1
Einführung in die Vektorrechnung

Neben der Integral- und Differentialrechnung ist die Vektorrechnung eine der wichtigsten mathematischen Disziplinen für die Ausbildung in einem Ingenieurfach, da in der Mechanik sehr viele gerichtete Größen wie Kräfte, Momente, Geschwindigkeiten, Verschiebungen, Ortsvektoren etc. auftreten. Die in den Boxen 1.1–1.4 aufgeführten Rechenregeln zur Beschreibung von geometrischen Vektoren sowie deren Komponentendarstellung, siehe Box 1.1, des Skalarproduktes in Box 1.2, des Vektorproduktes in Box 1.3 sowie des Spatproduktes aus Box 1.4 dienen zur Berechnung von Längen, Winkeln und Projektionen, Flächen und Normalenvektoren sowie Volumina und der linearen Abhängigkeit von Vektoren.

Box 1.1: Grundrechenregeln der Vektorrechnung

Grundrechenregeln ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$):

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{1.1}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1.2}$$

$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \tag{1.3}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \tag{1.4}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \tag{1.5}$$

Komponentendarstellung von Vektoren:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad \text{oder} \quad \vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \tag{1.6}$$

Vektoraddition:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \tag{1.7}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\vec{a} = \alpha(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = (\alpha a_1)\vec{e}_1 + (\alpha a_2)\vec{e}_2 + (\alpha a_3)\vec{e}_3 \tag{1.8}$$

Prüfungstrainer Technische Mechanik, 1. Auflage. Stefan Hartmann.

Box 1.2: Skalarprodukt

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha \tag{1.9}$$

Grundbeziehungen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{1.10}$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \tag{1.11}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \tag{1.12}$$

Kronecker-Symbol (Orthogonalität der Basisvektoren):

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j \end{cases} \tag{1.13}$$

Komponentenberechnung eines Vektors:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \tag{1.14}$$

Komponentendarstellung des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{1.15}$$

Norm (Betrag) eines Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt[+]{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt[+]{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,, \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \tag{1.16}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{1.17}$$

Einheitsvektor in Richtung des Vektors $\vec{a}$:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \tag{1.18}$$

Box 1.3: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Vektorprodukt ($\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{n}$ stellen ein Rechtssystem dar ($|\vec{n}| = 1$)):

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|\vec{n} = (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha)\vec{n} \tag{1.19}$$

Grundbeziehungen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{1.20}$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \tag{1.21}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{1.22}$$

$$\vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = \vec{0}, (\lambda \neq 0) \tag{1.23}$$

Berechnungsmöglichkeit mit verallgemeinerter Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \tag{1.24}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 \tag{1.25}$$

Box 1.4: Spatprodukt

Spatprodukt:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| \sin \alpha \cos \beta \tag{1.26}$$

Zyklische Vertauschbarkeit des Spatproduktes:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \tag{1.27}$$

Komponentendarstellung des Spatproduktes:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.28}$$

$$= (b_2 c_3 - b_3 c_2)a_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3)a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)a_3 \tag{1.29}$$

Lineare Abhängigkeit, Rechts- oder Linkssystem:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{cases} > 0 & \text{Rechtssystem} \\ < 0 & \text{Linkssystem} \\ = 0 & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind linear abhängig} \end{cases} \tag{1.30}$$

1.1
Beispiele zur Vektorrechnung

Beispiel 1.1 (Summe und Differenz zweier Vektoren)

Gegeben seien zwei in der Ebene aufgespannte Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y$ sowie $\vec{b} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$.[1)] Der Vektor $\vec{a}$ hat demnach einen Anteil mit dem Betrag 3 in x-Richtung und einen Anteil mit dem Betrag 1 in y-Richtung, siehe Abb. 1.1a. Der Vektor $\vec{b}$ hingegen hat den Betrag 1 in x-Richtung. Aufgrund des negativen Vorzeichens zeigt er in negative x-Richtung. Zudem hat $\vec{b}$ einen Anteil der Länge 2 in y-Richtung. Ausgehend von der Schulmathematik würde man die beiden Vektoren in Spaltenform darstellen

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix} \,,$$

die wir uns gedanklich merken können, aber nicht weiter verwenden wollen, da damit keine Aussage vorliegt, auf welche Basis man sich bezieht (siehe Beispiel 1.5, wo der gleiche Vektor unterschiedliche Koeffizienten relativ zu unterschiedlichen Basissystemen hat).

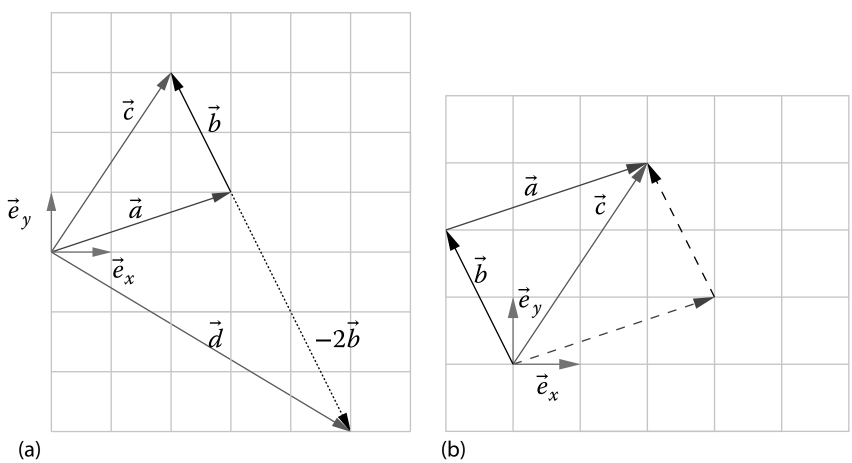


Abb. 1.1 Vektoraddition, Vektorsubtraktion sowie Kommutativität. (a) Vektoraddition $\vec{a} + \vec{b}$ und Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{b}$, (b) Kommutativität der Vektoraddition.

