließbedingung darf verletzt werden.
- Ein kinematisch zulässiger Bewegungszustand (Mechanismus) weist einen Freiheitsgrad auf.
- Widerstand und Bewegung des Bewegungszustands müssen dem Fließgesetz entsprechen.

Der *statische Grenzwertsatz* definiert die Belastung eines Tragsystems, welches die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllt, ohne die Fließbedingungen zu verletzen, als unteren Grenzwert der Traglast. Folgendes ist zu beachten:

- Kinematische Verträglichkeitsbedingungen dürfen verletzt werden.
- Für alle Lasten wird eine proportionale Laststeigerung vorausgesetzt, d. h., es sind gegebenenfalls alle Lastkombinationen einzeln zu untersuchen.
- Die Verformungsfähigkeit plastischer Zonen (Fließgelenke oder Fließflächen) muss gegeben sein.

Bei der aus dem Stahlbau bekannten Fließgelenktheorie werden die beiden Grenzwertsätze zusammengeführt, indem sowohl die Fließbedingung als auch die kinematische Verträglichkeit überprüft werden. Eine entscheidende Voraussetzung für die Anwendung plastischer Berechnungsverfahren ist die ausreichende Duktilität der entsprechenden Tragwerksbereiche. Dazu ist es erforderlich, dass die plastische Verschiebung oder Rotation ein Vielfaches der jeweils zugehörigen elastischen Verformung beträgt. Zusätzlich wird im Rahmen der sogenannten

12 | 1 Theoretische Grundlagen

Kapazitätsbemessung sichergestellt, dass das Tragwerk außerhalb der plastischen Bereiche mit ausreichender Überfestigkeit bemessen wird, sodass an keiner Stelle ein vorzeitiges sprödes Versagen eintritt.

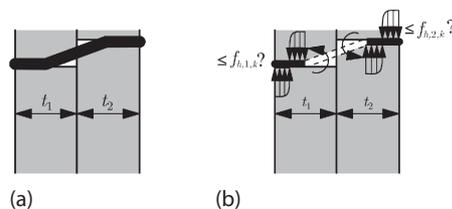
Obwohl Holz als Werkstoff mit sprödem Versagen gilt, wird auch im Holzbau auf die Plastizitätstheorie zurückgegriffen. Und zwar immer dann, wenn mit stiftförmigen Verbindungsmitteln aus Stahl duktile Anschlüsse realisierbar sind. Dies wird in den folgenden Abschnitten für den statischen und für den kinematischen Grenzwertsatz erläutert.

### 1.3.2 Anwendung des oberen Grenzwertsatzes

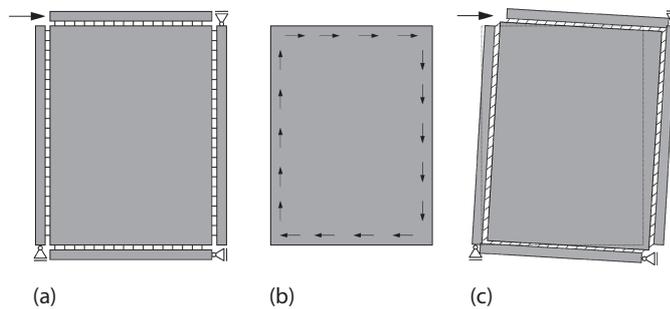
Von Knud Winstrup Johansen (1901–1978) wurden zwei ganz unterschiedliche Anwendungen des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie vorgestellt: für Stahlbetonplatten die Bruchlinientheorie und 1949 für den Holzbau eine Theorie für Verbindungsmittel. Diese Theorie liefert eine Grundlage für die Ermittlung des Tragwiderstands von Anschlüssen mit stiftförmigen Verbindungsmitteln, welche auf Abscheren beansprucht werden. In Band 1 wurde mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen beispielhaft die Tragfähigkeit für den Versagensmechanismus mit zwei Fließgelenken hergeleitet. Betrachtet man den in Abb. 1.8 dargestellten Versagensmechanismus mit zwei Fließgelenken etwas genauer, dann stellt man fest, dass bei der Ermittlung der Traglast die beiden äußeren Abschnitte des Stifts links und rechts der Fließgelenke völlig unberücksichtigt bleiben. Ob die durch die Leibungsfestigkeiten begrenzten Kontaktspannungen ausreichen, um in den beiden äußeren Teilen des Verbindungsmittels ein Gleichgewicht mit dem am Anschnitt vorhandenen Fließmoment herzustellen, wird nicht überprüft. Das entspricht exakt der Vorgehensweise bei der Anwendung des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie: Die Einhaltung der Fließbedingung darf verletzt werden und maßgebend wird der Mechanismus, welcher die geringste Traglast liefert. Diese Vorgehensweise findet sich auch wieder bei der Bruchlinientheorie für Stahlbetonplatten und bei der Gleitkreisberechnung in der Geotechnik. Auch dort werden die Fließbedingungen außerhalb der Fließlinie bzw. der Gleitfuge nicht überprüft.

### 1.3.3 Anwendung des unteren Grenzwertsatzes

Die Schubfeldtheorie, welche im Holzbau bei der Modellierung von Holztafeln ihre Anwendung findet, wurde ursprünglich von Hertel (1960) für den Flugzeugbau entwickelt. Für die Berechnung des Tragwiderstandes eines Schubfelds wird angenommen, dass zwischen den vier Randrippen und dem Schubfeld nur Kräfte pa-



**Abb. 1.8** Einschnittige Holz-Holz-Verbindung (a) Versagensmechanismus mit zwei Fließgelenken (b) Lochleibungsspannungen.



