

1 Einteilchensysteme

1.1 Die Newtonschen Axiome

Das erste Newtonsche Axiom lautet in der bekannten Form: „Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn einwirkt.“ Es wurde um 1640 von Galilei aus Versuchen an schiefen Ebenen abgeleitet und heißt daher auch „Trägheitsgesetz von Galilei“. Die Entdeckung dieses Gesetzes war eine geniale Leistung, denn Bewegungen in Labor und Natur sind nicht gleichförmig und geradlinig. Zur Aufrechterhaltung solcher Bewegungen muss man sogar im scheinbaren Gegensatz zum Trägheitsgesetz Kräfte aufbringen (zur Überwindung der Reibung). Das Trägheitsgesetz ist also eine Extrapolation vieler Beobachtungen auf einen idealisierten, reibungsfreien Grenzfall.

Das Trägheitsgesetz enthält den Begriff ‚Kraft‘, der hier noch nicht physikalisch definiert wurde. Daher muss die obige Fassung des Axioms so umformuliert werden, dass sie ohne den Begriff ‚Kraft‘ auskommt. Wir gehen von der Erfahrung aus, dass alle Umgebungseinflüsse mit der Entfernung r abnehmen und schließlich für r gegen unendlich gegen null gehen. Dann lautet die zweite Fassung des ersten Newtonschen Axioms folgendermaßen:

Jeder Körper, der von allen anderen unendlich weit entfernt ist, der also keine Umgebung hat, verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung.

Auch diese zweite Fassung ist noch nicht präzise genug. Sie hat nämlich nur dann einen Sinn, wenn das Bezugssystem¹, auf das sie sich bezieht, angegeben wird. Ein Körper kann ja nicht in allen Bezugssystemen zugleich unbeschleunigt sein. In der dritten (endgültigen) Formulierung lautet das **erste Newtonsche Axiom**:

Es gibt Bezugssysteme, in denen sich *alle* Körper, die keine Umgebung haben, gleichförmig und geradlinig bewegen oder ruhen.

Wie diese Bezugssysteme, die man **Inertialsysteme** (lateinisch: *inertia* = Trägheit) nennt, aussehen, wird im Axiom nicht gesagt.

1) Bezugssysteme sind physikalische Systeme mit Vorrichtungen zur Orts- und Zeitmessung, also mit Maßstäben und Uhren. Ein gutes Beispiel dafür ist ein periodisches Gitter aus geradlinigen, unendlich langen und dünnen Fäden mit regelmäßig angeordneten, synchronisierten Uhren. Beispiele sind auch der Hörsaal und der Laborraum mit entsprechenden Messgeräten. Alle Bezugssysteme enthalten einen Bezugspunkt 0.

Führt man im Bezugssystem Koordinaten ein, um Bewegungen oder Positionen von Körpern mathematisch zu beschreiben, so wird das Bezugssystem zum Koordinatensystem. Ein Koordinatensystem wird durch die Angabe $(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ des Bezugspunktes (Koordinatenursprunges) 0 und der drei Basisvektoren festgelegt.

Viele Physiker unterscheiden nicht streng zwischen den Begriffen „Bezugssystem“ und „Koordinatensystem“. Auch für uns sollen diese beiden Begriffe gleichwertig sein.

Nach unserer Erkenntnis sind alle Systeme inertial, die fest mit dem Fixsternhimmel verbunden sind. Dann sind auch alle Bezugssysteme, die sich mit konstanten Geschwindigkeitsvektoren gegen den Fixsternhimmel bewegen – ohne zu rotieren –, inertial. Die Geschwindigkeiten in diesen verschiedenen Systemen unterscheiden sich nur durch *konstante* Relativgeschwindigkeiten. Zum Beweis betrachten wir ein Bezugssystem S , das fest mit dem Fixsternhimmel verbunden ist, und ein weiteres Bezugssystem S' , das sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit \mathbf{u} im System S bewegt. Eine Punktmasse habe in beiden Bezugssystemen die Ortsvektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' . Zwischen beiden Ortsvektoren besteht die Beziehung:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{u} t + \mathbf{r}'(t) \\ \Rightarrow \mathbf{v}(t) &= \mathbf{u} + \mathbf{v}'(t) \\ \Rightarrow \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}'(t)\end{aligned}$$

Die Beschleunigungen sind in allen Inertialsystemen gleich groß.