1) Steht nur ein Basisvektor, z. B. $\vec{e}_y$, als Vektorkomponente, wie im Vektor $\vec{a}$, so steht als Koeffizient (Vorfaktor) der Wert 1.

Die Addition der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bedeutet die Addition der Vektorkomponenten bzw. Vektorkoeffizienten, siehe Gl. (1.7),

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \underbrace{3\vec{e}_x + \vec{e}_y}_{\vec{a}} + \underbrace{(-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)}_{\vec{b}} = (3-1)\vec{e}_x + (1+2)\vec{e}_y = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \ .$$

Graphisch verschiebt man den Fußpunkt des Vektors $\vec{b}$ in die Spitze von $\vec{a}$, und der resultierende Vektor, hier $\vec{c}$, bedeutet der Vektor mit dem Fußpunkt im Fußpunkt von $\vec{a}$ und der Spitze in der Spitze von $\vec{b}$. Aufgrund der Kommutativität der Vektoraddition, siehe Gl. (1.2), könnte man auch den Fußpunkt von $\vec{a}$ in die Spitze von $\vec{b}$ legen, siehe Abb. 1.1b, um den resultierenden Vektor $\vec{c}$ zu erhalten.

Analog lässt sich die Differenz $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ mit

$$2\vec{b} = 2(-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) = 2(-1)\vec{e}_x + 2 \cdot 2\vec{e}_y = -2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$$

bestimmen

$$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} = \underbrace{3\vec{e}_x + \vec{e}_y}_{\vec{a}} - \underbrace{(-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)}_{2\vec{b}} = (3+2)\vec{e}_x + (1-4)\vec{e}_y = 5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y \ .$$

Der Vektor $\vec{d}$ ist ebenfalls in Abb. 1.1a abgebildet. Das in diesem Beispiel behandelte ebene Problem lässt sich formal auf jeden dreidimensionalen Vektor übertragen. Die graphische Veranschaulichung ist jedoch schwieriger und daher nur zum Teil aufgeführt.

Beispiel 1.2 (Skalarprodukt)

Wir sind an der Charakterisierung einer Raumdiagonalen eines Würfels im Hinblick ihrer Winkel zu den einzelnen Achsen bzw. Ebenen interessiert. Die Raumdiagonale in Abb. 1.2 ist durch den Vektor $\vec{g} = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ charakterisiert, wobei a die Seitenlänge des Würfels ist. Zunächst berechnen wir den Einheitsvektor in Richtung der Diagonalen, siehe Gl. (1.18). Mit

$$|\vec{g}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} \ ,$$

siehe auch Gl. (1.16), folgt $\vec{e}_D = \vec{g}/|\vec{g}| = (1/\sqrt{3})(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$. Die Länge der Diagonalen ist demnach $a\sqrt{3}$. Der Winkel β zwischen der Raumdiagonalen und der z-Achse lässt sich mithilfe von Gl. (1.17) bestimmen,

$$\cos\beta = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54{,}74°$$

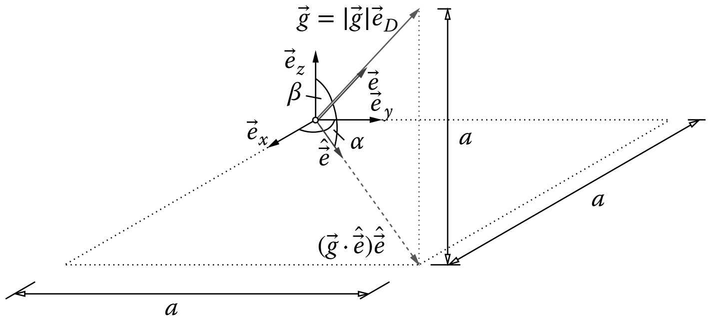


Abb. 1.2 Geometrie einer Raumdiagonalen ($\hat{\vec{e}} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$).

Daraus resultiert der Winkel $\alpha = 90° - \beta \approx 35{,}26°$. Da die Projektion von $\vec{g}$ auf die Diagonale in der x/y-Ebene, $\hat{\vec{e}} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ durch

$$\begin{aligned}(\vec{g} \cdot \hat{\vec{e}})\hat{\vec{e}} &= \left((\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}(1+1)(\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{e}_x + \vec{e}_y\end{aligned}$$

gegeben ist, könnte der Winkel α auch durch das Skalarprodukt berechnet werden,

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \cdot \frac{(\vec{g} \cdot \hat{\vec{e}})\hat{\vec{e}}}{|(\vec{g} \cdot \hat{\vec{e}})\hat{\vec{e}}|} = \vec{e}_D \cdot \hat{\vec{e}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \\ &= \frac{1+1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{2}{3} \approx 35{,}26° \ ,\end{aligned}$$

(Erinnerung: $2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$)

Beispiel 1.3 (Längenberechnung mit dem Skalarprodukt)

