1
Einführung

Moderne Maschinen- und Luftfahrtsysteme sind oft sehr komplex und bestehen aus vielen Komponenten, die durch Gelenke und Kraftelemente wie Federn, Dämpfer und Stellglieder miteinander verbunden sind. In der modernen Literatur nennt man solche Systeme **Mehrkörpersysteme**. Beispiele dafür sind Maschinen, Anlagen, Roboter, Fahrzeuge, räumliche Tragwerke und biomechanische Systeme. Die Kinetik eines solchen Systems ist durch oft komplizierte Beziehungen bestimmt, die sich aus der Relativbewegung und den Verbindungskräften zwischen den Systemkomponenten ergeben. Abbildung 1.1 zeigt einen hydraulischen Bagger, den man als Beispiel für ein Mehrkörpersystem aus vielen Komponenten verstehen kann. Beim Entwurf eines solchen Kettenfahrzeugs muss sich der Ingenieur (oder die Ingenieurin) mit vielen ineinander verflochtenen Fragen zur Bewegung und den Kräften der einzelnen Komponenten der Maschine befassen. Beispiele für solche Fragen sind etwa: Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Fahrgeschwindigkeit des Baggers und der Bewegung der Raupenketten? Welchen Einfluss haben die Kontaktkräfte zwischen den Verbindungsgliedern der Raupenketten und den Baggerkomponenten auf die Bewegung des Systems? Welche Wirkung haben die Reibungskräfte zwischen den Raupenketten und dem Untergrund auf die Bewegung und die Leistung des Baggers? Wie beeinflusst die Wechselwirkung zwischen der Kette und dem Boden die Dynamik des Baggers und wie lassen sich die Bodeneigenschaften charakterisieren? Wie hängen die Kräfte und die Maximalgeschwindigkeit des Baggers von der Geometrie der Kettenglieder ab? Solche und viele andere wichtige Fragen müssen angesprochen werden, bevor der Entwurf des Baggers abgeschlossen ist. Um die vielen ineinander verflochtenen Fragen sauber beantworten zu können, ist es nötig, ein detailliertes dynamisches Modell eines solchen komplexen Systems zu erstellen. In diesen Buch behandeln wir die Entwicklung der dynamischen Gleichungen für ein komplexes Mehrkörpersystem wie den Raupenkettenbagger aus Abb. 1.1 in allen Einzelheiten. Die hier vorgestellten Verfahren erlauben es der Leserin und dem Leser[1)], die kinematischen und dynamischen Gleichungen für große mecha-

1) Um den Text durch solche Formulierungen nicht zu schwerfällig werden zu lassen, wird in Zukunft auf die explizite Nennung beider Geschlechter verzichtet. Alle Leser*innen* dieses Buches mögen sich bitte auch bei dem Wort „Leser“ mit angesprochen fühlen – gemeint sind sie auf jeden Fall. (Anm. d. Übers.)

Einführung in die Mehrkörpersimulation, 1. Auflage. Ahmed A. Shabana.

Abb. 1.1 Hydraulischer Raupenkettenbagger. (Foto mit freundlicher Genehmigung der Komatsu Ltd.)

nische Systeme und Fluggeräte aus mehreren miteinander verbundenen Körpern systematisch aufzubauen. Auch das Vorgehen zum Lösen der sich ergebenden gekoppelten nichtlinearen Gleichungen wird diskutiert.

1.1 Mehrkörpersimulation

In der Vergangenheit führte man die Untersuchung von Maschinen- und Luftfahrtsystemen meist mithilfe grafischer Verfahren durch. Computergestützte Verfahren spielten damals eine nur geringe Rolle, weil es keine leistungsstarken Rechner gab. Man interessierte sich hauptsächlich für die Untersuchung von Systemen aus einer relativ kleinen Anzahl von Körpern, sodass man die gewünschten Lösungen mithilfe von grafischen Verfahren oder händischen Rechnungen erhalten konnte. Erst das Aufkommen von Hochgeschwindigkeitsrechnern machte es möglich, auch komplexe Systeme aus einer großen Anzahl von Körpern und Gelenken zu untersuchen. Dazu wurden klassische Ansätze auf Basis der **Newton'schen** und der **Lagrange'schen Mechanik** wiederentdeckt und in eine für die Verwendung mit digitalen Hochgeschwindigkeitscomputern geeignete Form gebracht.

Obwohl die zugrunde liegenden Theorien bei der Entwicklung von Computeralgorithmen für die Untersuchung von Maschinen- und Luftfahrtsystemen dieselben sind wie in den klassischen Ansätzen, müssen Ingenieure und Wissenschaftler heutzutage außerdem weitreichende Kenntnisse der Matrizenrechnung und numerischer Verfahren erwerben, um die Computertechnik effizient nutzen zu können. Dieses Buch führt in die klassischen und modernen Ansätze ein, die bei der kinematischen und dynamischen Untersuchung von mechanischen Systemen und Fluggeräten aus mehreren miteinander verbundenen *starren* Körpern bestehen. Das Hauptaugenmerk der Darstellung liegt auf der Modellierung von allgemeinen Mehrkörpersystemen und der Herleitung der Zusammenhänge, die die dynamische Bewegung solcher Systeme bestimmen. Das Ziel ist es, allgemeine Verfahren zu entwickeln, die sich auf eine große Klasse von Mehrkörpersystemen anwenden lassen. Dabei werden viele grundlegende und Computerprobleme behandelt, um die Vorzüge und Beschränkungen der verschiedenen Verfahren anzusprechen, die beim Formulieren und Lösen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen verwendet werden. Dies ist das Thema des allgemeinen Bereichs der *computational dynamics* (man übersetzt diesen Begriff meist mit **Computerdynamik** oder **Mehrkörpersimulation**), die sich mit der computergestützten Lösung der Bewegungsgleichungen von großen Systemen befasst.

Die Rolle der Computerdynamik besteht vor allem darin, die Werkzeuge bereitzustellen, die man für die dynamische Simulation von Mehrkörpersystemen benötigt. Für die Untersuchung und computergestützte Simulation eines gegebenen Systems lassen sich verschiedene Werkzeuge verwenden. Dies ist hauptsächlich dem Umstand geschuldet, dass die Form der kinematischen und dynamischen Gleichungen, die die Dynamik eines Mehrkörpersystems bestimmen, nicht eindeutig ist; daher ist es wichtig, diejenigen Werkzeuge und diejenige Form der Bewegungsgleichungen zu wählen, die sich für die jeweilige Anwendung am besten eignen. Das ist eine nicht immer einfache Aufgabe, die eine große Vertrautheit mit den verschiedenen Formulierungen und Prozeduren voraussetzt, die im allgemeinen Bereich der Computerdynamik verwendet werden. Die Form der Bewegungsgleichungen hängt von der Wahl der Koordinaten ab, die man zur Definition der Systemkonfiguration verwendet. Man kann eine kleine oder große Anzahl von Koordinaten wählen. Vom numerischen Standpunkt her hat jede Wahl ihre Vorzüge und Nachteile: Die Wahl einer kleinen Anzahl von Koordinaten führt immer zu einem komplizierten Gleichungssystem; sie hat aber den Vorzug, dass nur eine geringe Anzahl von Gleichungen gelöst werden muss. Die Wahl einer großen Anzahl von Koordinaten andererseits hat den Vorzug, dass sich einfachere und weniger stark gekoppelte Gleichungen ergeben – um den Preis, dass die Dimension des Problems steigt. Das Hauptaugenmerk dieses Buches liegt auf der Herleitung und Anwendung von verschiedenen Formen der Bewegungsgleichungen. Einige Formulierungen führen auf ein großes System von Gleichungen, die mithilfe von redundanten Koordinaten ausgedrückt werden; andere hingegen führen auf ein kleines Gleichungssystem, das sich mit dem minimalen Satz von Koordinaten ausdrücken lässt. Vorzüge und Nachteile jeder dieser Formulierungen bei der Betrachtung von Mehrkörpersystemen mit Zwangsbedingungen werden detailliert diskutiert.

Allgemein lassen sich Mehrkörpersysteme einteilen in **starre Mehrkörpersysteme** und **flexible Mehrkörpersysteme**. Starre Mehrkörpersysteme sollen nur aus starren Körpern bestehen, die durch masselose Federn, Dämpfer und/oder Stellglieder (Aktoren) verbunden sind. Mit anderen Worten: Wenn man starre Mehrkörpersysteme betrachtet, sollen die einzigen Komponenten, die Trägheit aufweisen, starre Körper sein. Flexible Mehrkörpersysteme hingegen enthalten sowohl starre als auch verformbare Körper. Verformbare Körper zeigen Trägheit und eine Elastizität, die von den Deformationen abhängt. Wenn sich der verformbare Körper bewegt, ändert sich seine Form, und seine Trägheits- und seine elastischen Eigenschaften werden zu Funktionen der Zeit. Daher ist die Untersuchung von verformbaren Körpern schwieriger als die von starren Körpern. In diesem Buch werden wir nur den Zweig der Mehrkörpersimulation betrachten, der sich mit starren Mehrkörpersystemen befasst. Die Theorie der flexiblen Mehrkörpersysteme werden von mir in einem spezielleren Buch (Shabana, 2005) behandelt.