Fest auf der Erde verankerte Bezugssysteme sind wegen der Erdrotation und der beschleunigten Translation der Erde im Weltraum nicht exakt inertial.² Sie können aber im Maschinenbau und in den meisten Problemen der Mechanik in sehr guter Näherung als inertial angesehen werden.

Sehr lange dauernde Vorgänge – z. B. mehrstündige Schwingungen eines Foucault-Pendels – und sehr großräumige Bewegungen – z. B. Geschossbahnen sowie Luft- und Meeresströmungen – werden aber entscheidend durch die Erdrotation beeinflusst. Daher ist bei langfristigen oder bei großräumigen Bewegungen unbedingt zu berücksichtigen, dass die Erde kein exaktes Inertialsystem ist, sondern rotiert. Wir werden in Abschn. 1.4 „Beschleunigte Bezugssysteme“ darauf näher zurückkommen.

Nach dem ersten Newtonschen Axiom sind alle umgebungsfreien, d. h. kräftefreien Körper in Inertialsystemen unbeschleunigt. Wir gehen nun einen Schritt weiter und untersuchen die Wirkung der Umgebung auf die Bewegung. Dabei verbleiben wir in Inertialsystemen.

Der Einfluss der Umgebung äußert sich in Kräften. Die Kräfte sind für Abweichungen von der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung und für das Verlassen der Ruhelage verantwortlich. Mit dem **Impuls**

$$\mathbf{p} := m \mathbf{v} \tag{1.1-1}$$

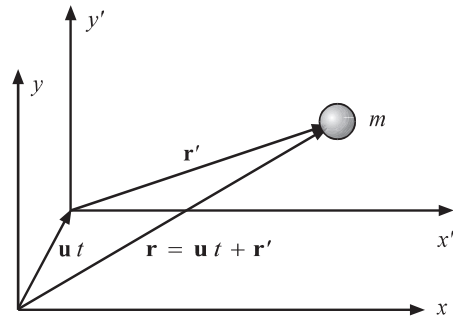


Abb. 1.1-1 Die beiden Bezugssysteme S und S' haben eine konstante Relativgeschwindigkeit \mathbf{u} , so dass Ortsvektoren und Geschwindigkeiten in beiden Bezugssystemen verschieden sind, nicht aber die Beschleunigungen.

2) Das Sonnenlicht braucht für den Weg von der Sonne zur Erde knapp 8,5 Minuten. Der mittlere Radius der leicht elliptischen Erdbahn beträgt daher $r \approx 1,5 \times 10^{11}$ m. Folglich wird die Erde mit $a = \omega^2 r \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$ zur Sonne hin beschleunigt. Die Sonne wiederum umläuft das Zentrum der Milchstraße mit der Geschwindigkeit $v \approx 250 \text{ km/s}$ und dem Radius $r \approx 30\,000$ Lichtjahre $\approx 2,8 \cdot 10^{20}$ m. Deshalb wird die Sonne zum Zentrum der Milchstraße beschleunigt mit $a = v^2/r \approx 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$.

lautet das **zweite Newtonsche Axiom**:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = \dot{m} \mathbf{v} + m \mathbf{a} \quad \stackrel{\uparrow}{=} \quad m \mathbf{a} \quad (1.1-2)$$

nur für $m = \text{const}$

Wenn nicht ausdrücklich anderes gesagt wird, dann betrachten wir nur konstante Massen.

Das zweite Newtonsche Axiom gilt in Inertialsystemen. Es gilt in beschleunigten Bezugssystemen nur, wenn wir Trägheitskräfte einbeziehen (siehe Abschn. 1.4). In der einen Gl. (1.1-2) treten mit Masse m und Kraft \mathbf{F} zugleich zwei neue Begriffe auf, die noch nicht definiert sind.