**Abb. 1.9** Schubfeldmodell: (a) statisches System, (b) Annahme Schubfluss und (c) Verformungen.

parallel zum Rand des Schubfeldes wirken und dass dieser Schubfluss konstant über die Länge der vier Seiten ist. Diese Zusammenhänge und das zugehörige statische System sind in Abb. 1.9 dargestellt. Versucht man zu diesem System mit einer äußeren Kraft am oberen Rand nun eine Verformungsfigur zu zeichnen, dann stellt man fest, dass in zwei Bereichen die Verträglichkeitsbedingungen verletzt sind: Zum einen überschneiden sich Kopf- und Randrippe rechts oben und links unten, zum anderen widerspricht die Relativverschiebung zwischen Rippen und Schubfeld der dort jeweils angesetzten Richtung des Schubflusses. Dies steht durchaus in Übereinstimmung mit der Theorie, denn der untere Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie, der hier angewandt wird, fordert keine kinematische Verträglichkeit. Es lässt sich zumindest qualitativ gut nachvollziehen, dass die Herstellung der kinematischen Verträglichkeit bei einem Schubfeld einen zusätzlichen Anteil am Tragwiderstand mobilisieren würde. In normativen Regelungen zum Tragwiderstand wird diesem Umstand mit einer pauschalen Erhöhung um 20 % Rechnung getragen. Im Fachschrifttum werden auch andere Begründungen angegeben: Porteous und Kermani (2013) sehen in dem Faktor einen Übergang vom 5 %- zum 20 %-Quantilwert, wie er beim Nachweis der Feuerwiderstandsdauer eingeführt wird. In den *Erläuterungen zur DIN 1052* (Blaß et al. 2005) wird ein „Vergütungseffekt“ entlang der Plattenränder angeführt.

#### 1.3.4 Kapazitätsbemessung

Die Übertragung von Rechenmodellen, welche auf der Grundlage der Plastizitätstheorie hergeleitet wurden, auf reale Tragwerke erfolgt im Rahmen einer Kapazitätsbemessung. Das Ziel dieser Bemessung ist es sicherzustellen, dass der in der Theorie vorausgesetzte plastische Mechanismus erreicht wird und das Tragwerk nicht an anderer Stelle vorzeitig versagt. Bei der Bemessung von Anschlüssen mit stiftförmigen Verbindungen werden in diesem Zusammenhang Mindestabstände für die einzelnen Verbindungsmittel definiert, um ein sprödes Versagen des Holzes im Anschlussbereich auszuschließen. Bei Wandtafeln gibt es mehrere am Lastabtrag beteiligte Tragelemente, deren Versagen durch die Kapazitätsbemessung ausgeschlossen werden soll. Dazu zählen die knickgefährdete Randrippe, die Holzwerkstoffplatte

14 | 1 Theoretische Grundlagen

als Schubfeld und die Zugverankerung. Für diese Tragelemente wird im Rahmen der Kapazitätsbemessung eine erhöhte Einwirkung  $E_{el}$  angesetzt, die sich aus dem charakteristischen Wert des Tragwiderstandes des plastisch verformten Tragelementes  $R_{pl}$  und einem Überfestigkeitswert  $\gamma_{Rd}$  zusammensetzt.

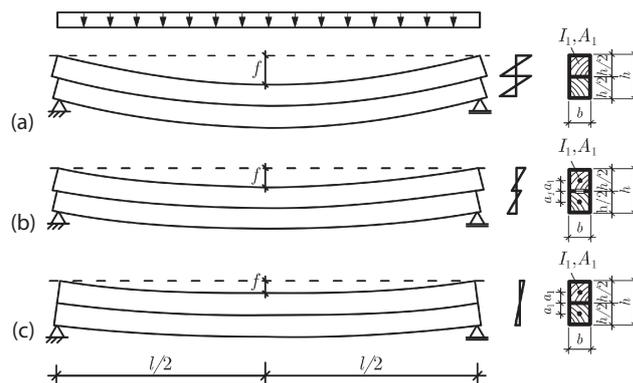
$$E_{el} = R_{pl} \cdot \gamma_{Rd} \tag{1.38}$$

Konkrete Regelungen zur Überfestigkeit finden sich in Abschn. 4.3 mit Bezug zur Auslegung von Tragwerken gegenüber Erdbebeneinwirkungen.

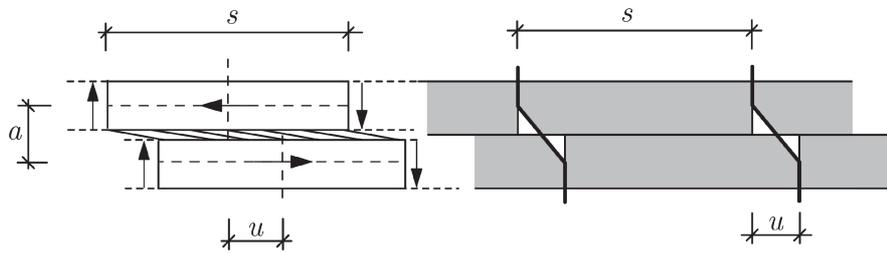
### 1.4 Berechnungsverfahren für zusammengesetzte Querschnitte – $\gamma$ -Verfahren

Die Wirkungsweise von zusammengesetzten Querschnitten wird in Abb. 1.10 für unterschiedliche Verbindungen der beiden Teilquerschnitte veranschaulicht; von der Tragwirkung der Einzelquerschnitte über den nachgiebigen zum starren Verbund. Es ist zu erkennen, dass das Ebenbleiben des Gesamtquerschnitts nur bei Bauteilen mit starrem Verbund gewährleistet ist. Bei Querschnitten mit nachgiebigem Verbund gilt die Bernoulli-Hypothese nicht, welche das Ebenbleiben der Querschnitte voraussetzt, und somit sind die Regeln der technischen Biegelehre auf diese Querschnitte nicht direkt anwendbar. Die Biegesteifigkeit von aufeinander gelegten Balken entspricht der Summe der Biegesteifigkeiten der Einzelquerschnitte, solange in der Kontaktfuge keine Schubkräfte übertragen werden.

Die Schnittgrößen nachgiebig miteinander verbundener Querschnitte können mit dem  $\gamma$ -Verfahren ermittelt werden. Dieses für die Handrechnung geeignete Verfahren wurde von Fritz Stüssi (1943) und Karl Möhler (1956) entwickelt. Es wurde für Einfeldträger mit gleichmäßigem Schubfluss und einer sinusförmigen Belastung hergeleitet, liefert aber auch für Einfeldträger unter Gleichstreckenlast eine ausreichend genaue Näherung. Von einem gleichmäßigen Schubfluss kann ausgegangen



**Abb. 1.10** Zusammenwirken von Querschnitten: (a) zwei Einzelquerschnitte ohne Verbund, (b) nachgiebiger Verbund und (c) starrer Verbund.