Für einen Transport benötigt man die Länge der Diagonalen eines Schrankes mit der Länge $L = 240$ cm, der Breite $B = 90$ cm und der Tiefe $H = 30$ cm. Der Vektor der Diagonalen ist $\vec{x} = 240\vec{e}_x + 90\vec{e}_y + 30\vec{e}_z$ [cm] und damit ist die Länge

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{240^2 + 90^2 + 30^2} \approx 258\ \text{cm} \ .$$

Beispiel 1.4 (Skalarprodukt und Projektion)

Gegeben sei eine Gerade im Raum

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{g}$$

mit $\vec{x}_0 = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z$ und $\vec{g} = 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$. Die Gerade liegt demnach parallel zur y/z-Ebene und der Vektor $\vec{x}_0$ befindet sich in der x/z-Ebene, siehe Abb. 1.3a. Es liegt daher die Geradengleichung

$$\vec{x}(\lambda) = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z + \lambda(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = 3\vec{e}_x + 2\lambda\vec{e}_y + (2+\lambda)\vec{e}_z \ ,$$

d. h. die Komponentendarstellung

$$x(\lambda) = 3 \ , \quad y(\lambda) = 2\lambda \ , \quad z(\lambda) = 2 + \lambda$$

vor. Wir betrachten als Nächstes den Punkt C, $\vec{c} = 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, und suchen den kürzesten Abstand des Punktes zur Geraden. Hierzu berechnen wir den Verbindungsvektor

$$\vec{s} = \vec{c} - \vec{x}_0 = (3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) - (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) = -3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z \ .$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}$ in Richtung der Geraden lautet, siehe Gln. (1.16) und (1.18),

$$\vec{e} = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

und wird für die rechtwinklige Projektion des Vektors $\vec{s}$ auf die Gerade benötigt, siehe Abb. 1.3b,

$$(\vec{s}\cdot\vec{e})\vec{e} = \underbrace{\left((-3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)\right)}_{(6+1)/\sqrt{5}=7/\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{7}{5}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \ .$$

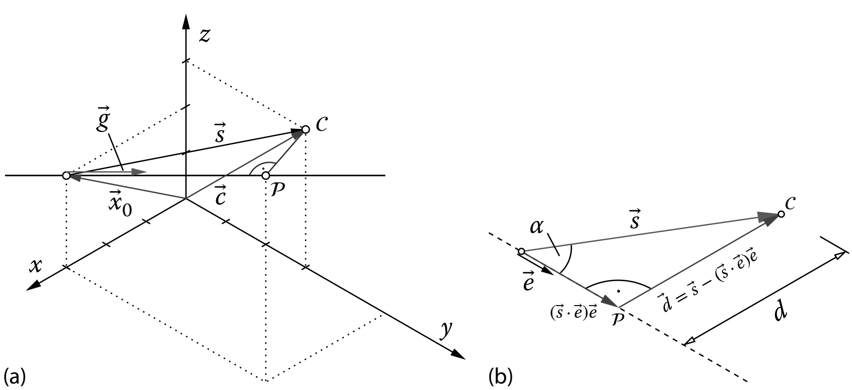


Abb. 1.3 Projektion und kürzester Abstand zu einer Geraden. (a) Gerade im Raum, (b) Projektion und kürzester Abstand.

Der auf der Geraden senkrecht stehende Vektor berechnet sich aus der Differenz des Vektors $\vec{s}$ und der Projektion $(\vec{s}\cdot\vec{e})\vec{e}$

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{s} - (\vec{s}\cdot\vec{e})\vec{e} = -3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z - \frac{7}{5}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)\\ &= -3\vec{e}_x + \frac{1}{5}\vec{e}_y - \frac{2}{5}\vec{e}_z\ .\end{aligned}$$

Der Betrag des Vektors $\vec{d}$ gibt den kürzesten Abstand des Punktes C zur Geraden an,

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{46}{5}}\ .$$

Wir können noch den Abstand auf der Geraden ausrechnen, den der Punkt $\mathcal{P}$ zum Punkt $\vec{x}_0$ besitzt,

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{g} = \vec{x}_0 + \mu\vec{e}\ , \quad \mu = \lambda|\vec{g}|\ .$$

Da $\mu\vec{e} = (\vec{s}\cdot\vec{e})\vec{e}$ gilt, folgt

$$\mu = \vec{s}\cdot\vec{e} = \frac{7}{\sqrt{5}}\ .$$

μ hat die Dimension einer Länge, da der Einheitsvektor $\vec{e}$ dimensionsfrei ist, währenddessen $\lambda = \mu/|\vec{g}|$ keine Dimension hat und die Koeffizienten des Vektors $\vec{g}$ die Dimension einer Länge haben.