1.2 Bewegungen und Zwangsbedingungen

Systeme wie Maschinen, Anlagen, Roboter, Fahrzeuge, Raumfahrzeuge und biomechanische Systeme bestehen aus vielen Körpern, die durch unterschiedliche Arten von Gelenken miteinander verbunden sind, sowie verschiedenen Arten von Kraftelementen wie Federn, Dämpfer und Stellglieder. Die Gelenke dienen häufig dazu, die Beweglichkeit des Systems zu beeinflussen und die Bewegung der Systemkomponenten auf bekannte, vorgegebene Richtungen zu beschränken. Mithilfe der Gelenke und Kraftelemente werden Mehrkörpersysteme dafür entworfen, bestimmte Aufgaben zu erfüllen; einige dieser Aufgaben sind ganz einfach, andere können ziemlich kompliziert sein und die Verwendung ganz bestimmter Typen von mechanischen Verbindungen sowie ausgeklügelte Steuerungsalgorithmen erfordern. Daher ist es schon in der Entwurfsphase wesentlich, die Dynamik solcher Systeme zu verstehen, und das ist erst recht bei der Leistungsbewertung und Konstruktionsverbesserungen notwendig. Um die Dynamik eines Mehrkörpersystems zu verstehen, muss man die Bewegung seiner Komponenten untersuchen. In diesem Abschnitt behandele ich einige der grundlegenden Konzepte und Definitionen, die für die Beschreibung der Bewegung von starren Körpern verwendet werden, und führe Beispiele für Gelenke ein, die bei der Anwendung von Mehrkörpersystemen verbreitet sind.

Bewegungen ohne Zwangsbedingungen

Die Bewegung eines starren Körpers setzt sich zusammen aus Translationen und Rotationen. Die Untersuchung einer reinen **Translationsbewegung** ist relativ einfach, und die dynamischen Beziehungen, denen diese Art der Bewegung unterliegt, sind vollständig verstanden. Eine **finite Rotation** hingegen ist nicht so einfach, weil die Rotation großer starrer Körper zu **geometrischen Nichtlinea-**

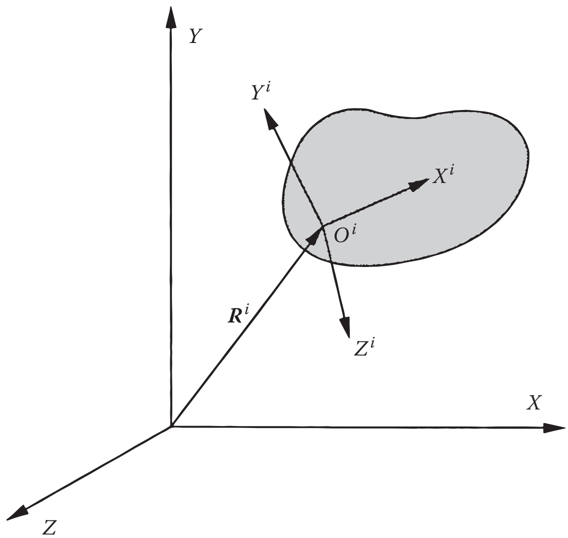


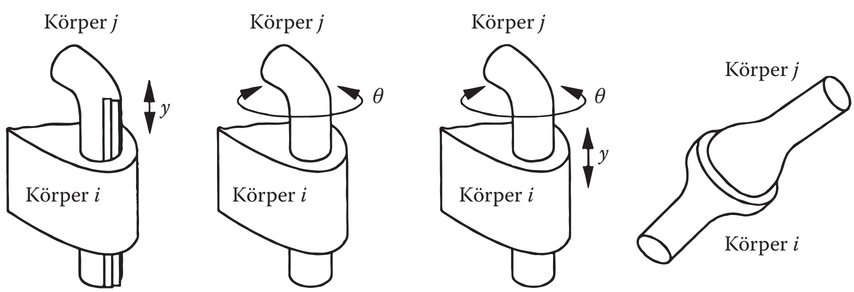
Abb. 1.2 Bewegung eines starren Körpers.

ritäten führen kann. Abbildung 1.2 zeigt einen starren Körper, hier als Körper i bezeichnet. Die allgemeine Bewegung dieses Körpers lässt sich bequem in einem Inertialsystem mit den Koordinaten XYZ beschreiben, indem man das Körpersystem $X^iY^iZ^i$ einführt, dessen Ursprung O^i fest mit einem Punkt des starren Körpers verbunden ist. Die allgemeine Bewegung des starren Körpers lässt sich dann mithilfe der Translation des **Referenzpunkts** O^i und einem Satz von Koordinaten beschreiben, die die Orientierung des Körpersystems bezüglich des inertialen Bezugssystems angeben. Beispielsweise kann man die allgemeine ebene Bewegung dieses Körpers mithilfe von drei unabhängigen Koordinaten angeben, die die Translation des Körpers entlang der X- und der Y-Achse sowie dessen Rotation um die Z-Achse definieren. Die zwei Translations- und die eine Rotationskomponente sind drei unabhängige Koordinaten, weil jede von ihnen sich beliebig ändern lässt, wenn die jeweils anderen beiden fest sind. Der Körper lässt sich entlang der X-Achse verschieben, wobei seine Auslenkung entlang der Y-Achse und seine Rotation um die Z-Achse fest bleiben.

Bei einer räumlichen Analyse ist die Konfiguration eines starren Körpers, der sich ohne Nebenbedingungen im dreidimensionalen Raum bewegt, durch die Angabe von sechs Koordinaten eindeutig festgelegt. Drei Koordinaten beschreiben die Translationen des Körpers entlang der drei paarweise senkrecht aufeinanderstehenden Achsen X, Y und Z, drei weitere Koordinaten geben die Rotationen des Körpers um diese drei Achsen an. Es handelt sich um sechs **unabhängige Koordinaten**, da sie jeweils beliebig gewählt werden können.

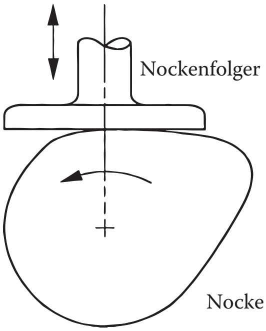
Mechanische Gelenke

Mechanische Systeme sind im Allgemeinen für spezielle Operationen entworfen. Jedes von ihnen hat eine topologische Struktur, die einem bestimmten Zweck dient. Die Körper in einem mechanischen System können sich nicht frei gegeneinander bewegen, weil sie durch **Gelenke** (Verbindungen, engl. *joints*) oder **Kraftelemente** (engl. *force elements*) verbunden sind. Kraftelemente wie Federn oder Dämpfer können zwar die Bewegung der Körper in eine oder mehrere Richtungen beeinflussen, sie verhindern die Bewegung in diese Richtungen aber nicht vollständig. Folglich kann ein Kraftelement die Anzahl der unabhängigen Koordinaten, die zur Beschreibung des Systems nötig sind, nicht verringern. Mechanische Gelenke wie die in Abb. 1.3 gezeigten Typen hingegen werden verwendet, um Bewegungen nur in bestimmte Richtungen zuzulassen. Diese Gelenke verringern also die Anzahl der unabhängigen Koordinaten eines Systems, da sie die Bewegung in einige Richtungen verhindern. Abbildung 1.3a zeigt ein **Schubgelenk** (translatorisches Gelenk, engl. *prismatic (translational) joint*), das Relativbewegungen zwischen den beiden Körpern i und j nur entlang der Gelenkachse zulässt. Die Verwendung eines solchen Gelenks nimmt dem Körper i die Freiheit, sich relativ zum Körper j in einer anderen Richtung als der Gelenkachse zu verschieben. Ebenso nimmt es dem Körper i die Freiheit, bezüglich des Körpers j zu rotieren. Abbildung 1.3b zeigt ein **Drehgelenk** (Scharniergelenk, engl. *revolute (pin) joint*), das nur Relativdrehungen zwischen den Körpern i und j zulässt. Ein solches Gelenk nimmt also dem Körper i die Freiheit, sich bezüglich des Körpers j zu verschieben. Das in Abb. 1.3c gezeigte **Zylindergelenk** (engl. *cylindrical joint*) erlaubt dem Körper i, sich entlang der Gelenkachse gegen den Körper j zu verschieben und um die Gelenkachse zu rotieren. Allerdings nimmt es dem Körper i die Freiheit, sich entlang anderer Achsen bezüglich j zu verschieben bzw. um eine andere als die Gelenkachse zu rotieren. Abbildung 1.3d schließlich zeigt ein **Kugelgelenk** (engl. *spherical (ball) joint*), das relative Verschiebungen zwischen den Körpern i und j verhindert; es erlaubt dem Körper i nur, um drei senkrecht aufeinanderstehende Achsen gegen den Körper j zu rotieren.



(a) Schubgelenk (b) Drehgelenk (c) Zylindergelenk (d) Kugelgelenk

Abb. 1.3 Mechanische Gelenke.



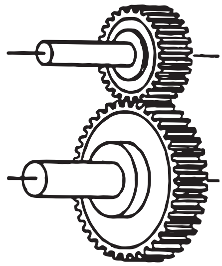


Abb. 1.4 Nocken- und Zahnradsysteme.