Wir definieren zuerst die Masse m mit dem dritten Newtonschen Axiom. Das **dritte Newtonsche Axiom** lautet:

Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft \mathbf{F}_{21} aus, so übt der Körper 2 auf den Körper 1 die Kraft \mathbf{F}_{12} aus, die denselben Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie \mathbf{F}_{21} hat:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (1.1-3)$$

In Worten: „*actio = reactio*“.

Für zwei konstante Massen, die nur untereinander wechselwirken und keine Umgebung haben, gilt nach dem zweiten Axiom:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = F_{12} \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -F_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}_2|}{|\ddot{\mathbf{r}}_1|} \quad (1.1-4)$$

Daher ermöglichen die Beschleunigungsmessungen in inertialen Systemen mit nur zwei Teilchen die Bestimmung jeder Masse als Vielfaches der normierten Masseneinheit. Damit sind die Massen vollständig bestimmt: Die Einheit der Masse ist international abgestimmt, das Vielfache der Einheit wird mit Gl. (1.1-4) gemessen.³

Nach der Bestimmung der Massen können nun endlich die Kräfte festgelegt werden. Zu diesem Zweck wird für einen Krafttyp eine *begrenzte* Zahl von Bahnen möglichst genau vermessen, d. h. Geschwindigkeit und Beschleunigung werden entlang der Bahnen gemessen. Aufbauend auf diesen Messungen *postuliert* (!) man eine Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ derart, dass die mit der Gl. $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \dot{\mathbf{p}}$ berechneten Bahnen mit den gemessenen Bahnen übereinstimmen.

Nach der Postulierung der Kräfte werden alle anderen Bahnen mit dem zweiten Newtonschen Axiom berechnet, d. h. der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eines Teilchens wird als Funktion der Zeit berechnet. Die Differentialgleichung (1.1-2) heißt daher auch **Bewegungsgleichung**.

3) Natürlich kann man Gl. (1.1-4) auch einfacher beweisen, indem man verschiedene Massen m_1, m_2, \dots einer einzigen Kraft \mathbf{F} aussetzt, die mit Sicherheit für alle Massen gleich groß ist. Dann gilt: $F = m_1 \ddot{r}_1 = m_2 \ddot{r}_3 = \dots$.

Daraus folgt ebenfalls Gl. (1.1-4). Der Nachteil dieser einfachen Methode besteht darin, dass man absolut sicher sein muss, dass auf alle Teilchen dieselbe Kraft \mathbf{F} wirkt. In den Zweikörpersystemen ist dies wegen „*actio = reactio*“ automatisch sichergestellt. (Siehe auch Aufgabe 2-4.)

Es gibt noch ein **viertes Newtonsches Axiom**, das bei Newton nur als Zusatz auftritt und uns so selbstverständlich zu sein scheint, dass es oft übersehen wird. Dieses auch „Regel vom Parallelogramm der Kräfte“ genannte Axiom besagt: Kräfte addieren sich wie Vektoren: $m \mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots$.

Danach ruft jede Kraft die ihr zukommende Beschleunigung hervor, unabhängig davon, ob noch andere Kräfte wirken. Die Unabhängigkeit der Kraftwirkungen voneinander ist ein Superpositionsprinzip für Kräfte.