**Abb. 1.11** Definition von Kräften und Verschiebungen im Bereich der Verbundfuge.

werden, wenn die Verbindungsmittel in einem vergleichsweise geringen Abstand angeordnet werden.

Vereinfacht werden die im Abstand  $s$  angeordneten Verbindungsmittel zu einer kontinuierlichen Schubübertragung und der zugehörigen Steifigkeit der Verbundfuge umgerechnet (siehe Abb. 1.11):

$$v = \frac{F_v}{s}, \quad (1.39)$$

$$k = \frac{K}{s}. \quad (1.40)$$

Der Zusammenhang zwischen der Relativverschiebung  $u$  der Querschnittsteile und der zugehörigen Kraft wird dann mit folgender Gleichung beschrieben:

$$v = k \cdot u, \quad (1.41)$$

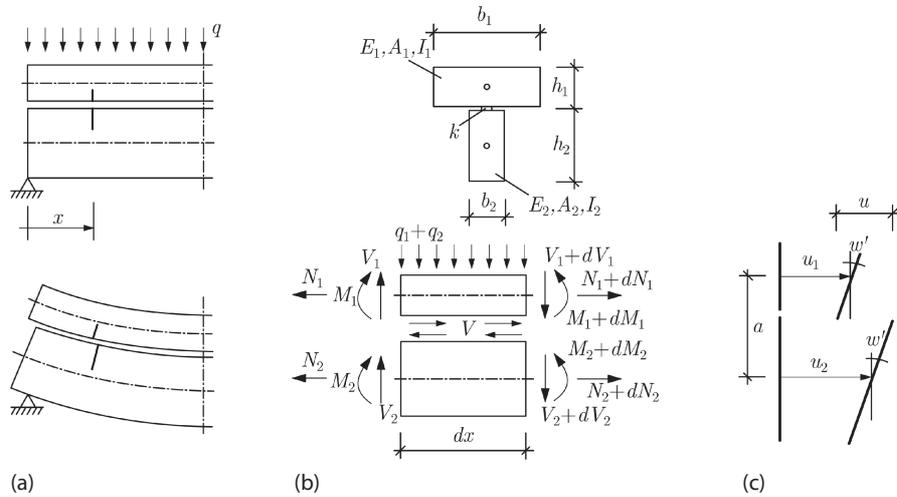
mit

- $F_v$  Scherkraft pro Verbindungsmittel,
- $s$  Abstand der Verbindungsmittel,
- $v$  Schubkraft pro Längeneinheit,
- $K$  Steifigkeit pro Verbindungsmittel bei Scherbeanspruchung,
- $k$  Steifigkeit der Verbundfuge pro Längeneinheit,
- $u$  Relativverschiebung der Querschnitte in der Verbundfuge.

Diese Angaben beziehen sich auf eine einreihige Anordnung der Verbindungsmittel. Werden mehrere Verbindungsmittel nebeneinander angeordnet, dann erhöht sich die Steifigkeit entsprechend.

Im Folgenden sollen anhand der Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittgrößen mit den zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen die Differenzialgleichungen für einen aus zwei Teilen bestehenden zusammengesetzten Querschnitt aufgestellt werden. Dabei wird angenommen, dass für jeden Teilquerschnitt die Bernoulli-Hypothese gilt. Die Abmessungen der einzelnen Querschnitte sind über die Länge der Stabachse konstant.

16 | 1 Theoretische Grundlagen



**Abb. 1.12** Verbundträger: (a) Seitenansicht im Auflagerbereich, (b) geometrische Größen und Schnittgrößen und (c) Definition der Relativverschiebung.

Die Relativverschiebung  $u$  der Querschnittsteile in der Höhe der Verbundfuge, wie sie in Abb. 1.12 definiert ist, ergibt sich zu

$$u = u_2 + w' \cdot \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) - u_1 = u_2 - u_1 + w' \cdot a, \quad (1.42)$$

mit

- $u_1, u_2$  Längsverschiebungen der Querschnitte 1 und 2,
- $w$  Durchbiegung des Verbundträgers und der Teilquerschnitte,
- $s$  Abstand der Schwerpunkte der Teilquerschnitte,
- $h_1, h_2, b_1, b_2$  Abmessungen der Teilquerschnitte,
- $A_1, A_2, I_1, I_2$  Querschnittsflächen und Flächenträgheitsmoment der Teilquerschnitte,
- $E_1, E_2$  Elastizitätsmodul der Teilquerschnitte.

Die Relativverschiebung  $u$  der einzelnen Querschnitte ist unabhängig von der Lage der Verbundfuge und wird nur durch den Abstand  $a$  der Schwerachsen der beiden Querschnitte beeinflusst. Die Schnittgrößen lassen sich auf Grundlage der Elastizitätsgesetze nach der Balkentheorie bestimmen.

$$N_1 = E_1 \cdot A_1 \cdot u'_1, \quad N_2 = E_2 \cdot A_2 \cdot u'_2 \quad (1.43)$$

$$M_1 = -E_1 \cdot I_1 \cdot w'', \quad M_2 = -E_2 \cdot I_2 \cdot w'' \quad (1.44)$$

$$V_1 = -E_1 \cdot I_1 \cdot w''', \quad V_2 = -E_2 \cdot I_2 \cdot w''' \quad (1.45)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung ergibt sich für das in Abb. 1.12 dargestellte Element:

$$N_1 - N_1 - dN_1 - v \cdot dx = 0 \Rightarrow N'_1 + v = 0. \quad (1.46)$$

1.4 Berechnungsverfahren für zusammengesetzte Querschnitte -  $\gamma$ -Verfahren | 17

$$N_2 - N_2 - dN_2 - v \cdot dx = 0 \Rightarrow N_2' + v = 0. \quad (1.47)$$

$$M_1 - M_1 - dM_1 + V_1 \cdot dx - v \cdot dx \cdot \frac{h_1}{2} + q_1 \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0, \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow M_1' = V_1 - v \cdot \frac{h_1}{2}.$$

$$M_2 - M_2 - dM_2 + V_2 \cdot dx - v \cdot dx \cdot \frac{h_2}{2} + q_2 \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0, \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow M_2' = V_2 - v \cdot \frac{h_2}{2}.$$

$$V_1 + V_2 - V_1 - dV_1 - V_2 - dV_2 - q \cdot dx = 0 \Rightarrow -q = V_1' + V_2'. \quad (1.50)$$