Andere Arten von Verbindungen, die häufig in mechanischen Systemen verwendet werden, sind **Nocken** (engl. *cams*) und **Zahnräder** (engl. *gears*). Abbildung 1.4 zeigt Beispiele. In Abb. 1.4a ist eine Nocke zu sehen, die die Rotationsbewegung der Nocke in die gewünschte Auf- und Ab-Bewegung des **Folgers** (engl. *follower*) umsetzt. Ein Zahnrad bzw. eine Zahnstange hingegen überträgt eine bestimmte Art der Bewegung (Translations- oder Rotationsbewegung) von einem Körper auf einen anderen. Die in Abb. 1.4b gezeigten Zahnräder sollen die Rotationsbewegung von einer Welle auf eine andere übertragen. Das Verhältnis der Rotationsgeschwindigkeiten des Antriebs- und des angetriebenen Zahnrads hängt vom Durchmesser der **Grundkreise** (engl. *base circle*) der beiden Zahnräder ab.

1.3 Freiheitsgrade

Ein mechanisches System kann aus mehreren Körpern bestehen, die durch Gelenke und Kraftelemente von verschiedener Art und in unterschiedlicher Zahl verbunden sind. Die **Freiheitsgrade** eines Systems sind definiert als die Anzahl der unabhängigen Koordinaten, die man benötigt, um die Konfiguration des Systems zu beschreiben. Die Anzahl der Freiheitsgrade hängt von der Anzahl der Körper sowie von der Anzahl und der Art der Gelenke in dem System ab. Das in Abb. 1.5 gezeigte **Schubkurbelgetriebe** (engl. *slider crank mechanism*) wird in verschiedenen technischen Anwendungen eingesetzt, etwa in Automotoren und Pumpen. Der Mechanismus besteht aus vier Körpern: Körper 1 ist der Zylinder (die Führung), Körper 2 ist die Kurbel, Körper 3 die Pleuelstange und Körper 4 das Schubglied (meist der Kolben). Das Getriebe hat drei Drehgelenke und ein Schubgelenk. Doch obwohl der Mechanismus aus mehreren Körpern und mehreren Gelenken besteht, hat er nur einen Freiheitsgrad, d. h., die Bewegung aller Körper in diesem System lässt sich durch eine einzige unabhängige Variable be-

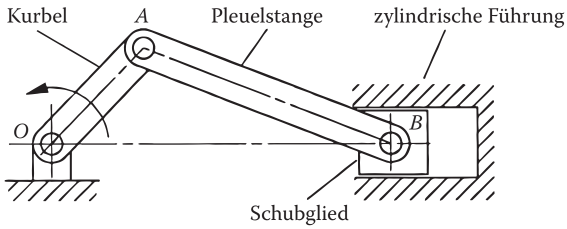


Abb. 1.5 Schubkurbelgetriebe.

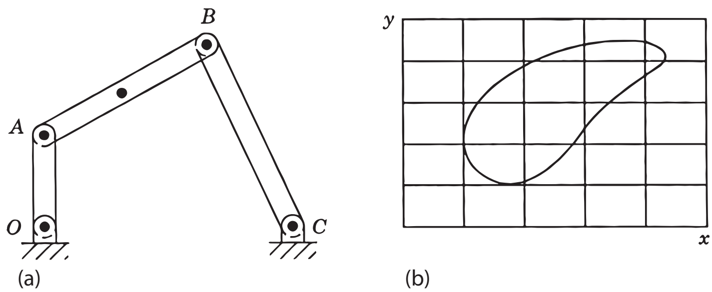


Abb. 1.6 Viergelenkgetriebe (Gelenkviereck).

einflussen und beschreiben. In diesem Fall benötigt man nur eine Eingangskraft (einen Motor oder ein Stellglied), um die Bewegung des Mechanismus zu steuern. So erzeugt beispielsweise eine vorgegebene Rotationsbewegung der Kurbel die gewünschte geradlinige Bewegung des Schubglieds. Wenn man die geradlinige Bewegung des Schubglieds als unabhängige Variable betrachtet, kann man die Kraft auf das Schubglied so wählen, dass man die gewünschte Rotationsbewegung der Kurbel OA erhält. In ähnlicher Weise muss man zur vollständigen Beschreibung eines Mehrkörpersystems mit zwei Freiheitsgraden zwei eingeleitete Kräfte angeben, und um die Bewegung eines Systems mit n Freiheitsgraden zu beschreiben, werden n Eingangskräfte benötigt.

Abbildung 1.6a zeigt ein weiteres Beispiel eines einfachen planaren Mechanismus, des sogenannten **Viergelenkgetriebes** oder Gelenkvierecks (engl. *four-bar mechanism*). Es hat ebenfalls nur einen einzigen Freiheitsgrad und ist in vielen industriellen und technischen Anwendungen zu finden. Die Bewegung der einzelnen Verbindungsstücke in diesem Mechanismus kann durch eine Eingangskraft gesteuert werden, etwa indem man die Kurbel OA mit einem Motor in O antreibt. Eine gewünschte Bewegungstrajektorie des Kopplungsglieds AB erhält man durch eine passende Dimensionierung der Verbindungsstücke des Mechanismus. Abbildung 1.6b zeigt die Bewegung, die der Mittelpunkt des Kopplungsglieds AB vollführt, wenn die Kurbel OA des Mechanismus eine vollständige Drehung ausführt. Durch andere Abmessungen erhält man andere Bewegungstrajektorien.

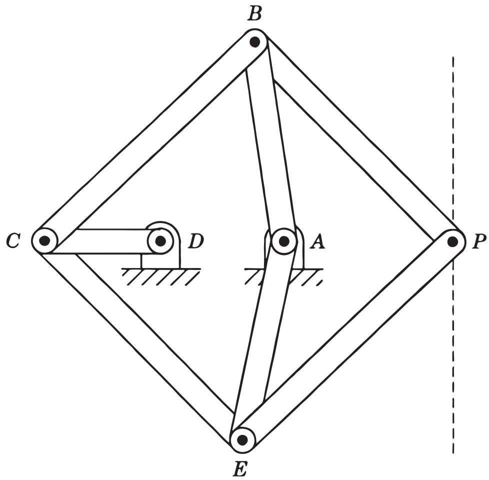


Abb. 1.7 Peaucellier-Inversor.

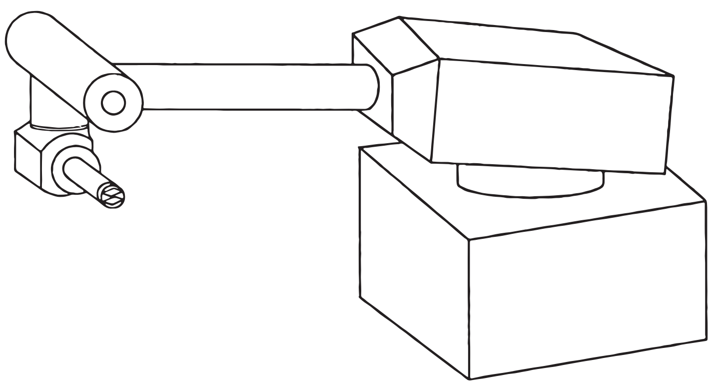


Abb. 1.8 Robotermanipulatoren.

Ein weiterer Mechanismus mit einem einzigen Freiheitsgrad ist der in Abb. 1.7 gezeigte **Peaucellier-Inversor** (engl. *Peaucellier mechanism*), ein Koppelgetriebe zur Überführung einer Kreisbewegung in eine Geradenbewegung und umgekehrt. Die Geometrie des Inversors ist so gewählt, dass $BC = BP = EC = EP$ und $AB = AE$ gilt. Die Punkte A, C und P sollen immer auf einer Geraden durch A liegen. Der Mechanismus erfüllt immer die Bedingung $AC \times AP = c$ mit einer Konstante c, der sogenannten **Inversionskonstante**. Für den Fall $AD = CD$ sollte der Punkt P sich exakt geradlinig bewegen.

Die Mehrzahl der mechanischen Systeme bildet **geschlossene kinematische Ketten** mit einem einzigen Freiheitsgrad, in denen jeder Bestandteil mit mindestens zwei anderen Bestandteilen verbunden ist. Beispiele für offene Ketten mit mehreren Freiheitsgraden sind Robotermanipulatoren wie in Abb. 1.8. Sie sind so konstruiert, dass sie einige Aspekte menschlicher Bewegungen nachbilden können, und werden in vielen Anwendungen wie Schweißen, Lackieren, Materialtransport und Montage eingesetzt. Einige dieser Anwendungen erfordern hohe Präzision, sodass ausgeklügelte Sensoren und Steuerungssysteme zum Einsatz kommen.