Beispiel 1.5 (Skalarprodukt zur Komponentenberechnung)

Häufig tritt die Fragestellung der Darstellung von Vektoren in einem anderen Basissystem auf. In Abb. 1.4a ist der Vektor $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$ relativ zu dem Basissystem $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gegeben. Das neue Basissystem $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ sei durch die Drehung $\varphi = 30°$ um die z-Achse definiert,

$$\begin{aligned}\vec{e}_\xi &= \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\\ \vec{e}_\eta &= -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\\ \vec{e}_\zeta &= \vec{e}_z\end{aligned}$$

($\cos 30° = \sqrt{3}/2$, $\sin 30° = 1/2$). Die Darstellung des Vektors $\vec{a}$ in Bezug auf die neue Basis lautet

$$\vec{a} = a_\xi\vec{e}_\xi + a_\eta\vec{e}_\eta + a_\zeta\vec{e}_\zeta\ ,$$

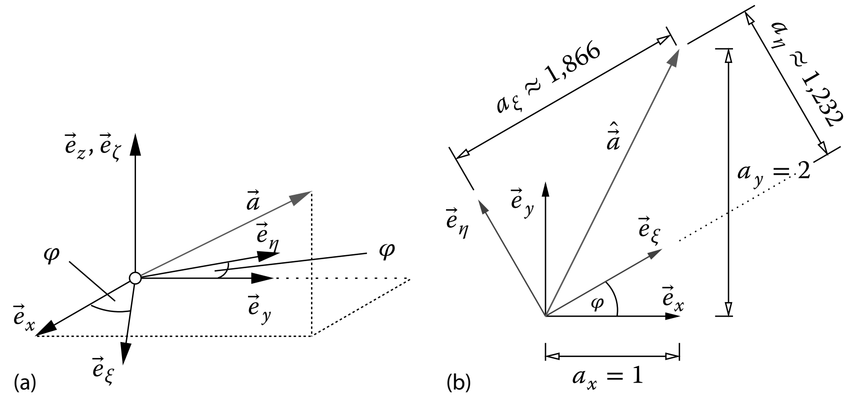


Abb. 1.4 Wechsel des Basissystems ($\hat{\vec{a}} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ ist nur derjenige Anteil in der x/y-Ebene – Projektion von $\vec{a}$ auf die x/y-Ebene). (a) Drehung des Basissystems (3D-Darstellung), (b) ebene Darstellung der Drehung.

und wir suchen die Koeffizienten a_ξ, a_η und a_ζ. Durch das Skalarprodukt des Vektors $\vec{a}$ mit den einzelnen Basisvektoren kann man sich diese Koeffizienten beschaffen,

$$\begin{aligned}
a_\xi &= \vec{a} \cdot \vec{e}_\xi = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y \right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2) \approx 1{,}866 \;, \\
a_\eta &= \vec{a} \cdot \vec{e}_\eta = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \right) = \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{3}) \\
&\approx 1{,}232 \;, \\
a_\zeta &= \vec{a} \cdot \vec{e}_\zeta = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = 1 \;.
\end{aligned}$$

In diesem Sinne entsprechen die Produkte $\vec{a} \cdot \vec{e}_I$, $I = \xi, \eta, \zeta$, der Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung $\vec{e}_I$, $I = \xi, \eta, \zeta$. Wir erhalten hiermit den Vektor $\vec{a}$ ausgedrückt in der Basis $\vec{e}_I$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2)\right)\vec{e}_\xi + \left(\frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{3})\right)\vec{e}_\eta + \vec{e}_\zeta \approx \\
&\approx 1{,}866\vec{e}_\xi + 1{,}232\vec{e}_\eta + \vec{e}_\zeta \;.
\end{aligned}$$

In Abb. 1.4b ist dies graphisch in der ξ/η-Ebene dargestellt. Der Vektor ändert sich demnach nicht. Es ändern sich beim Wechsel des Basissystems die Vektorkoeffizienten, d. h. Richtung und Betrag bleiben konstant beim Wechsel des Basissystems.

Beispiel 1.6 (Vektorprodukt)

Wir betrachten eine Dreiecksfläche parallel zur x/z-Ebene. Die notwendigen Koordinaten der Ecken der Fläche, hier gegeben durch die Ortsvektoren, lauten $\vec{x}_1 = 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{x}_2 = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ sowie $\vec{x}_3 = 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$, siehe Abb. 1.5. Die Zahlenwerte der Vektorkoeffizienten seien in mm gegeben. Gesucht ist der Normalenvektor $\vec{n}$ auf der Fläche, die Dreiecksfläche A selbst sowie die Länge der Verbindungslinie zwischen den Punkten 2 und 3. Wir berechnen zunächst die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, welche die Fläche aufspannen,

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{x}_3 - \vec{x}_1 = 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z - (3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = (3-3)\vec{e}_y + (4-2)\vec{e}_z = 2\vec{e}_z \ , \\
\vec{b} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z - (3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = 3\vec{e}_x + (3-3)\vec{e}_y + (2-2)\vec{e}_z \\
&= 3\vec{e}_x \ .
\end{aligned}$$

Der auf den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehende (bei einem Rechtssystem) Vektor $\vec{c}$ berechnet sich aus dem Kreuzprodukt (1.25)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{e}_z \times 3\vec{e}_x = 6\vec{e}_y \ .$$

Hieraus kann der Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = \vec{c}/|\vec{c}|$ bestimmt werden:

$$\vec{n} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{6}{|6\vec{e}_y|}\vec{e}_y = \frac{6}{\sqrt{6^2}}\vec{e}_y = \vec{e}_y$$

(die Koeffizienten des Vektors $\vec{n}$ sind dimensions- bzw. einheitenfrei). Ein Ergebnis, welches zu erwarten war. Die Dreiecksfläche A ist halb so groß wie die Fläche des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms,

$$A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{6}{2} = 3\,\mathrm{mm}^2 \ ,$$

und die Länge der Dreieckseite zwischen den Punkten 2 und 3 berechnet sich aus dem Betrag

$$L = |\vec{x}_3 - \vec{x}_2| = |-3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}\,\mathrm{mm} \ .$$