Einsetzen der Ableitung von Gln. (1.41)–(1.43) in Gln. (1.46) und (1.47) ergibt

$$E_1 A_1 \cdot u_1'' + k \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) = 0, \quad (1.51)$$

$$E_2 A_2 \cdot u_2'' + k \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) = 0. \quad (1.52)$$

Die Ableitung der Gln. (1.48) und (1.49) in Gl. (1.50) eingesetzt ergibt

$$M_1'' + M_2'' + q + v' \cdot a = 0 \quad (1.53)$$

und mit den Gln. (1.41), (1.42) und (1.44) folgt:

$$(E_1 I_1 + E_2 I_2) \cdot w'''' - k \cdot (u_2' - u_1' + w'' \cdot a) \cdot a = q. \quad (1.54)$$

Für eine sinusförmige Linienlast (siehe Abb. 1.13)

$$p = p_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \quad (1.55)$$

ergeben sich mit

$$w'''' = p(x) \quad (1.56)$$

folgende Ansatzfunktionen für die Verformungen:

$$u_1 = u_{10} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right), \quad (1.57)$$

$$u_2 = u_{20} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right), \quad (1.58)$$

$$w = w_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right). \quad (1.59)$$

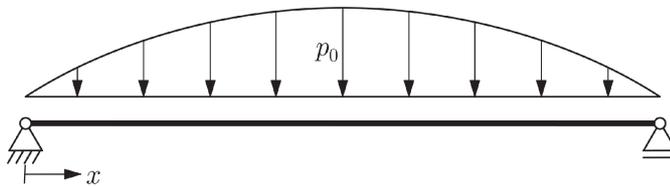
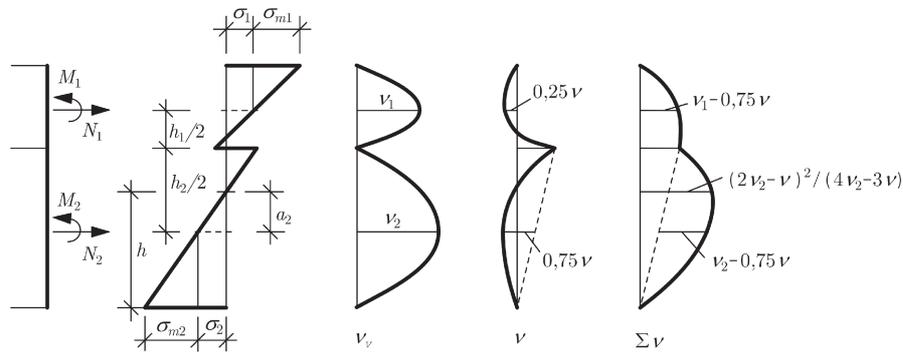


Abb. 1.13 Einfeldträger mit sinusförmiger Linienlast.



**Abb. 1.14** Verlauf der Biege- und Schubspannungen am unterteilten Verbundquerschnitt.

Durch Einsetzen und Umformen lassen sich die drei Unbekannten  $w_0$ ,  $u_{10}$  und  $u_{20}$  bestimmen:

$$w_0 = p_0 \cdot \frac{l^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(EI)_{ef}}, \quad (1.60)$$

$$u_{10} = w_0 \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \frac{a \cdot \gamma_1 \cdot E_2 A_2}{\gamma_1 \cdot E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad (1.61)$$

$$u_{20} = -w_0 \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \frac{a \cdot \gamma_1 \cdot E_1 A_1}{\gamma_1 \cdot E_1 A_1 + E_2 A_2}. \quad (1.62)$$

Der Beiwert  $\gamma$  kann als Abminderung des Steiner-Anteils angesehen werden. Bei zwei schubstarr miteinander verbundenen Querschnitten erhält man  $\gamma = 1,0$ .

Durch Einsetzen der Ableitungen der Gln. (1.57)–(1.59) in Gln. (1.43)–(1.45) können nun die auf die Teilquerschnitte und in der Verbundfuge wirkenden Schnittgrößen bestimmt und daraus die Spannungsverteilung ermittelt werden (siehe Abb. 1.14). Wegen der unterschiedlichen Querschnittsbreiten bietet es sich an, anstelle von Schubspannungen den Schubfluss zu verwenden.

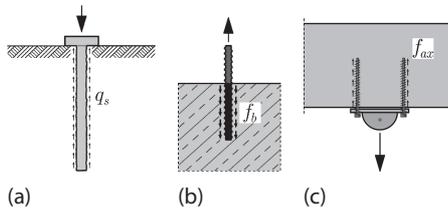
Dabei gilt für den Beiwert  $\gamma_1$ :

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \pi^2 \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{k_1 \cdot l^2}}. \quad (1.63)$$

Das  $\gamma$ -Verfahren wird in Abschn. 2.1.1 aufgegriffen und die Anwendung des Verfahrens wird dort erläutert.