Während die *Anzahl* der Freiheitsgrade eines Systems eindeutig ist und von dessen topologischer Struktur abhängt, ist die *Art* der Freiheitsgrade als solche nicht eindeutig, wie vorhin beim Schubkurbelgetriebe gezeigt: In diesem einfachen Mechanismus kann man die Rotation der Kurbel oder die Translation des Schubglieds als den Freiheitsgrad des Systems ansehen. Je nachdem, welchen Freiheitsgrad man auswählt, lässt sich als Antrieb des Mechanismus ein Motor oder ein Stellglied verwenden. Bei der Konstruktion und Steuerung von Mehrkörpersystemen ist es entscheidend, die Freiheitsgrade des Systems genau zu kennen, um die Bewegung zu erzeugen und zu steuern. Die Anzahl und die Art der Freiheitsgrade legen die Anzahl und die Art der Motoren und Stellglieder fest, die an den Gelenken angreifen, um die Bewegung des Mehrkörpersystems zu erzeugen und zu steuern. In Kapitel 3 werden einfache Kriterien angegeben, um die Anzahl der Freiheitsgrade eines Mehrkörpersystems zu bestimmen. Diese Kriterien hängen sowohl von der Anzahl der Körper in dem System als auch von Anzahl und Art der Gelenke ab. Wenn die Komplexität des Systems zunimmt, kann die Anwendung dieser Kriterien zur Bestimmung der Systemfreiheitsgrade allerdings in die Irre führen. Aus diesem Grund gebe ich in Kapitel 6 ein numerisches Verfahren an, mit dem sich die Freiheitsgrade auch in komplexen Mehrkörpersystemen bestimmen lassen.

1.4
Kinematische Analyse

In der **kinematischen Analyse** (engl. *kinematic analysis*) befassen wir uns mit den geometrischen Aspekten der Bewegung der Körper, ohne die Kräfte zu betrachten, die diese Bewegung verursachen. In den klassischen Ansätzen der kinematischen Analyse bestimmt man zuerst die Freiheitsgrade. Dann entwickelt man die kinematischen Zusammenhänge und drückt sie mithilfe der Systemfreiheitsgrade und deren zeitlichen Ableitungen aus. Der Schritt, die Orte und Orientierungen der Körper in dem mechanischen System zu bestimmen, wird als **Positionsanalyse** (engl. *position analysis*) bezeichnet. In diesem ersten Schritt werden alle benötigten Auslenkungsvariablen bestimmt. Der zweite Schritt der kinematischen Analyse ist dann die **Geschwindigkeitsanalyse** (engl. *velocity analysis*), in der man die jeweiligen Geschwindigkeiten der Systembestandteile als Funktion der zeitlichen Änderung der Freiheitsgrade bestimmt. Dazu kann man die in der Positionsanalyse gewonnenen kinematischen Zusammenhänge differenzieren. Sobald die Auslenkungsvariablen und die Geschwindigkeiten bestimmt sind, kann man mit dem dritten Schritt der kinematischen Analyse fortfahren, der sogenannten **Beschleunigungsanalyse** (engl. *acceleration analysis*). Dabei werden

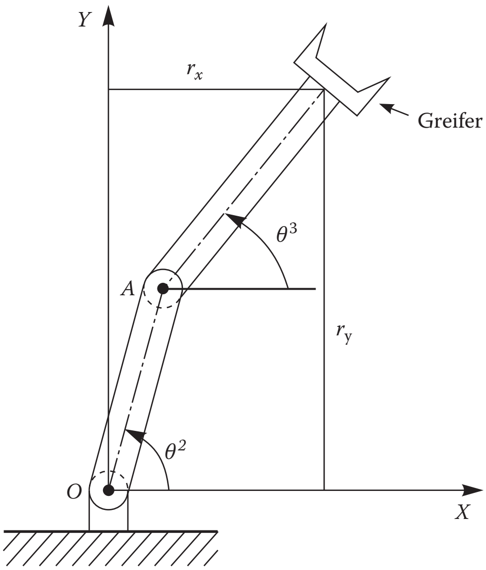


Abb. 1.9 Robotermanipulator mit zwei Freiheitsgraden.

die Geschwindigkeitszusammenhänge nach der Zeit abgeleitet, sodass man die jeweiligen Beschleunigungen der Körper in dem System erhält.

Um die drei Hauptschritte der kinematischen Analyse zu demonstrieren, betrachten wir den in Abb. 1.9 gezeigten Manipulator aus zwei Gliedern. Dieser Manipulator hat zwei Freiheitsgrade, als die man die Winkel θ^2 und θ^3 auffassen können, die die Orientierungen der beiden Glieder angeben. Wir setzen deren Längen mit l^2 und l^3 an. Die globale Position des Greifers ist in dem XY-Koordinatensystem durch die beiden Koordinaten r_x und r_y bestimmt. Diese Koordinaten lassen sich mithilfe der beiden Freiheitsgrade θ^2 und θ^3 folgendermaßen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} r_x &= l^2 \cos\theta^2 + l^3 \cos\theta^3 \\ r_y &= l^2 \sin\theta^2 + l^3 \sin\theta^3 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

Beachten Sie, dass die Position eines beliebigen Punkts auf den Gliedern des Manipulators sich im XY-Koordinatensystem mithilfe der Freiheitsgrade θ^2 und θ^3 bestimmen lässt. Gleichung (1.1) fasst den Schritt der Positionsanalyse zusammen. Wenn θ^2 und θ^3 bekannt sind, kann man die Position des Greifers oder jedes anderen Punkts auf den Gliedern des Manipulators angeben.

Die Geschwindigkeitsgleichungen erhält man, indem man die Positionsgleichungen (1.1) nach der Zeit differenziert. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}_x &= -\dot{\theta}^2 l^2 \sin\theta^2 - \dot{\theta}^3 l^3 \sin\theta^3 \\ \dot{r}_y &= \dot{\theta}^2 l^2 \cos\theta^2 + \dot{\theta}^3 l^3 \cos\theta^3 \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Wenn die Freiheitsgrade θ^2 und θ^3 sowie deren Zeitableitungen gegeben sind, dann kann man die Geschwindigkeit des Greifers mithilfe der eben hergeleiteten kinematischen Gleichungen bestimmen. Es lässt sich auch zeigen, dass man die Geschwindigkeit eines beliebigen anderen Punkts auf dem Manipulator in gleicher Weise bestimmen kann.

Wenn man die Geschwindigkeitsgleichungen (1.2) nach der Zeit differenziert, erhält man folgende Gleichungen für die Beschleunigung des Greifers:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}_x &= -\ddot{\theta}^2 l^2 \sin\theta^2 - \ddot{\theta}^3 l^3 \sin\theta^3 - (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \cos\theta^2 - (\dot{\theta}^3)^2 l^3 \cos\theta^3 \\ \ddot{r}_y &= \ddot{\theta}^2 l^2 \cos\theta^2 + \ddot{\theta}^3 l^3 \cos\theta^3 - (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \sin\theta^2 - (\dot{\theta}^3)^2 l^3 \sin\theta^3 \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

Wenn also die Freiheitsgrade sowie deren erste und zweite zeitliche Ableitung bekannt sind, kann man die absolute Beschleunigung des Greifers (oder die Beschleunigung eines beliebigen anderen Punkts auf dem Manipulator) berechnen.

Beachten Sie, dass es zur Bestimmung der Systemkonfiguration nicht nötig ist, die Kraftgleichungen zu bestimmen, wenn die Freiheitsgrade sowie deren erste und zweite zeitliche Ableitung bekannt sind. Die kinematischen Gleichungen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung reichen aus, um die Koordinaten, Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen aller Punkte auf den Bestandteilen eines Mehrkörpersystems anzugeben. Ein System, für das alle Freiheitsgrade bekannt sind, heißt **kinematisch bestimmtes System** (engl. *kinematically driven system*). Wenn einer oder mehrere Freiheitsgrade des Systems nicht bekannt sind, muss man allerdings mithilfe der Bewegungsgesetze die Kraftgleichungen aufstellen, um die Systemkonfiguration zu bestimmen. Ein solches System wird in diesem Buch als **dynamisch bestimmtes System** bezeichnet (engl. *dynamically driven system*).

In den klassischen Ansätzen muss man sich auf seine Intuition verlassen, um die Freiheitsgrade des Systems auszuwählen. Wenn das System eine komplexe topologische Struktur hat oder aus einer großen Anzahl von Körpern besteht, können beim Einsatz der klassischen Verfahren allerdings Schwierigkeiten auftreten: Diese Verfahren führen für einfache Mechanismen zwar zu einfachen Gleichungen, für die Analyse einer großen Klasse von Anwendungen mechanischer Systeme eignen sie sich jedoch nicht. Viele der grundlegenden Konzepte in den klassischen Ansätzen sind jedoch dieselben, wie sie auch für moderne Computerverfahren verwendet werden.

In Kapitel 3 werden zwei Ansätze für kinematisch bestimmte Mehrkörpersysteme diskutiert: der klassische und der Computeransatz. Im **klassischen Ansatz**, geeignet für die Analyse einfacher Systeme, nimmt man an, dass die Systemfreiheitsgrade sich leicht erkennen lassen und dass man alle kinematischen Variablen unkompliziert mithilfe der Freiheitsgrade ausdrücken kann. Bei komplexeren Systemen wird es jedoch notwendig, ein anderes, computergestütztes Verfahren wie den **Computeransatz** zu verwenden. Hier formuliert man zunächst die kinematischen Bedingungsgleichungen, die die mechanischen Gelenke und die vorgegebenen Bewegungstrajektorien beschreiben; das führt zu einem relativ großen System nichtlinearer algebraischer Gleichungen, die sich durch Computer und numerische Methoden lösen lassen. Dieses Computerverfahren kann als Ausgangspunkt für die Entwicklung vielseitig verwendbarer Computerprogramme dienen, mit denen sich eine große Klasse von kinematisch bestimmten Systeme – wie in Kapitel 3 diskutiert – behandeln lässt.