Beispiel 1.7 (Spatprodukt)

Mithilfe des Spatproduktes (1.29) können wir das Volumen einer Pyramide ausrechnen, siehe Abb. 1.6a. Wir wissen, dass der Tetraeder (Vierflächler) ein Sechstel des Volumens eines Parallelepipeds hat (Hartmann, 2015), und somit die Pyramide, welche das zweifache Volumen eines Tetraeders besitzt, das Volumen

$$V_{\mathrm{pyr}} = \frac{1}{3}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

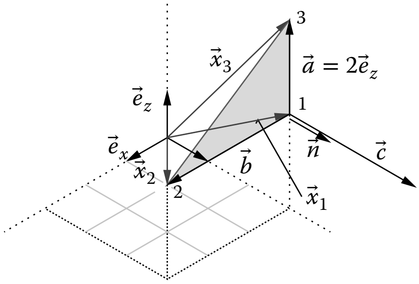


Abb. 1.5 Dreiecksfläche.

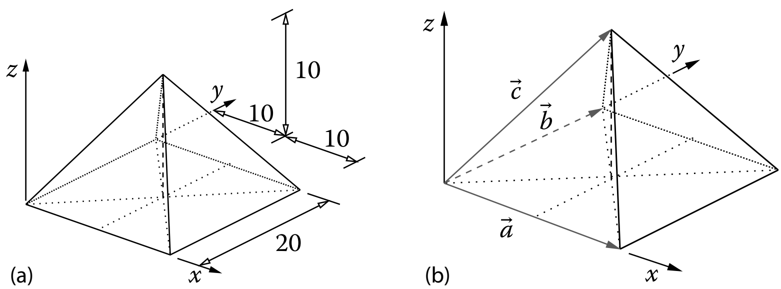


Abb. 1.6 Geometrie einer Pyramide. (a) Geometrie (Angaben in m), (b) aufspannende Vektoren.

aufweist. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen die Grundseite auf und der Vektor $\vec{c}$ zeigt in Richtung des Grates, siehe Abb. 1.6b. Durch Ablesen erhalten wir $\vec{a} = 20\vec{e}_x$, $\vec{b} = 20\vec{e}_y$ und $\vec{c} = 10\vec{e}_x + 10\vec{e}_y + 10\vec{e}_z$ (alle Koeffizienten haben die Einheit m). Wir berechnen zunächst das Kreuzprodukt über die verallgemeinerte Determinante (1.24)

$$\vec{d} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 20 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 200\vec{e}_x - 200\vec{e}_z \ .$$

Das noch fehlende Skalarprodukt gemäß Gl. (1.15) liefert

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} = 20\vec{e}_x \cdot (200\vec{e}_x - 200\vec{e}_z) = 4000\,\mathrm{m}^3 \ .$$

Das Volumen der Pyramide ist daher

$$V_{\mathrm{pyr}} = \frac{4000}{3} \approx 1333{,}33\,\mathrm{m}^3 \ ,$$

und nebenbei erhalten wir die Aussage, siehe Gl. (1.30), dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Rechtssystem aufbauen ($\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$) und linear unabhängig sind.

Beispiel 1.8 (Lineare Abhängigkeit)

Wir nehmen Bezug auf Beispiel 1.7. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind gemäß Gl. (1.30) linear unabhängig und bilden ein Rechtssystem. Es sei der Vektor $\vec{f} = 5\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$ gegeben. Wir überprüfen anhand des Spatproduktes (1.29) die Eigenschaften der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{f}$ zueinander,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{f} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 20 \cdot (20 \cdot 0 - 5 \cdot 0) + 0 + 0 = 0\ .$$

Die Vektoren sind demnach linear abhängig. Da der Vektor $\vec{f}$ in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene liegt, wird kein Parallelepiped (Spat) aufgespannt und das „Volumen" ist null. Der Vektor lässt sich demnach durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken, $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b})/4$.

1.2 Aufgaben zur Vektorrechnung

Aufgabe 1.1 (Summen und Differenzen von Vektoren)

1. Addieren Sie graphisch und rechnerisch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
2. Führen Sie sowohl graphisch als auch rechnerisch die Rechenoperation $\vec{b} + 2\vec{c} - \vec{a} + (2\vec{a} + \vec{c})$ aus.
3. Bestimmen Sie rechnerisch den Vektor $\vec{d}$ aus der Gleichung

$$3(\vec{u} - \vec{v}) - 2(2\vec{w} - \vec{u}) + 2\vec{v} + 3\vec{d} = \vec{0}\ .$$

Gegeben: $\vec{a} = 5/2\vec{e}_x + 3/2\vec{e}_y$, $\vec{b} = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{c} = -3/2\vec{e}_y$, $\vec{u} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, $\vec{v} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{w} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$

Aufgabe 1.2 (Summe und Skalarprodukt)

1. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{u}$ aus der Summe $\vec{u} = 2(\vec{a} + 3\vec{b}) - 4(\vec{a} - \vec{c}) + 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d})$.
2. Bestimmen Sie $\vec{v}$ aus der Gleichung $3(\vec{f} - \vec{g}) - 2(-\vec{f} + 2\vec{h}) + 2(\vec{g} - \vec{v}) = \vec{0}$.
3. Bestimmen Sie mit dem Skalarprodukt die Längen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sowie den Winkel α, den diese Vektoren einschließen.