## 1.5 Verschieblicher Verbund einer geklebten Verbindung

In ganz unterschiedlichen Situationen wird im Bauwesen der Verbund genutzt zwischen druck- oder zugbeanspruchten Stäben und dem Material, in welches diese Stäbe eingebettet sind. Die Mantelreibung von Bohrpfählen, die Verbundfestigkeit von Bewehrungsstählen im Stahlbetonbau und die Auszugfestigkeit von stiftförmigen Verbindungsmitteln im Holzbau (siehe Abb. 1.15) sind beispielhafte Anwendungen, bei denen für den Verbund ideal-plastisches Verhalten über die gesamte Hüllfläche



**Abb. 1.15** Beispiel für Verbundansätze mit plastischem Verhalten: (a) Bohrpfahl, (b) Bewehrungsstahl und (c) Vollgewindeschraube.

der Kontaktfuge vorausgesetzt wird. Diese vereinfachende Annahme geht davon aus, dass über die gesamte Verbundlänge eine ausreichende Verformungsfähigkeit ohne Festigkeitsverlust gegeben ist. Das ist bei einer vergleichsweise spröden Verbund-Schlupf-Beziehung, wie sie bei einer Verklebung mit ausreichend festen Klebstoffen zu beobachten ist, nicht mehr der Fall. Als Folge des spröden Verbundverhaltens kann z. B. bei der Bestimmung der Auszugsfestigkeit von in Holz eingeklebten Gewindestangen beobachtet werden, dass die Kraft, welche verankert werden kann, ab einer gewissen Einklebelänge nicht mehr zunimmt.

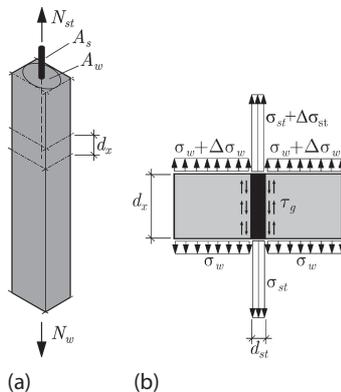
Ein vergleichbares Phänomen wurde bereits in den 1950er-Jahren von Volker sen (1953) im Zusammenhang mit Überlappungsstößen von genieteten Blechen beschrieben. Darauf aufbauend wurde von ihm eine Theorie des verschieblichen Verbunds entwickelt. Diese Theorie lässt sich sehr gut auf einen geklebten Verbund anwenden. Für das in Abb. 1.16 dargestellte differenzielle Stabelement lassen sich die Dehnungen, Spannungen und Normalkräfte für den eingeklebten Stab und das Holz angeben

$$\varepsilon_w = \frac{du_w}{dx} = u'_w, \quad \varepsilon_{st} = \frac{du_{st}}{dx} = u'_{st}, \quad (1.64)$$

$$\sigma_w = E_w \cdot \varepsilon_w = E_w \cdot u'_w, \quad \sigma_{st} = E_{st} \cdot \varepsilon_{st} = E_{st} \cdot u'_{st}, \quad (1.65)$$

$$N_w = \sigma_w \cdot A_w = (EA)_w \cdot u'_w, \quad N_{st} = \sigma_{st} \cdot A_{st} = (EA)_{st} \cdot u'_{st} \quad (1.66)$$

mit den zugehörigen Dehnsteifigkeiten  $EA$ . Während in diesem Zusammenhang die Fläche des Stahlstabs eindeutig durch dessen Durchmesser vorgegeben ist, muss für das Holz ein Bezugsquerschnitt definiert werden. Dafür wird in der Literatur meist



**Abb. 1.16** Eingeklebte Gewindestange mit verschieblichem Verbund: (a) Geometrie und (b) Spannungen am differenziellen Stabelement.

## 20 | 1 Theoretische Grundlagen

ebenfalls eine runde Fläche gewählt, deren Radius durch die minimalen seitlichen Abmessungen des Holzes begrenzt wird, in die der Stab eingeklebt wird.

Die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Querschnittsteile lauten:

$$N_w - (N_w + dN_w) + \tau_g \cdot \pi \cdot d_{st} \cdot dx = 0, \quad (1.67)$$

$$N_{st} - (N_{st} + dN_{st}) - \tau_g \cdot \pi \cdot d_{st} \cdot dx = 0. \quad (1.68)$$

Das führt direkt zu:

$$\frac{dN_w}{dx} = N'_w = -\tau_g \cdot \pi \cdot d_{st}, \quad (1.69)$$

$$\frac{dN_{st}}{dx} = N'_{st} = \tau_g \cdot \pi \cdot d_{st}. \quad (1.70)$$

Setzt man diese zwei Bedingungen in die zweite Ableitung der Relativverschiebung

$$\delta_{rel} = u_{st} - u_w, \quad (1.71)$$

$$\delta'_{rel} = u'_{st} - u'_w = \varepsilon_{st} - \varepsilon_w = \frac{N_{st}}{(EA)_{st}} - \frac{N_w}{(EA)_w}, \quad (1.72)$$

$$\delta''_{rel} = \frac{N'_{st}}{(EA)_{st}} - \frac{N'_w}{(EA)_w} \quad (1.73)$$

ein, dann erhält man

$$\delta''_{rel} = \tau_g \cdot \pi \cdot d_{st} \cdot \left( \frac{1}{(EA)_{st}} + \frac{1}{(EA)_w} \right). \quad (1.74)$$

Aufgrund der kleinen Verzerrungen gilt für die Schubspannung bei linear-elastischem Verhalten des Klebstoffs

$$\tau_g = \frac{G_g}{t_g} \cdot \delta_{rel}. \quad (1.75)$$

Damit erhält man die Differenzialgleichung für den verschieblichen Verbund:

$$\delta''_{rel} = \frac{G_g \cdot \pi \cdot d_{st}}{t_g} \cdot \left( \frac{1}{(EA)_{st}} + \frac{1}{(EA)_w} \right) \cdot \delta_{rel} \quad (1.76)$$

oder

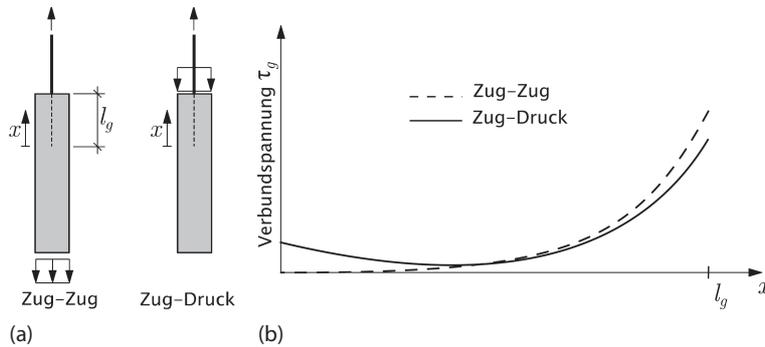
$$\delta''_{rel} - \omega^2 \cdot \delta_{rel} = 0, \quad (1.77)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{G_g}{t_g} \cdot \pi \cdot d_{st} \cdot \left( \frac{1}{(EA)_{st}} + \frac{1}{(EA)_w} \right) \quad (1.78)$$