1.2 Konservative Kräfte und Potentiale

Die Kräfte auf ein Teilchen können vom Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens, von seiner Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und von der Zeit t abhängen. Es gibt keine Kräfte, die von der Beschleunigung abhängen. Die Arbeit längs eines infinitesimalen Wegelementes ist

$$dW = \mathbf{F}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot d\mathbf{r} \quad (1.2-1)$$

Die Arbeit längs einer endlichen Kurve C wird durch ‚Summation‘ der infinitesimalen Arbeiten berechnet. So entstehen **Linien-** oder **Kurvenintegrale**. Linienintegrale werden meistens durch die Parametrisierung der Raumkurve C berechnet, wobei als Parameter oft die Zeit t verwendet wird. Wenn eine im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ durchlaufene Kurve durch die *Parameterdarstellung* $\mathbf{r}(t)$ beschrieben wird, dann ist $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t) dt$ und das *Linienintegral geht in ein gewöhnliches Integral über*:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot \mathbf{v}(t) dt \quad (1.2-2)$$

Für geschwindigkeits- oder zeitabhängige Kräfte hängt die Arbeit vom zeitlichen Ablauf der Bewegung ab, also von der Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchlaufen wird. Für diese Kräfte sind im Zusammenhang mit der Arbeit keine nennenswerten Gleichungen und Eigenschaften zu verzeichnen – abgesehen von der Lorentzkraft in Beispiel 1.2–2. Das ändert sich aber, wenn wir rein ortsabhängige Kräfte untersuchen. Für $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ hängt die Arbeit nicht davon ab, wie schnell die Kurve durchlaufen wird. Hinter den folgenden zwei Beispielen werden wir sogar – für die Physik besonders wichtige und häufig auftretende – Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kennenlernen, deren Arbeit nicht einmal vom durchlaufenen Weg abhängt, sondern nur noch vom Anfangs- und Endpunkt des Weges. Diese Kräfte lassen sich durch ein Potential $V(\mathbf{r})$ beschreiben.

Beispiel 1.2–1 Linienintegral für zwei verschiedene Wege

Die Kraft $\mathbf{F} = (y, x^2/(2m), x+z) \text{ N/m}$, die hier nur als einfaches Beispiel dient und keine physikalische Bedeutung hat, bewegt einen Körper zwischen den beiden Punkten

$$\mathbf{r}_1 = (2 \text{ m}, 0, 0) \quad \mathbf{r}_2 = (2 \text{ m}, 0, 4 \text{ m})$$

- a) auf einer Geraden parallel zur z -Achse.
- b) auf einer Schraubenlinie, deren Achse mit der z -Achse zusammenfällt.

Berechne die Arbeit auf beiden Wegen.

Lösung:

a) Mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_z in z -Richtung gilt: $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_z dz$. Die Arbeit beträgt daher

$$W_a = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{4 \text{ m}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z dz$$

$$= \int_0^{4 \text{ m}} (2 \text{ m} + z) \frac{\text{N}}{\text{m}} dz = 16 \text{ N m}$$

b) Die Schraubenlinie wird durch eine Parameterdarstellung beschrieben:

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \cdot \cos \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \sin \varphi \\ 4 \text{ m} \cdot \varphi / (2\pi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_b = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \cdot \sin \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \cos^2 \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \cos \varphi + 2 \text{ m} \cdot \varphi / \pi \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \text{ m} \cdot \sin \varphi \\ 2 \text{ m} \cdot \cos \varphi \\ 2 \text{ m} / \pi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \left[-4 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right) + 4 \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) + \left(2 \sin \varphi + \frac{\varphi^2}{\pi} \right) \frac{2}{\pi} \right] \Big|_0^{2\pi} \text{ N m}$$

$$= (8 - 4\pi) \text{ N m}$$

Auf beiden Wegen werden verschiedene Arbeiten geleistet: $W_a \neq W_b$. Die vorgegebene Kraft wird weiter unten „nicht konservativ“ genannt werden.

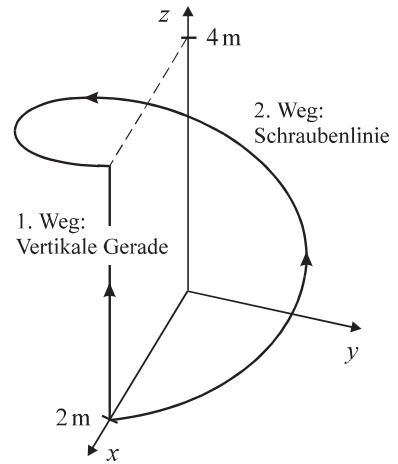


Abb. 1.2-1 Zwei Verschiebungen.