Gegeben: $\vec{a} = \vec{e}_x + 4\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{b} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_z$, $\vec{c} = -4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{d} = 3\vec{e}_y - 3\vec{e}_z$, $\vec{f} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{g} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{h} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$

Aufgabe 1.3 (Skalarprodukt)
Ein Dreieck sei gegeben durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Fertigen Sie hierzu eine Skizze an.

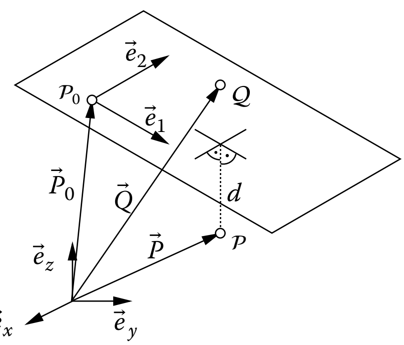
1. Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$?
2. Berechnen Sie den Betrag von $\vec{c}$.
3. Welche Beziehung besteht zwischen den Beträgen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, wenn $\vec{b} = 2\vec{e}_y$ gilt?

Gegeben: $\vec{a} = 4\vec{e}_x$, $\vec{b} = -\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y$

Aufgabe 1.4 (Skalarprodukt)
Eine Ebene $\vec{E}$ im Raum sei gegeben durch die Gleichung $\vec{E}(\alpha_1, \alpha_2) = \vec{P}_0 + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Jeder Punkt der Ebene kann auf diese Weise durch eine geeignete Wahl der Parameter α_1 und α_2 dargestellt werden.

1. Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathcal{Q}$, der durch den Vektor $\vec{Q}$ gegeben ist, in der Ebene $\vec{E}$ liegt. Dies trifft für den Punkt $\mathcal{P}$, dargestellt durch den Vektor $\vec{P}$, nicht zu.
2. Wie groß ist der Abstand d des Punktes $\mathcal{P}$ von der Ebene?

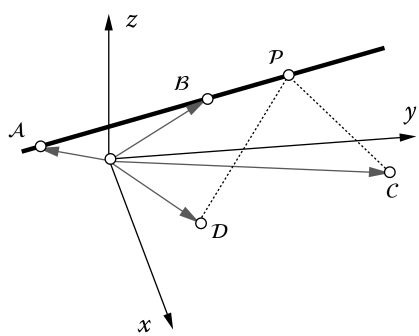
Gegeben: $\vec{P}_0 = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{e}_1 = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$, $\vec{e}_2 = (\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z)/\sqrt{6}$, $\vec{P} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{Q} = 5\vec{e}_x - \vec{e}_y + 7\vec{e}_z$, Normaleneinheitsvektor der Ebene $\vec{n} = \left(\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z\right)/\sqrt{3}$



Aufgabe 1.5 (Skalarprodukt)
Gegeben seien die vier Punkte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$.

1. Geben Sie die Gleichung der Geraden $\vec{g}$ an, die durch die Punkte $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ geht.
2. Bestimmen Sie den Punkt $\mathcal{P}$ auf der Geraden durch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, der von $\mathcal{C}$ und von $\mathcal{D}$ gleich weit entfernt ist.

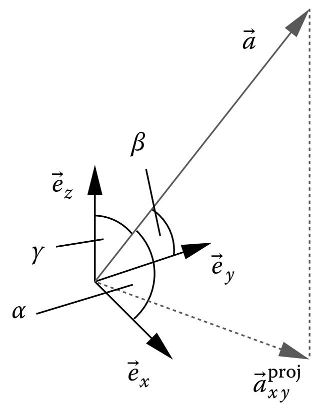
Gegeben: Die Ortsvektoren der zugehörigen Punkte werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, d. h. $\vec{a}$ zeigt vom Koordinatenursprung zum Punkt $\mathcal{A}$. $\vec{a} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{b} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{c} = 2\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$, $\vec{d} = 8\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$



Aufgabe 1.6 (Skalarprodukt)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Vektor $\vec{a}$ durch seine Koeffizienten a_x, a_y und a_z gegeben.

1. Bestimmen Sie die drei Winkel α, β und γ, die den Vektor mit den Koordinatenrichtungen x, y und z einschließen.
2. Bestimmen Sie die Projizierte $\vec{a}_{xy}^{\text{proj}}$ des Vektors $\vec{a}$, die in der x/y-Ebene liegt, und leiten Sie den zugehörigen Einheitsvektor her.
3. Wie groß ist der Winkel φ, den die Projizierte mit der x-Richtung einschließt, und wie groß ist der Anstellwinkel ϑ des Vektors $\vec{a}$ gegenüber der x/y-Ebene?
4. An welche Stelle des Koordinatensystems zeigt der Vektor $\vec{a}$, wenn man seine Länge verdoppelt und die Winkel φ und ϑ halbiert?



Gegeben: $a_x = 3$, $a_y = 4$, $a_z = 5$

Aufgabe 1.7 (Wechsel des Basissystems)

Gegeben sei der Vektor $\vec{x}$ im kartesischen Basissystem $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Die Basisvektoren

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\ , \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)\ , \quad \vec{E}_3 = \sqrt{6}\vec{e}_1$$

bilden ein weiteres Basissystem. Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ im neuen Basissystem gemäß $\vec{x} = Y_1\vec{E}_1 + Y_2\vec{E}_2 + Y_3\vec{E}_3$ dar, und geben Sie die Komponenten Y_1, Y_2 und Y_3 an.