Wählt man als Ansatzfunktion

$$\delta_{rel} = A_1 \cdot \cosh(\omega \cdot x) + A_2 \cdot \sinh(\omega \cdot x), \quad (1.79)$$



**Abb. 1.17** Eingeklebte Gewindestange mit verschieblichem Verbund: (a) Randbedingungen Zug-Zug und Zug-Druck und (b) Schubspannungsverlauf.

dann lassen sich für die in Abb. 1.17a dargestellten Fälle mit den zugehörigen Randbedingungen die beiden Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  bestimmen; für den Zug-Zug-Körper

$$A_1 = -\frac{P}{\omega} \cdot \left( \frac{1}{(EA)_w \cdot \sinh(\omega \cdot l_g)} + \frac{1}{(EA)_s \cdot \tanh(\omega \cdot l_g)} \right), \quad (1.80)$$

$$A_2 = \frac{P}{\omega} \cdot \frac{1}{(EA)_{st}} \quad (1.81)$$

und für den Zug-Druck-Körper

$$A_1 = -\frac{P}{\omega} \cdot \frac{1}{(EA)_w \cdot \tanh(\omega \cdot l_g)} \cdot \left( \frac{1}{(EA)_{st}} + \frac{1}{(EA)_w} \right), \quad (1.82)$$

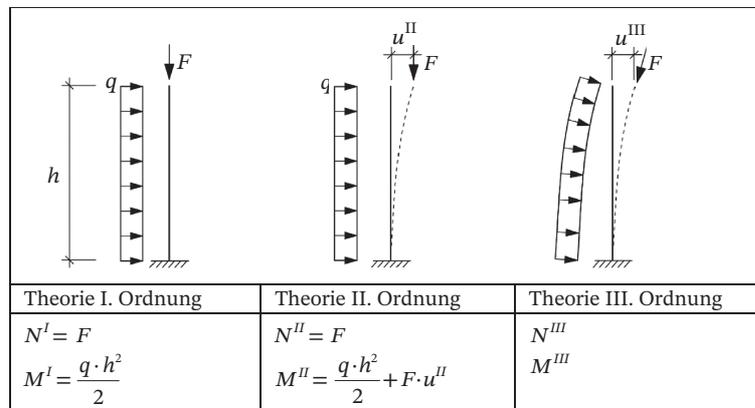
$$A_2 = \frac{P}{\omega} \cdot \left( \frac{1}{(EA)_{st}} + \frac{1}{(EA)_w} \right). \quad (1.83)$$

Damit ist der Verlauf der Schubspannungen über die gesamte Länge der Klebefuge bekannt.

In Abb. 1.17b wurden Gln. (1.75)–(1.79) für unterschiedliche Randbedingungen ausgewertet. Es wird deutlich, dass der Spannungsverlauf ausgeprägt nichtlinear ist und dass ab einer gewissen Länge der Klebefuge die Spannungen sehr klein werden. Wie diese Zusammenhänge in gleichermaßen zuverlässige wie praxistaugliche Bemessungskonzepte überführt werden können, wird schon seit einiger Zeit kontrovers diskutiert (siehe Steiger et al. 2007 und Widmann et al. 2007). In den Abschn. 3.4 und 3.5 werden zu einigen wichtigen Anwendungen normative Regelungen für einen geklebten Verbund vorgestellt.

## 1.6 Berechnung nach Theorie II. Ordnung

Zur Ermittlung der Tragsicherheit stabilitätsgefährdeter Tragelemente und Tragsysteme kann im Holzbau das Ersatzstabverfahren angewandt werden. Bei diesem Verfahren werden mit den Beiwerten  $k_c$  für Knicken und  $k_{crit}$  (früher  $k_m$ ) für Kippen



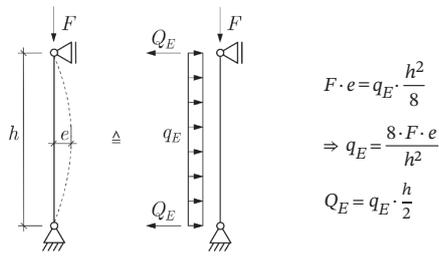
**Abb. 1.18** Berechnung nach Theorie I., II. und III. Ordnung – schematischer Vergleich.

Übergänge zwischen den von den Materialfestigkeiten abhängigen Querschnittstragfähigkeiten und den von Festigkeiten unabhängigen kritischen Knick- und Kipplasten definiert. Für Systeme, die aus mehreren Stäben zusammengesetzt sind, wurde das Ersatzstabverfahren mithilfe von angepassten Knicklängen anwendbar gemacht; ebenso für kippggefährdete Träger, bei denen unterschiedliche Auflagerbedingungen und Schnittgrößenverläufe in die Berechnung der Kipplängen eingehen. Diese Zusammenhänge wurden im Band 1, Abschn. 2.5 bereits erläutert.

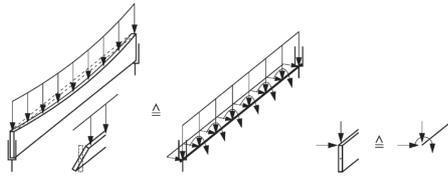
Bei größeren – aus mehreren Stäben zusammengesetzten – Systemen wird die Ermittlung der Ersatzstablänge relativ aufwendig und teilweise auch sehr abstrakt. Gleichzeitig liefern auch einfache Stabwerksprogramme quasi „auf Knopfdruck“ Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung. Mit diesen am verformten System berechneten Schnittgrößen können Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) direkt geführt werden. Abbildung 1.18 fasst die Unterschiede der Methoden nach Theorie I., II. und III. Ordnung schematisch zusammen. Bei der Berechnung nach Theorie III. Ordnung wird zusätzlich berücksichtigt, dass sich die Richtung der Einwirkungen durch die Verformungen des Systems ändert.