Beispiel 1.2-2 Arbeit der Lorentzkraft

Ein Magnetfeld \mathbf{B} übt auf eine bewegte Ladung q die Lorentzkraft $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ aus. Zeige, dass die Lorentzkraft keine Arbeit verrichtet.

Lösung:

Da die Lorentzkraft senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, gilt⁴

$$W = \int_{t_1}^{t_2} q \underbrace{[\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))] \cdot \mathbf{v}(t)}_{=0} dt = 0$$

4) Obwohl die Arbeit der Lorentzkraft für alle Wege gleich ist (nämlich null), ist die Lorentzkraft nicht konservativ, da nur rein ortsabhängige Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ – laut der später folgenden Definition – konservativ sein können.

Daher können die Geschwindigkeiten elektrisch geladener Teilchen nur mit elektrischen Feldern \mathbf{E} , nicht aber mit Magnetfeldern \mathbf{B} erhöht werden. Magnetfelder können nur die Richtung, nicht aber den Betrag der Geschwindigkeit elektrischer Teilchen ändern.

Wie bereits angekündigt *beschränken wir uns im Folgenden auf rein ortsabhängige Kräfte* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ und untersuchen die extrem wichtige Frage, für welche Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ die Arbeit

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

entlang eines beliebigen Weges C nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges abhängt und nicht vom Verlauf der Kurve dazwischen. Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit dieser Eigenschaft heißen **konservativ**. Von der Vektoranalysis wissen wir:

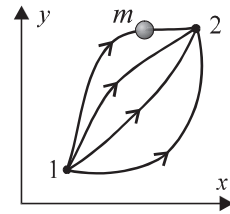


Abb. 1.2-2 Die Arbeit konservativer Kräfte ist für alle Wege gleich groß.

Das Linienintegral $\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ ist genau dann vom Weg unabhängig, d. h. die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist genau dann konservativ, wenn ein skalares Feld $V(\mathbf{r})$ existiert mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\text{grad } V(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (1.2-3)$$

Das skalare Feld $V(\mathbf{r})$ heißt **Potential** oder **potentielle Energie**.⁵ Das Minuszeichen in Gl. (1.2-3) sorgt dafür, dass die potentielle Energie im Gravitationsfeld mit zunehmender Höhe wächst. Bei gegebenem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist $V(\mathbf{r})$ durch Gl. (1.2-3) *bis auf eine additive Konstante c eindeutig bestimmt*. Für konservative Kräfte lautet die Arbeit

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -[V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)] \quad (1.2-4)$$

Es gibt zwei weitere Bedingungen dafür, dass eine Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ ist:

5) In der Mechanik sind die Begriffe „Potential“ und „potentielle Energie“ bei nahezu allen Autoren gleichbedeutend. In der Elektrodynamik hingegen stehen diese beiden Begriffe für verschiedene Größen:

- Die Potentialdifferenz (oder Spannung) wird definiert als Arbeit der konservativen Coulombkraft pro Ladung

$$\varphi_{12} = U_{12} := \frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{mit der Einheit } \frac{\text{Nm}}{\text{C}}$$

Das Potential soll im Unendlichen verschwinden. Dann lautet das Potential im Punkt 1 mit dem Ortsvektor \mathbf{r}

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^1 \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

- Die potentielle Energie einer Ladung q ist das Produkt $q \varphi(\mathbf{r})$ mit der Einheit N m.