Gegeben: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

Aufgabe 1.8 (Wechsel des Basissystems)

1. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = 5\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \quad \text{sowie} \quad \vec{g}_1 = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{g}_2 = 4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y\ .$$

   Überzeugen Sie sich davon, dass $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$ orthogonal sind, und ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die Komponentendarstellung des Vektors $\vec{a}$ in Bezug auf die Basisvektoren $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$.

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten b_1, b_2 und b_3 des Vektors $\vec{b} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 9\vec{e}_z = b_1\vec{g}_1 + b_2\vec{g}_2 + b_3\vec{g}_3$ in Bezug auf die orthogonalen Basisvektoren

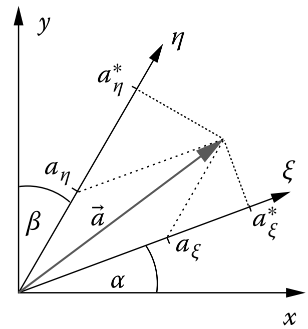
$$\vec{g}_1 = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z\ , \quad \vec{g}_2 = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z\ , \quad \vec{g}_3 = \vec{e}_y - \vec{e}_z\ .$$

Aufgabe 1.9 (Wechsel des Basissystems)

Gegeben sind ein kartesisches (x, y) und ein schiefwinkliges Koordinatensystem (ξ, η) mit gleichem Ursprung (siehe Abbildung). Der Vektor $\vec{a}$ hat in dem kartesischen Koordinatensystem die Koeffizienten a_x und a_y, $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$.

1. Berechnen Sie die Projektionen a^*_ξ und a^*_η von $\vec{a}$ auf die Achsen ξ und η.
2. Berechnen Sie die Komponenten a_ξ und a_η von $\vec{a}$ bezüglich des schiefwinkligen Koordinatensystems.

Gegeben: $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$, $a_x = 4$, $a_y = 3$



Aufgabe 1.10 (Skalar- und Kreuzprodukt)

Gegeben sind die Punkte $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ durch ihre Ortsvektoren $\vec{x}_p$ und $\vec{x}_q$.

1. Geben Sie den Einheitsvektor $\vec{e}$ der Richtung $\overrightarrow{PQ}$ an.
2. Wie lautet die Gerade durch die Punkte $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ in Vektor-Darstellung?
3. Berechnen Sie den Abstand eines weiteren Punktes $\mathcal{C}$ am Ort $\vec{x}_c$ zu der Geraden durch die Punkte $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$.
4. Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{s} \times \vec{F}$ zwischen dem Differenzvektor $\vec{s} = \vec{x}_q - \vec{x}_c$ und dem Vektor $\vec{F}$, der entlang der Geraden wirkt.
5. Stellen Sie die Vektoren graphisch dar.

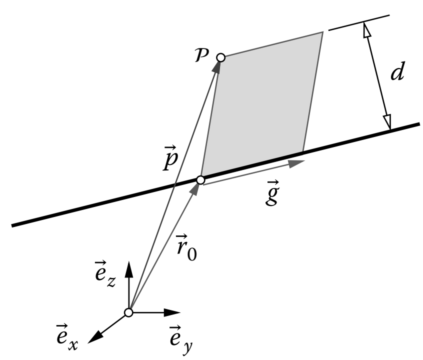
Gegeben: $\vec{x}_p = 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{x}_q = 4\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$, $\vec{x}_c = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{F} = 5\vec{e}$

Aufgabe 1.11 (Kreuzprodukt)

Gegeben sei eine Gerade $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{g}$ und ein weiterer Punkt $\mathcal{P}$ beschrieben durch den Ortsvektor $\vec{p}$.

Berechnen Sie den Abstand d des Punktes $\mathcal{P}$ von der Geraden $\vec{r}(\lambda)$ aus dem durch $\vec{g}$ und $\vec{p} - \vec{r}_0$ aufgespannten Parallelogramm.

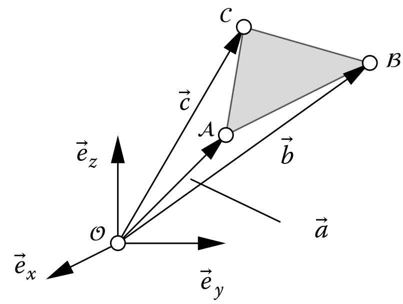
Gegeben: $\vec{r}_0 = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{g} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{p} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$



Aufgabe 1.12 (Kreuzprodukt)

1. Berechnen Sie die Vektoren $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{s}_2 = \overrightarrow{AC}$.
2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\mathcal{ABC}$.
3. Wie lautet der Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ der Ebene, die durch die Vektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ aufgespannt wird?

Gegeben: $\vec{a} = \overrightarrow{\mathcal{OA}} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathcal{OB}} = 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathcal{OC}} = \vec{e}_y + 4\vec{e}_z$



Aufgabe 1.13 (Spatprodukt und lineare Unabhängigkeit)

1. Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind und ob sie in der Reihenfolge $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechts- oder Linkssystem bilden.
2. Bestimmen Sie die Zahlenwerte für λ, μ und ν aus der Gleichung

$$(\lambda + 4\mu)\vec{a} + (\mu - \lambda + 3\nu)\vec{b} + (4\mu + 1)(\vec{a} + 2\vec{c}) = \vec{0}$$

Gegeben: $\vec{a} = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{b} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{c} = 4\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$

Aufgabe 1.14 (Spatprodukt und lineare Unabhängigkeit)