1.5 Kraftanalyse

Die Kräfte in einem Mehrkörpersystem kann man einteilen in Trägheitskräfte, äußere Kräfte und Gelenkkräfte. **Trägheit** (engl. *inertia*) ist die Eigenschaft eines Körpers, die den Widerstand gegen jegliche Änderung seines Bewegungszustands verursacht. Eine Trägheitskraft hängt im Allgemeinen sowohl von der Masse und der Form des Körpers als auch von seiner Geschwindigkeit und der Beschleunigung ab. Wenn ein Körper in Ruhe ist, sind seine Trägheitskräfte null. **Gelenkkräfte** (engl. *joint forces*) sind die Reaktionskräfte, die deswegen entstehen, weil die verschiedenen Teile eines Mehrkörpersystems miteinander verbunden sind. Man bezeichnet diese Kräfte manchmal auch als **innere Kräfte** oder **Zwangskräfte** (engl. *constraint forces*). Nach dem dritten Newton'schen Gesetz sind die Reaktionskräfte zwischen zwei miteinander verbundenen Körpern entgegengesetzt gleich (d. h. gleicher Betrag, aber entgegengesetzte Richtung). In diesem Buch werden alle diejenigen Kräfte, die weder Trägheits- noch Gelenkkräfte sind, als **äußere Kräfte** (engl. *external forces*) bezeichnet. Beispiele dafür sind Feder- und Dämpferkräfte, Drehmomente von Motoren, Kräfte von Stellgliedern oder Gravitationskräfte.

Während wir uns in der Kinematik nur mit Bewegungen befassen, ohne die verursachenden Kräfte zu betrachten, sind wir bei der dynamischen Analyse an der Bewegung und den ihr zugrunde liegenden Kräften interessiert. Anders als bei einer statischen oder kinematischen Analyse, in der man nur algebraische Gleichungen verwendet, ist in der dynamischen Analyse die Bewegung eines Mehrkörpersystems durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt. In diesem Buch werden verschiedene Verfahren für die dynamische Analyse von mechanischen Systemen behandelt, die aus miteinander verbundenen starren Körpern bestehen. Um die Herleitungen in den späteren Kapiteln nachvollziehen zu können, wird nur vorausgesetzt, dass der Leser mit dem **zweiten Newton'schen Gesetz** vertraut ist. Nach diesem Gesetz ist die auf ein Teilchen wirkende Kraft gleich der Änderungsrate des Teilchenimpulses. Das zweite Newton'sche Gesetz führt – zusammen mit den **Euler'schen Gleichungen** für die Rotation eines starren Körpers – auf die dynamischen Bedingungen für die starren Körper. Mit dem d'Alembert'schen Prinzip, nach dem man Trägheitskräfte wie wirkende Kräfte behandeln kann, lässt sich das schlagkräftige **Prinzip der virtuellen Arbeit** herleiten. Lagrange nahm dieses Prinzip als Ausgangspunkt für die Herleitung seiner dynamischen Gleichung, die mithilfe der (skalaren) Arbeit und Energie ausgedrückt wird. Das d'Alembert'sche Prinzip, das Prinzip der virtuellen Arbeit und die Lagrange-Gleichungen werden im Detail in den Kapiteln 4 und 5 diskutiert.

1.6
Dynamische Gleichungen und ihre unterschiedlichen Formen

Abhängig von der Anzahl der Koordinaten, die man zur Definition der Konfiguration des mechanischen Systems auswählt, kann man unterschiedliche Gleichungsstrukturen erhalten und somit verschiedene Lösungsverfahren anwenden. Einige der Formulierungen führen zu Gleichungen, die mithilfe der Zwangskräfte ausgedrückt werden, bei anderen Formulierungen hingegen fallen die Zwangskräfte automatisch heraus. Beispielsweise kann man die Bewegungsgleichungen für ein einfaches System wie den Block in Abb. 1.10 mithilfe eines minimalen Satzes von unabhängigen Koordinaten formulieren, man kann aber auch einen redundanten Satz von Koordinaten verwenden, die nicht vollständig unabhängig sind. Da das System einen Freiheitsgrad hat – entsprechend der Bewegung in horizontaler Richtung –, genügt eine einzige Gleichung, um die Konfiguration des Blocks zu definieren. Diese Gleichung lässt sich einfach schreiben als

$$m\ddot{x} = F \tag{1.4}$$

Darin ist m die Masse des Blocks, x ist seine Koordinate, und F ist die auf den Block wirkende Kraft. Beachten Sie, dass man die obige Gleichung bei gegebener Kraft nach der Beschleunigung auflösen kann. Beachten Sie auch, dass die obige Gleichung keine Reaktionskräfte enthält, weil die Bewegung mithilfe des Freiheitsgrades beschrieben wird. Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, ist es immer möglich, einen Satz von dynamischen Gleichungen aufzustellen, in denen keine Zwangskräfte vorkommen, wenn man Freiheitsgrade nutzt. Das **Prinzip der virtuellen Arbeit der Dynamik** gibt uns ein kraftvolles Werkzeug an die Hand, mit dem wir systematisch einen Satz von dynamischen Gleichungen für ein Mehrkörpersystem mit Zwangsbedingungen aufstellen können, ohne dass diese Gleichungen die Zwangskräfte enthalten. Dieses Prinzip wird ausführlich in Kapitel 5 behandelt.

Ein weiterer Ansatz, mit dem man Bewegungsgleichungen für das in Abb. 1.10 gezeigte einfache System aufstellen kann, ist die Verwendung von redundanten Koordinaten. Wir könnten beispielsweise die Dynamik des Blocks mithilfe der

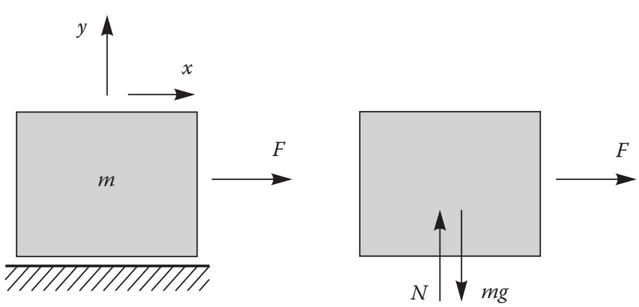


Abb. 1.10 Formen der Bewegungsgleichung.

folgenden beiden Gleichungen beschreiben:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F \\ m\ddot{y} &= N - mg \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Darin ist y die Koordinate des Blocks in vertikaler Richtung, N ist die Reaktionskraft aufgrund der Zwangskraft, die bei der Bewegung des Blocks wirkt, und g ist die Fallbeschleunigung. Wenn die Kraft F gegeben ist, haben diese beiden Gleichungen drei Unbekannte, nämlich zwei Beschleunigungskomponenten und die Reaktionskraft N. Um nach diesen drei Unbekannten aufzulösen, benötigt man noch eine weitere Gleichung. Diese dritte Gleichung – man spricht von einer **Bindungsgleichung** – ist einfach die Nebenbedingung zu der Bewegung des Blocks in *vertikaler* Richtung, die sich in der Form

$$y = c \tag{1.6}$$

(mit einer Konstanten c) schreiben lässt. Diese algebraische Gleichung bildet zusammen mit den beiden Bewegungsgleichungen (1.5) ein System von **algebraischen und Differentialgleichungen**, das sich für alle Koordinaten und Kräfte lösen lässt. Hier haben wir ein größeres Gleichungssystem erhalten, das mithilfe von redundanten Koordinaten ausgedrückt ist, denn die y-Koordinate ist kein Freiheitsgrad. Wie wir in diesem Buch sehen werden, hat die Verwendung von redundanten Systemen Vorteile beim Einsatz eines Computers und kann außerdem die Allgemeinheit und die Flexibilität der verwendeten Formulierung erhöhen. Aus diesem Grund verwenden viele allgemein einsetzbare Mehrkörpersimulationsprogramme Formulierungen mit redundanten Koordinaten. Allerdings sind dabei ein paar Dinge zu beachten. Bei unserem einfachen System haben wir gesehen, dass die Anzahl der unabhängigen Zwangskräfte (der Reaktionskräfte) gleich der Anzahl der Koordinaten minus der Anzahl der Systemfreiheitsgrade ist. Wir erkennen auch, dass die Anzahl der unabhängigen Reaktionskräfte gleich der Anzahl der Bindungsgleichungen ist. Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, ist das immer der Fall, ganz unabhängig von der Komplexität des untersuchten Systems, und die Eliminierung einer Reaktionskraft kann äquivalent zur Elimination einer abhängigen Koordinate oder einer Bindungsgleichung sein. In unserem Beispiel hatten wir eine Reaktionskraft (N) und eine Bindungsgleichung ($y = c$).