Zum Einstieg in die Berechnung von Schnittgrößen am verformten System muss eine Vorverformung definiert werden. Ohne Vorverformung sind die Schnittgrößen nach Theorie I. und II. Ordnung identisch. Reale Tragelemente sind normalerweise nicht perfekt und weisen deshalb – herstellungs- oder auch transportbedingt – Abweichungen von den vorgegebenen Systemlinien auf. Diese Abweichungen werden als Imperfektionen bezeichnet und sind in den Konstruktionsnormen festgelegt (siehe Abb. 1.20). Diese Imperfektionen könnten beim geometrischen Modell des Tragwerks direkt durch gekrümmte und schräg stehende Stäbe berücksichtigt werden. Einfacher und vom Ergebnis her gleichwertig ist es, wenn anstelle der Imperfektionen Ersatzkräfte in die Berechnung eingeführt werden. Abbildung 1.19 zeigt dieses Vorgehen am Beispiel eines beidseitig gelenkig gelagerten Druckstabs und schematisch für den kippggefährdeten Einfeldträger.

Mit der Vorgabe der Imperfektion bzw. der entsprechenden Ersatzlast liegt der Startwert für die iterative Berechnung der Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung



(a)



(b)

**Abb. 1.19** Ersatzkräfte für Imperfektionen: (a) Druckstab und (b) kippgefährdeter Träger.

fest. Für einfache System können die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung ohne Weiteres von Hand ermittelt werden. Für den beidseitig gelenkig gelagerten Druckstab aus Abb. 1.19 lassen sich die Durchbiegungen schrittweise berechnen, indem der Verformung in Stabmitte immer wieder der zusätzliche Anteil aus dem Biegemoment des vorhergehenden Iterationsschrittes zugeschlagen wird.

*Ausgangswerte*

$$u^0 = e, \tag{1.84}$$

$$q_e^0 = \frac{8 \cdot F \cdot e}{h^2}, \tag{1.85}$$

$$M^0 = \frac{8 \cdot F \cdot e}{h^2} \cdot \frac{h^2}{8} = F \cdot e. \tag{1.86}$$

*1. Iteration*

$$u^{II,1} = e + \frac{5}{384} \cdot \frac{8 \cdot F \cdot e}{h^2} \cdot \frac{h^4}{EI} = e \cdot \left( 1 + \frac{40}{384} \cdot \frac{F \cdot h^2}{EI} \right), \tag{1.87}$$

$$q^{II,1} = 8 \cdot F \cdot e \cdot \left( \frac{1}{h^2} \cdot \frac{40}{384} \cdot \frac{F}{EI} \right). \tag{1.88}$$

*2. Iteration*

$$u^{II,2} = e + \frac{40}{384} \cdot F \cdot e \cdot \left( \frac{1}{h^2} + \frac{40}{384} \cdot \frac{F}{EI} \right) \cdot \frac{h^4}{EI} \tag{1.89}$$

$$= e \cdot \left( 1 + \frac{40}{384} \cdot \frac{F \cdot h^2}{EI} + \left( \frac{40}{384} \cdot \frac{F \cdot h^2}{EI} \right)^2 \right),$$

$$q^{II,2} = \dots \tag{1.90}$$

*n. Iteration*

$$u^{II,n} = e \cdot (1 + a + a^2 + a^3 \dots), \tag{1.91}$$

24 | 1 Theoretische Grundlagen

mit  $a = \frac{40}{384} \cdot \frac{F \cdot h^2}{EI}$ .

Für  $n \rightarrow \infty$  ist dies eine geometrische Reihe und die Verformung in Stabmitte nach Theorie II. Ordnung liegt fest mit

$$u^{II} = e \cdot \frac{1}{1-a} \tag{1.92}$$

Das zugehörige Biegemoment beträgt

$$M^{II} = \frac{F \cdot e}{1-a} \tag{1.93}$$

Die kritische Last  $F_{crit}$  wird erreicht, wenn  $M \rightarrow \infty$ . Das ist der Fall, wenn  $a \rightarrow 1$ :

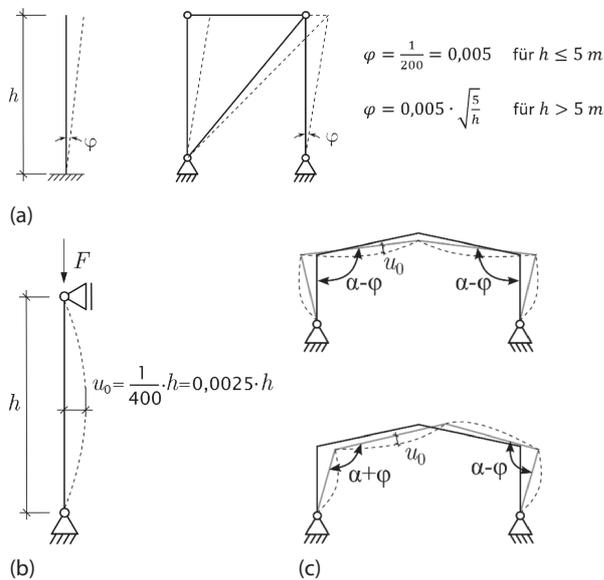
$$\frac{40}{384} \cdot \frac{F_{crit} \cdot h^2}{EI} = 1 \tag{1.94}$$

Die kritische Last, also die Knicklast, lässt sich somit angeben zu:

$$F_{crit} = \frac{40}{384} \cdot \frac{EI}{h^2} \cong \pi^2 \cdot \frac{EI}{h^2} \tag{1.95}$$

Der Unterschied zur genauen Knicklast nach Euler beträgt weniger als 3% und ist darauf zurückzuführen, dass anstelle einer sinusförmigen eine parabelförmige Verformungsfigur angenommen wurde.