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind und überprüfen Sie, ob ein Rechts- oder Linkssystem vorliegt.
2. Berechnen Sie λ, μ und ν aus der Gleichung

$$\lambda(\vec{a} - 2\vec{c}) + \mu(3\vec{c} + \vec{b}) = (2\nu + \mu)\vec{a} + 2\vec{b}\ .$$

3. Berechnen Sie λ, μ und ν aus der Gleichung

$$\lambda^2(\vec{a} + \vec{c}) + (\lambda + \nu)(\vec{b} + \vec{a}) = 2\mu\vec{b} - (1 - 2\lambda)\vec{c}\ .$$

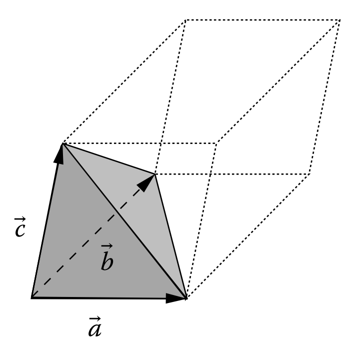
Gegeben: $\vec{a} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{c} = \vec{e}_x - \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$

Aufgabe 1.15 (Spatprodukt und Kreuzprodukt)

Durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wird ein Spat (Parallelepiped) beschrieben.

1. Berechnen Sie die Flächeninhalte der Parallelogramme, die die Oberfläche des Spats bilden.
2. Berechnen Sie das Volumen des aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Tetraeders.
3. Bilden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein Rechtssystem?

Gegeben: $\vec{a} = 4\vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{b} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{c} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + 3\vec{e}_z$



1.3 Ergebnisse der Aufgaben zu Abschn. 1.2

Lösung 1.1

1. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (1/2)\vec{e}_x + \vec{e}_y$
2. $\vec{b} + 2\vec{c} - \vec{a} + (2\vec{a} + \vec{c}) = (1/2)\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$
3. $\vec{d} = -(4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)/3$

Lösung 1.2

1. $\vec{u} = 6\vec{e}_x + 11\vec{e}_y - 17\vec{e}_z$
2. $\vec{v} = (-17\vec{e}_y + 7\vec{e}_z)/2$
3. $|\vec{u}| \approx 21{,}12$, $|\vec{v}| \approx 9{,}19$, $\alpha \approx 142{,}01°$

Lösung 1.3

1. Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $120° = 2/3\pi$
2. $|\vec{c}| = \sqrt{28}$
3. $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

Lösung 1.4

1. Bestimme den Abstand von $\mathcal{Q}$ zur Ebene, siehe Beispiel 1.4. Hier ist der Abstand 0. Für den Punkt $\mathcal{P}$ ist der Abstand verschieden von Null, d. h. $\mathcal{P}$ liegt außerhalb der Ebene.
2. $d = \sqrt{3}$

Lösung 1.5

1. $\vec{g} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z + \lambda(2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)$
2. $\vec{p} = 4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$

Lösung 1.6

1. $\alpha = 64{,}9°$, $\beta = 55{,}6°$, $\gamma = 45°$
2. $\vec{a}_{xy}^{\text{proj}} = (3/5)\vec{e}_x + (4/5)\vec{e}_y$
3. $\varphi = 53{,}13°$, $\vartheta = 45°$
4. $\vec{a}^{\text{neu}} = 11{,}68\vec{e}_x + 5{,}84\vec{e}_y + 5{,}412\vec{e}_z$

Lösung 1.7
$Y_1 = \sqrt{2}(x_2 - x_3)$, $Y_2 = \sqrt{3}x_3$, $Y_3 = (x_1 - x_2)/\sqrt{6}$

Lösung 1.8

1. $\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0$: orthogonal, $a_1 = 11/5$, $a_2 = 7/10$
2. $b_1 = 13/3$, $b_2 = 5/3$, $b_3 = -3$

Lösung 1.9

1. $a^*_\xi = 4{,}785$, $a^*_\eta = 4{,}60$
2. $a_\xi = 3{,}06$, $a_\eta = 2{,}26$

Lösung 1.10

1. $\vec{e} = 1/13(2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z)$
2. $\vec{r}(\lambda) = 2(1+\lambda)\vec{e}_y + (2+3\lambda)\vec{e}_z$
3. $d = 1$
4. $\vec{s} \times \vec{F} = 5/13(3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)$

Lösung 1.11
$d = 2{,}15$

Lösung 1.12

1. $\vec{s}_1 = (-\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$, $\vec{s}_2 = (-\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)$
2. $F = \sqrt{2}$
3. $\vec{n} = \sqrt{2}/22(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$

Lösung 1.13

1. Bilde das Spatprodukt gemäß Gl. (1.29), $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -26$. Die Vektoren sind damit linear unabhängig und es liegt ein Linkssystem vor.
2. $\mu = -1/4$, $\lambda = 1$, $\nu = 5/12$.

Lösung 1.14

1. Bilde Spatprodukt gemäß Gl. (1.29), $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 21$. Die Vektoren sind damit linear unabhängig und es liegt ein Rechtssystem vor.
2. $\lambda = 3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1/2$
3. $\lambda = 1, \quad \mu = -1/2, \quad \nu = -2$

Lösung 1.15

1. $A_{ab} = 11{,}7$, $A_{ac} = 12{,}7$, $A_{bc} = 10{,}95$
2. $V = 6$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 36 > 0 \Rightarrow$ Rechtssystem