Wenn die Bewegungsgleichungen nur mithilfe der Systemfreiheitsgrade formuliert werden, erhält man Differentialgleichungen, die sich mit einem einfachen numerischem Vorgehen lösen lassen. Sind die Bewegungsgleichungen jedoch mit redundanten Koordinaten formuliert, ist ein etwas raffiniertes numerisches Vorgehen nötig, um das entstehende System aus algebraischen und Differentialgleichungen zu lösen. Diese Gleichungen sind für die meisten Mehrkörpersysteme gekoppelt und hochgradig nichtlinear. Um nach den Systemkoordinaten und den Geschwindigkeiten aufzulösen, wendet man direkte numerische Integrationsverfahren an; iterative numerische Prozeduren werden verwendet, um die Verletzung der Bindungsgleichungen zu überprüfen. Dieses Thema wird ausführlich in Kapitel 6 behandelt, in dem die Lagrange'sche Formulierung der Gleichungen eingeführt wird. In dieser Formulierung ergibt sich eine symmetrische Struktur der Bewegungsgleichungen, die mithilfe der redundanten Koordinaten und der Zwangskräfte ausgedrückt sind. Um diese symmetrische Struktur zu erhalten, nutzt man das Konzept der **verallgemeinerten Zwangskräfte**, die mithilfe der sogenannten **Lagrange-Multiplikatoren** ausgedrückt werden.

Das einfache, in diesem Abschnitt diskutierte Beispiel des Blocks mit einem Freiheitsgrad berührt einige der grundlegenden Themen in der Mehrkörpersimulation. Allerdings sind die Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme wegen der auftretenden geometrischen Nichtlinearitäten und der kinematischen Nebenbedingungen im Allgemeinen nicht so einfach wie die Gleichungen für diesen Block. Mit der Komplexität der Systemtopologie nehmen auch die Dimension und Nichtlinearität des Gleichungssystems zu. Computerverfahren zur Modellierung von komplexen, nichtlinearen Mehrkörpersystemen werden in Kapitel 6 behandelt.

1.7 Direkte und inverse Dynamik

Die Dynamik von mechanischen Systemen kann man auf zwei verschiedene Arten betrachten, nämlich als direkte und als inverse Dynamik. Bei der **inversen Dynamik** sind die Bewegungstrajektorien aller Systemfreiheitsgrade angegeben; Ziel der Untersuchung ist es, die Kräfte zu untersuchen, die diese Bewegung verursachen. Dabei benötigt man nur die Lösung der algebraischen Gleichungen; numerische Integrationsverfahren sind hier nicht notwendig, weil die Positionskoordinaten, die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen bekannt sind. Bei der **direkten Dynamik** hingegen sind die die Bewegung verursachenden Kräfte gegeben, und das Ziel ist es, die Positionskoordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu bestimmen. Hier werden zunächst mithilfe der Bewegungsgesetze die Beschleunigungen bestimmt. Diese Beschleunigungen müssen dann integriert werden, um die Koordinaten und die Geschwindigkeiten zu gewinnen. In den meisten Anwendungen ist es sehr schwierig, eine Lösung in geschlossener Form anzugeben; daher muss man auf direkte numerische Integrationsverfahren ausweichen.

Den Unterschied zwischen der direkten und der inversen Dynamik kann man anhand eines einfachen Beispiels erläutern. Betrachten wir eine Masse m, die sich unter Wirkung einer Kraft F ausschließlich in horizontaler Richtung bewegen kann, die Auslenkung ist x. Die Bewegungsgleichung der Masse ist

$$m\ddot{x} = F \tag{1.7}$$

Bei der direkten Dynamik ist die Kraft F gegeben; Ziel ist es, die Bewegung der Masse als Ergebnis der wirkenden Kraft zu bestimmen. In diesem Fall lösen wir zunächst nach der Beschleunigung auf:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \tag{1.8}$$

Da F und m bekannt sind, können wir die Beschleunigung integrieren und die Geschwindigkeit bestimmen. Wir schreiben die obige Gleichung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{m} \tag{1.9}$$

und das führt auf

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \mathrm{d}\dot{x} = \int_0^t \frac{F}{m}\,\mathrm{d}t \tag{1.10}$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}_0$ der Masse. Es folgt

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \int_0^t \frac{F}{m}\,\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

Wenn die Kraft F als Funktion der Zeit bekannt ist, kann man aus der obigen Gleichung die Geschwindigkeit der Masse bestimmen. Und wenn man die berechnet hat, erhält man daraus die Auslenkung:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \tag{1.12}$$

woraus folgt

$$x = x_0 + \int_0^t \dot{x}\,\mathrm{d}t \tag{1.13}$$

x_0 ist dabei die Anfangsauslenkung der Masse. An diesem einfachen Beispiel wird klar, dass man zwei Anfangsbedingungen benötigt – die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit –, wenn man die Auslenkung und die Geschwindigkeit als Ergebnis der bekannten Kräfte bestimmen will. Bei einfachen Systemen lässt sich durchaus eine geschlossene Lösung für die Geschwindigkeiten und die Auslenkungen angeben; bei komplexeren Systemen muss man aber, wie in Kapitel 6 beschrieben, die Beschleunigungen numerisch integrieren, um die Geschwindigkeiten und die Auslenkungen zu erhalten.

Bei der inversen Dynamik hingegen muss man keine Integrationen ausführen, es ist nur ein System von algebraischen Gleichungen zu lösen. Ist beispielsweise die Auslenkung der Masse als Funktion der Zeit angegeben, kann man die Auslenkung einfach zweimal differenzieren, um die Beschleunigung zu berechnen; wenn das Ergebnis dann in die Bewegungsgleichung des Systems eingesetzt wird, lässt sich die Kraft bestimmen. Wenn beispielsweise die Auslenkung der Masse durch

$$x = A \sin \omega t \tag{1.14}$$

gegeben ist (dabei sind A und ω bekannte Konstanten), dann lässt sich die Beschleunigung der Masse einfach als

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \sin \omega t \tag{1.15}$$

angeben. Mithilfe der Bewegungsgleichung (1.7) bestimmt man dann die Kraft F zu

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 A \sin \omega t \tag{1.16}$$

Diese Gleichung bestimmt die Kraft, die die vorgegebene Auslenkung der Masse bewirkt.

Die inverse Dynamik wird häufig bei der Konstruktion und der Steuerung von vielen industriellen und technischen Anwendungen wie Robotermanipulatoren sowie Luft- und Raumfahrtsystemen verwendet. Indem man die Aufgaben festlegt, die ein solches System ausführen muss, kann man die Stellgliederkräfte und Motordrehmomente, die zur Erfüllung dieser Aufgaben nötig sind, sinnvoll vorhersagen. Außerdem lassen sich mithilfe des Verfahrens der inversen Dynamik verschiedene Entwurfsalternativen und Kraftkonfigurationen effizient untersuchen.

1.8 Ebene und räumliche Dynamik

Die Analyse von ebenen Systemen kann man als Spezialfall der dreidimensionalen (räumlichen) Analyse betrachten. In der **räumlichen Analyse** sind mehr Koordinaten erforderlich, um die Konfiguration eines Körpers ohne Nebenbedingungen zu beschreiben. Wie bereits erwähnt, benötigt man sechs Koordinaten, die den Ort eines Punkts auf dem Körper sowie die Orientierung eines starr mit dem Körper verbundenen Koordinatensystems definieren, wenn man die Bewegung eines starren Körpers im Raum ohne Nebenbedingungen beschreiben will. In der **planaren Analyse** sind es nur drei Koordinaten, und eine davon genügt, um die Orientierung des Körpers zu definieren – im Vergleich zu den drei Orientierungskoordinaten der dreidimensionalen Analyse. Außerdem sind zwei Rotationen bei der planaren Analyse kommutativ, da die Drehachsen gleich (oder zumindest parallel) sind; mit anderen Worten können zwei aufeinanderfolgende Rotationen addiert werden, und die Reihenfolge der beiden Rotationen ist gleichgültig. Bei der dreidimensionalen Analyse hingegen gilt das nicht, denn hier können drei unabhängige Rotationen um drei senkrecht aufeinanderstehende Achsen ausgeführt werden. Die Reihenfolge ist hier also im Allgemeinen nichtkommutativ, und zwei

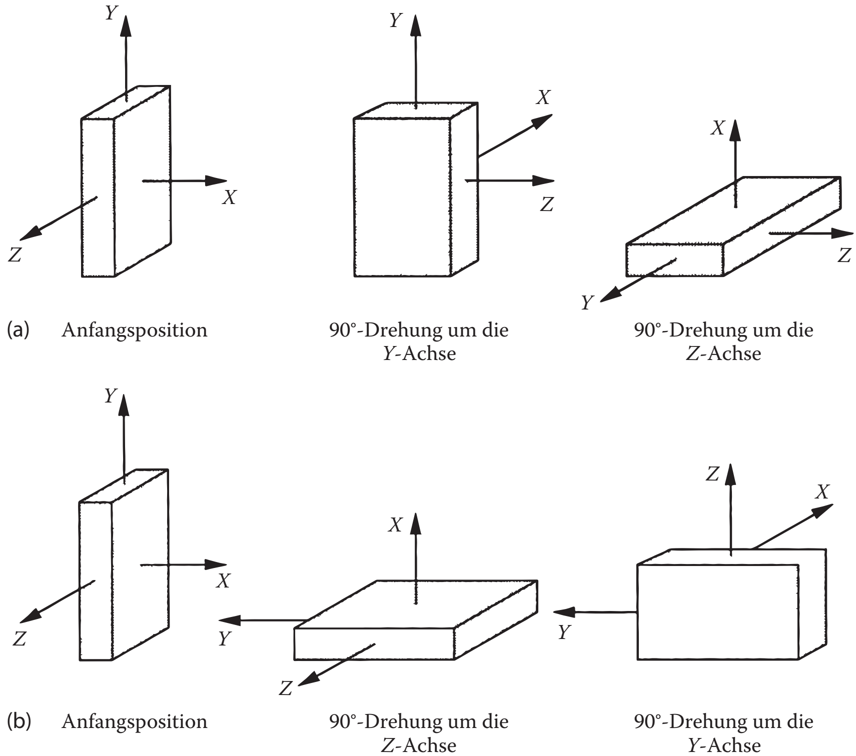


Abb. 1.11 Folge von Rotationen.