Für die praktische Anwendung der Berechnungsverfahren nach Theorie II. Ordnung sind konkrete Werte für Imperfektionen in Abb. 1.20 angegeben. Bei Systemen



**Abb. 1.20** Imperfektionen: (a) Schiefstellung, (b) Vorkrümmung und (c) Überlagerung von Schiefstellung und Vorkrümmung.

**Tab. 1.1** Verformungsmoduln für die Schnittgrößenermittlung nach Theorie II. Ordnung.

	Elastizitätsmodul $E_d$	Schubmodul $G_d$	Verschiebungsmodul $K_d$
Ohne Kriechen <sup>a)</sup>	$\frac{E_{mean}}{\gamma_m}$	$\frac{G_{mean}}{\gamma_m}$	$\frac{K_u}{\gamma_m}$
Mit Kriechen <sup>a)</sup>	$\frac{E_{mean}}{\gamma_m \cdot (1 + k_{def})}$	$\frac{G_{mean}}{\gamma_m \cdot (1 + k_{def})}$	$\frac{K_u}{\gamma_m \cdot (1 + k_{def})}$

a) Zu berücksichtigen ist der Kriecheinfluss bei druckbeanspruchten Bauteilen in der Nutzungsklasse 2 und wenn der Bemessungswert des quasiständigen Lastanteils größer als 70 % des Bemessungswertes der Gesamtlast ist.

mit mehreren Stäben sind Imperfektionen – in Analogie zu den äußeren Einwirkungen – immer in die Richtung anzusetzen, in der sie die Schnittgrößen vergrößern. Daraus kann schnell eine große Anzahl unübersichtlicher Imperfektionskombinationen werden, welche von einem kommerziellen Rechenprogramm zuverlässig beherrscht werden sollten.

Der Übergang von charakteristischen Werten zu Bemessungswerten der Tragfähigkeit könnte bei großen Schlankheiten umgesetzt werden, indem ein charakteristischer Wert der Knicklast

$$F_{crit,k} = \pi^2 \cdot \frac{E_{0,05} \cdot I}{h^2} \quad (1.96)$$

mit dem gewohnten Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_m$  zu einem Bemessungswert des Tragwiderstandes

$$F_{crit,d} = \pi^2 \cdot \frac{E_{0,05} \cdot I}{\gamma_m \cdot h^2} \quad (1.97)$$

wird.

Die Auswirkung von Kriechverformung auf die Schnittgrößen könnten berücksichtigt werden, indem man – wie bei der Verformungsberechnung – die Steifigkeit für den entsprechenden Lastanteil mit  $k_{def}$  abmindert.

Tabelle 1.1 fasst die aktuellen normativen Regelungen zusammen. Bei den Steifigkeiten dürfen demnach die durch  $\gamma_m$  abgeminderten Mittelwerte angesetzt werden, bei Verbindungen die mit  $\gamma_m$  abgeminderten Verschiebungsmoduln  $K_u$ .

Für den Spannungsnachweis kann die im Band 1, Abschn. 2.5.4 vorgestellte Interaktionsbedingung mit quadratischem Normalspannungsanteil verwendet werden.

## Literatur

- Blaß, H.J., Ehlbeck, J., Kreuzinger, H. und Steck, G. (2005). *Erläuterungen zu DIN 1052: 2004–2008*, 2. Aufl. DGfH, München/Karlsruhe: Bruderverlag.
- Colling, F. (1990). Tragfähigkeit von Biegeträgern aus Brettschichtholz in Abhängigkeit von den festigkeitsrelevanten Einflussgrößen. Dissertation, TH Karlsruhe.
- Foschi, R.O. und Barrett, J.D. (1980). Glued-laminated beam strength: A model. *J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng.* 106 (ST8): 1735–1754.
- Gustafsson, P.J. (1988). A study of strength of notched beams. Proceedings of 21st Meeting of CIB-W18, Parksville, Canada, 1988.
- Hansson, M. und Thelandersson, S. (2003). Capacity of timber roof trusses considering statistical system effects. *Holz als Roh- und Werkstoff* 61 (3): 161–166.
- Hertel, H. (1960). *Bauelemente, Bemessung und Konstruktionen von Flugzeugen und anderen Leichtbauwerken*. Springer-Verlag.
- Isaksson, T. (2003). Structural timber – Variability and statistical modelling. In: *Timber Engineering*, (Hrsg. S. Thelandersson und H.J. Larsen), S. 45–66. John Wiley & Sons.
- Johansen, K.W. (1949). Theory of timber connections. *Int. Assoc. Bridge Struct. Eng.* 9: 249–262.
- Kurrer, K. E. (2002). *Geschichte der Baustatik*. John Wiley & Sons.
- Larsen, H.J., Riberholt, H. und Gustafsson, P.J. (1992). Annex to paper CIB-W18, S. 25–102. 25-102-1: Eurocode 5 – Design of notched beams.
- Möhler, K. (1956). Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetzten Querschnitten und nachgiebigen Verbindungsmitteln. Dissertation, TH Karlsruhe.
- Porteous, J. und Kermani A. (2013). *Structural Timber Design to Eurocode 5*, 2. Aufl. Wiley-Blackwell.
- Serrano, E., Gustafsson, J. und Larsen, H.J. (2001). Modeling of finger-joint failure in glued-laminated timber beams. *J. Struct. Eng.* 127 (8): 914–921.
- Steiger, R., Gehri, E. und Widmann, R. (2007). Pull-out strength of axially loaded steel rods bonded in glulam parallel to the grain. *Mater. Struct.* 40 (1): 69–78.
- Stüssi, F. (1943). Beiträge zur Berechnung und Ausbildung zusammengesetzter Vollwandträger. *Schweiz. Bauzeit.* 61: 87–89 und 102–103.
- Volkersen, O. (1953). Die Schubkraftverteilung in Leim-, Niet- und Bolzenverbindungen. *Energ. Techn.* 68: 68–71, 103–108 und 150–154.
- Widmann, R., Steiger, R. und Gehri, E. (2007). Pull-out strength of axially loaded steel rods bonded in glulam perpendicular to the grain. *Mater. Struct.* 40 (8): 827–838.