aufeinanderfolgende Rotationen lassen sich im Allgemeinen nicht addieren. Das lässt sich exemplarisch mit dem einfachen Block in Abb. 1.11 zeigen, die verschiedene Folgen von Rotationen für denselben Block illustriert. In Abb. 1.11a wird der Block zunächst 90° um die Y-Achse und dann 90° um die Z-Achse gedreht. In Abb. 1.11b werden dieselben Rotationen in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt, also zunächst 90° um die Z-Achse und dann 90° um die Y-Achse. Aus den in den beiden Teilabbildungen gezeigten Ergebnissen wird klar, dass die andere Reihenfolge zu einer unterschiedlichen endgültigen Orientierung führt. Wir schließen aus diesem einfachen Beispiel, dass die Reihenfolge von finiten Rotationen in der räumlichen Analyse generell nichtkommutativ ist und dass finite Rotationen daher im Allgemeinen nicht wie Vektorgrößen behandelt (z. B. addiert) werden können. Das Thema dreidimensionaler Rotationen wird ausführlicher in den Kapiteln 7 und 8 behandelt, wo wir verschiedene Sätze von Orientierungskoordinaten diskutieren werden. Solche Sätze sind die Euler-Winkel, die Euler-Parameter, die Richtungskosinus sowie die Rodriguez-Parameter. In Kapitel 7 werden ferner auch die allgemeinen dynamischen Gleichungen entwickelt, denen die räumliche Bewegung von Systemen starrer Körper mit und ohne Nebenbedingungen unterliegt. Dazu gehören die Newton-Euler-Gleichungen sowie rekursive Formulierungen, die in der computergestützten Analyse von Mehrkörpersystemen mit Nebenbedingungen häufig verwendet werden.

1.9 Computermethoden und numerische Verfahren

Die analytischen Verfahren von Newton, d'Alembert und Lagrange wurden schon vor Jahrhunderten entwickelt; diese klassischen Ansätze haben sich auch für die Implementation auf digitalen Hochgeschwindigkeitsrechnern geeignet gezeigt, wenn man sie mit Matrizen- und numerischen Methoden verwendet. Ihre Anwendung führt auf einen Satz von Differentialgleichungen, die sich in Matrizenform ausdrücken und mit numerischen und Computerverfahren lösen lassen. Auf Grundlage des Newton'schen und des Lagrange'schen Ansatzes wurden mehrere numerische Algorithmen entwickelt. Sie wenden Matrizen- und numerische Verfahren an und werden zur Entwicklung von allgemeinen und speziellen Computerprogrammen genutzt, mit denen sich die dynamische Simulation von Mehrkörpersystemen aus mehreren miteinander verbundenen Körpern durchführen lässt. Die Programme erlauben dem Anwender, in systematischer Weise auch elastische und dämpfende Elemente einzuführen, etwa Federn, Dämpfer, nichtlineare allgemeine Kraftfunktionen und/oder nichtlineare Bedingungsgleichungen. Ein Beispiel für ein solches allgemein verwendbares Mehrkörpersimulationsprogramm ist der Code SAMS/2000 (**S**ystematic **A**nalysis of **M**ultibody **S**ystems), der in Kapitel 9 beschrieben wird. Sie als Leser sollten sich unbedingt mit den Möglichkeiten eines solchen Codes vertraut machen, damit Sie die Verwendung der Formulierungen und Algorithmen nachvollziehen können, die in diesem Buch vorgestellt und in der Computerdynamik allgemein angewendet werden.

Die Recheneffizienz der Computerprogramme für die dynamische Analyse von mechanischen Systemen hängt von vielen Faktoren ab, etwa von der Wahl der Koordinaten und von dem numerischen Verfahren, das bei der Lösung der dynamischen Gleichung angewandt wird. Die Wahl der Koordinaten beeinflusst direkt die Anzahl und den Grad der Nichtlinearität der resultierenden dynamischen Gleichungen. Bei einer relativ kleinen Anzahl von Koordinaten sind die dynamischen Gleichungen komplizierter und haben einen höheren Grad an Nichtlinearität. Daher und um der allgemeinen Anwendbarkeit willen wählt man in vielen Computerverfahren für die dynamische Analyse von mechanischen Systemen eine eher große Anzahl von Koordinaten.

Wie schon angedeutet, werden Sie beim Durcharbeiten dieses Buches erkennen, dass es zwei dynamische Formulierungen gibt, die in der Computersimulation von Mehrkörpersystemen häufig vorkommen. In der ersten Formulierung sind die Zwangsbedingungen aus den dynamischen Gleichungen eliminiert, indem man diese Gleichungen mithilfe der Freiheitsgrade ausdrückt. Variablen, die verbundene Koordinaten angeben, werden oft als die Freiheitsgrade verwendet, um die Systemkonfiguration analytisch mithilfe dieser Freiheitsgrade darstellen zu können. Die Verwendung solcher verbundenen Variablen bietet den Vorteil, dass die Anzahl der Gleichungen zurückgeht – und den Nachteil, dass die Nichtlinearität und die Komplexität der Gleichungen zunimmt. Das ist zu erwarten, da alle Informationen über die Systemdynamik dann ja in einem kleineren Satz von Gleichungen enthalten sein müssen. Formulierungen, die mithilfe verbundener Variablen oder der Freiheitsgrade einen minimalen Gleichungssatz erzeugen, werden in diesem Buch als **Einbettungsverfahren** bezeichnet. Sie sind auch Grundlage der **rekursiven Methoden** (engl. *embedding techniques*), die häufig bei der Analyse von Robotermanipulatoren verwendet werden. Die rekursiven Methoden werden in Kapitel 7 behandelt.

Eine andere, in der Computersimulation von Mehrkörpersystemen weitverbreitete dynamische Formulierung ist die **erweiterte Formulierung** (engl. *augmented formulation*). Dabei drückt man die Bewegungsgleichungen mithilfe eines redundanten Satzes von Koordinaten aus, die nicht vollständig voneinander unabhängig sind. Wegen dieser Redundanz müssen auch die kinematischen algebraischen Bedingungsgleichungen angegeben werden, die den Zusammenhang zwischen diesen Koordinaten beschreiben. Offensichtlich hat dieser Ansatz den Nachteil, dass die Anzahl der Koordinaten und der Gleichungen zunimmt. Ein weiterer Nachteil ist die Komplexität der anzuwendenden numerischen Algorithmen, die man zur Lösung des resultierenden Systems von Differential- und algebraischen Gleichungen benötigt. Dennoch hat die erweiterte Formulierung einen Vorzug: Sie erzeugt einfache Gleichungen mit einer dünn besetzten Matrixstruktur; daher kann man diese Gleichungen mit den Verfahren zur Behandlung dünn besetzter Matrizen effektiv lösen. Außerdem sind die allgemeinen Mehrkörpersimulationsprogramme auf Grundlage der erweiterten Formulierung eher benutzerfreundlich, da sie die systematische Einführung einer beliebigen nichtlinearen Bedingungs- oder Kraftfunktion zulassen. In den meisten dieser Programme wird die Bewegung der Körper des Systems mit absoluten kartesischen Koordinaten und Orientierungskoordinaten beschrieben. In der ebenen Analyse wählt man zwei kartesische Koordinaten, die den Ort des Ursprungs des körperfesten Koordinatensystems bestimmen, und eine Orientierungskoordinate zur Angabe der Orientierung dieses Koordinatensystems bezüglich eines globalen Bezugssystems. In der räumlichen Analyse benötigt man sechs absolute Koordinaten, um den Ort und die Orientierung des körperfesten Bezugssystems zu beschreiben. Die Verwendung von ähnlichen Koordinatensätzen für alle Körper eines Systems macht es für den Nutzer leichter, das Modell durch Hinzufügen oder Streichen von Körpern und Gelenken bzw. durch die Einführung von nichtlinearen Kraft- und Bedingungsfunktionen zu ändern.

Sowohl das Einbettungsverfahren als auch die erweiterte Formulierung werden in diesem Buch ausführlich behandelt, und anhand mehrerer Beispiele wird die Struktur der Gleichungen gezeigt, die sich mit den jeweiligen Formulierungen ergeben. Beide Verfahren wurden mit Erfolg bei der Analyse, der Konstruktion und der Steuerung von vielen technischen und industriellen Anwendungen eingesetzt, etwa Fahrzeugen, Mechanismen, Robotermanipulatoren, Maschinen, Raumfahrtsystemen und biomechanischen Systemen. Ich hoffe, dass Sie nach dem sorgfältigen Durcharbeiten dieser beiden grundlegenden Formulierungen die Verfahren begründet besser auswählen können, die sich am besten für Ihre Anwendung eignen.

1.10 Aufbau, Ziel und Schreibweisen dieses Buches

Dieses Buch soll eine Einführung in die Mehrkörpersimulation geben. Es soll den Leser mit verschiedenen dynamischen Formulierungen bekannt machen, die sich auf einem Digitalrechner implementieren lassen. Die Computerimplementation ist notwendig, um die dynamische Bewegung von großen Systemen untersuchen zu können. Die in diesem Buch vorgestellten allgemeinen Formulierungen können auch für die Entwicklung von allgemein verwendbaren Computercodes verwendet werden, die sich für die Analyse einer großen Klasse von Mehrkörpersystemen eignen. Das Buch ist (einschließlich dieses Einführungskapitels) in neun Kapitel gegliedert.

Da die Dimension und die Komplexität von Mehrkörpersystemen zunimmt, muss man Matrizenverfahren und numerische Verfahren kennen, um die Theorie hinter den speziellen und allgemein verwendbaren Mehrkörpersimulationsprogrammen verstehen zu können. Aus diesem Grund bietet Kapitel 2 eine kurze Einführung in die lineare Algebra. Es behandelt Matrizen- und Vektoroperationen und -identitäten sowie Methoden für die numerische Lösung von Systemen algebraischer Gleichungen. In diesem Kapitel werden auch die $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung und die Singulärwertzerlegung von Matrizen eingeführt, die in der Mehrkörperdynamik dazu dienen können, die Geschwindigkeitstransformationsmatrizen – d. h. den Zusammenhang zwischen den Zeitableitungen der Freiheitsgrade – zu bestimmen.

Die Kinematik von Mehrkörpersystemen wird in Kapitel 3 diskutiert. In diesem Kapitel werden kinematisch bestimmte Systeme untersucht, für die alle Freiheitsgrade festgelegt sind. Um in diesem Fall die Systemkonfiguration zu bestimmen, muss man nur einen Satz von algebraischen Gleichungen aufstellen. Die Bewegungsgesetze müssen nicht angewendet werden, da die Freiheitsgrade und ihre Zeitableitungen bekannt sind. Zwei grundlegende Ansätze werden diskutiert, der klassische Ansatz und der Computeransatz. Der erste eignet sich für Systeme aus einer kleinen Anzahl von Körpern und Gelenken, in denen man die Freiheitsgrade einfach und intuitiv bestimmen kann. Der Computeransatz hingegen eignet sich eher für die Untersuchung komplexer Systeme und kann angewendet werden, um ein allgemein einsetzbares Computerprogramm für die kinematische Analyse einer Vielzahl von Mehrkörperanwendungen zu entwickeln. Ein solches Programm auf Grundlage einer systematischen, allgemeinen Beschreibung der Systemtopologie kann dazu dienen, die kinematischen Zusammenhänge zwischen den Variablen zu konstruieren. Das Programm lässt sich auch dazu einsetzen, diese Zusammenhänge numerisch zu lösen, um so die Systemkonfiguration zu bestimmen.

Kapitel 4 stellt dann verschiedene Formen der dynamischen Gleichungen vor. Mit einfacher Newton'scher Mechanik werden diese verschiedenen Formen hergeleitet und die wichtigen Unterschiede zwischen ihnen gezeigt. Das Kapitel zeigt auch, dass die Zwangskräfte explizit in den Gleichungen auftauchen, wenn man die Bewegungsgleichungen mithilfe eines Satzes von redundanten Koordinaten herleitet. Das führt zur erweiterten Form der Bewegungsgleichungen. Daraufhin wird gezeigt, dass man die Zwangskräfte aus den Bewegungsgleichungen des Systems eliminieren kann, wenn diese Gleichungen mithilfe der Freiheitsgrade ausgedrückt werden. Dieses Vorgehen wird in diesem Buch als Einbettungsverfahren bezeichnet.

Obwohl in Kapitel 4 gezeigt wurde, dass sich das Einbettungsverfahren im Rahmen der Newton'schen Mechanik anwenden lässt, erhält man dieses Verfahren doch eleganter mithilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit. Dieses Prinzip erlaubt es, die Zwangskräfte systematisch zu eliminieren, sodass sich ein minimaler Satz von dynamischen Gleichungen, ausgedrückt mithilfe der Systemfreiheitsgrade, ergibt. Die Konzepte der virtuellen Arbeit und der verallgemeinerten Kräfte, die für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit, der Lagrange-Gleichung und der Hamilton'schen Formulierung nötig sind, werden dann in Kapitel 5 diskutiert. Das Kapitel endet mit der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Prinzip der virtuellen Arbeit und dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, das bei der Lösung von Systemen algebraischer Gleichungen verwendet wird.

Die in Kapitel 5 vorgestellten analytischen Verfahren dienen als Grundlage für die in Kapitel 6 diskutierten Computeransätze. Eingeführt werden ein computergestütztes Einbettungsverfahren und eine erweiterte Formulierung, die sich für die Analyse von großen Mehrkörpersystemen mit Zwangsbedingungen eignen. Danach werden die wichtigen Konzepte der verallgemeinerten Zwangskräfte und der Lagrange-Multiplikatoren diskutiert. Außerdem stellt Kapitel 6 noch numerische Algorithmen zur Lösung der Differential- und algebraischen Gleichungen von Mehrkörpersystemen vor. Wichtig ist der Hinweis, dass die in Kapitel 6 präsentierten grundlegenden Verfahren sich nicht von den in den Kapiteln 4 und 5 behandelten Verfahren unterscheiden, außer dass sie einen bestimmten Satz von Koordinaten verwenden, der unseren Computerzielen dient.

In den Kapitel 3–6 werden Beispiele ebener Systeme behandelt, um die Hauptkonzepte und grundlegenden Verfahren herauszuarbeiten, ohne sich mit den Details der dreidimensionalen Bewegung zu beschweren. Kapitel 7 dann handelt von der Analyse räumlicher Bewegungen. Es entwickelt Verfahren zur Beschreibung dreidimensionaler Rotationen und führt das Konzept der Winkelgeschwindigkeit in der räumlichen Analyse ein. Dann wird die dreidimensionale Form der Bewegungsgleichungen, ausgedrückt mithilfe der verallgemeinerten Koordinaten, vorgestellt und gleich zur Herleitung der bekannten Newton-Euler-Gleichungen angewendet. Das Kapitel behandelt dann Formulierungen der algebraischen Bindungsgleichungen durch verschiedene räumliche Gelenke (etwa das Drehgelenk, Schubgelenk, Zylindergelenk und Kreuzgelenk). Wie man die Newton-Euler-Gleichungen anwendet, um eine rekursive Formulierung für Mehrkörpersysteme herzuleiten, wird ebenfalls in Kapitel 7 gezeigt.

Kapitel 8 behandelt spezielle Themen, darunter die Kreiselbewegung und verschiedene Parametersätze, mit denen man die Orientierung eines starren Körpers im Raum definieren kann. Zu diesen Parametern gehören die Euler- und die Rodriguez-Parameter sowie die Quaternionen. Danach geht es um die Eigenwertanalyse zur Untersuchung der Stabilität von nichtlinearen Mehrkörpersystemen. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen lassen sich zu verschiedenen Zeitpunkten während der Simulation linearisieren, um ein Eigenwertproblem zu definieren; wenn man dieses Problem lösen kann, erhält man Informationen zur Stabilität des Systems. Dieses wichtige Thema wird ebenfalls in Kapitel 8 behandelt.

Kapitel 9 schließlich beschreibt den vielseitig einsetzbaren Mehrkörpersystem-Computercode SAMS/2000. In diesem Computerprogramm sind viele der in vorangegangenen Kapiteln diskutierten Formulierungen und Algorithmen implementiert. Diese und weitere Mehrkörpersystem-Codes erlauben dem Anwender, Computermodelle für ebene und räumliche Mehrkörpersysteme zu konstruieren. SAMS/2000 hat aber noch darüber hinausweisende Funktionen auf Grundlage von Formulierungen und Verfahren, die über den Inhalt dieses einführenden Lehrbuchs hinausgehen.

Die Leser sollten vertraut mit der in diesem Buch verwendeten Mehrkörpernotation sein, wie sie im Vorwort beschrieben wurde, damit sie den in den verschiedenen Kapiteln vorgestellten Entwicklungen folgen können. Fett-kursive Buchstaben bezeichnen Vektoren oder Matrizen. Hochgestellten Zahlen bezeichnen die Nummer eines Körpers. Um zwischen einer solchen hochgestellten Zahl und einer Potenz zu unterscheiden, werden Klammern verwendet, wann immer eine Größe zu einer bestimmten Potenz erhoben wird; beispielsweise ist $(l^5)^3$ eine skalare Größe l, die mit dem Körper 5 zusammenhängt und in der dritten Potenz steht.