1. Eine Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist genau dann konservativ, wenn ihr Linienintegral über *jede* geschlossene Kurve null ergibt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{für jede geschlossene Kurve} \quad (1.2-5)$$

2. Eine Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist genau dann konservativ, wenn ihre Rotation verschwindet:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \text{ ist konservativ} \Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.2-6)$$

Beweis für Aussage 1 Für den geschlossenen Weg in Abb. 1.2-3 gilt:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{1, C_1}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2, -C_2}^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Für alle Wege C_1, C_2 ist das Integral über den geschlossenen Weg $C_1 + (-C_2)$ genau dann null, wenn

$$\int_{1, C_1}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{2, -C_2}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{1, C_2}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \square$$

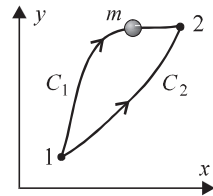


Abb. 1.2-3 Die Arbeit ist auf beiden Wegen gleich \Leftrightarrow Sie verschwindet auf dem geschlossenen Weg $C_1 + (-C_2)$.

Beweis für Aussage 2 Aus $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ folgt:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Vertauschbarkeit der} \\ \text{partiellen Ableitungen}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist umgekehrt $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$, so gilt nach dem Stokesschen Satz für die geschlossene Kurve C , die eine Fläche A umschließt:

$$0 = \iint_A \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \square$$

Die Frage, ob eine Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ ist oder nicht, wird am einfachsten mit der Berechnung der Rotation beantwortet.

Beispiel 1.2-3 Arbeit einer konservativen Kraft

- a) Erkläre den Unterschied zwischen den Kräften $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \mathbf{r}$ und $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$.
- b) Zeige: Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$ ist konservativ.
- c) Berechne das Potential für $f(r) = -ar^2$. Im Koordinatenursprung soll das Potential null sein.

Lösung:

a) Beide Kräfte haben radiale Richtung und heißen **Zentralkräfte**. Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$ ist darüber hinaus noch rotationssymmetrisch, d. h. der Kraftbetrag hängt nicht von der Richtung ab.

b)

$$\begin{aligned} \nabla \times [f(r) \mathbf{r}] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x f(r) \\ y f(r) \\ z f(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial [z f(r)]}{\partial y} - \frac{\partial [y f(r)]}{\partial z} \\ \frac{\partial [x f(r)]}{\partial z} - \frac{\partial [z f(r)]}{\partial x} \\ \frac{\partial [y f(r)]}{\partial x} - \frac{\partial [x f(r)]}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \frac{\partial f(r)}{\partial y} - y \frac{\partial f(r)}{\partial z} \\ x \frac{\partial f(r)}{\partial z} - z \frac{\partial f(r)}{\partial x} \\ y \frac{\partial f(r)}{\partial x} - x \frac{\partial f(r)}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \begin{pmatrix} z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} \\ x \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial x} \\ y \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Bemerkung: Die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}$ hingegen ist nicht konservativ, hat also kein Potential.

c) Das Potential $V(\mathbf{r})$ in einem Punkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} ist in diesem Fall das Linienintegral der Kraft vom Koordinatenursprung zum Punkt P . Da das Linienintegral einer konservativen Kraft wegunabhängig ist, können wir den für die Integration günstigsten Weg wählen. Der günstigste Weg verläuft hier geradlinig, radial nach außen.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{0}) = \int_0^{\mathbf{r}} \nabla V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \int_0^{\mathbf{r}} \alpha r'^2 \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Auf dem Integrationsweg} \\ \text{ist } \mathbf{r}' \text{ parallel zu } d\mathbf{r}'}}{=} \int_0^r \alpha r'^3 dr' = \frac{\alpha}{4} r^4 \end{aligned}$$

Auch zeitabhängige Kräfte können ein Potential haben: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t)$. Dann gilt natürlich $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$. Zeitabhängige Kräfte sind aber nicht konservativ, da ihre Arbeit i. Allg. vom Zeitverlauf des gewählten Weges abhängt und daher für einen geschlossenen Weg ungleich null sein kann – z. B. bei der Bewegung einer Ladung in einem Kondensator mit veränderlicher Spannung.

Federkräfte, Gravitationskräfte und Coulombkräfte sind konservative Kräfte. Reibungskräfte hingegen sind nicht konservativ, da die Reibungsarbeit zwischen zwei Punkten proportional zur Länge des zurückgelegten Weges ist.

1.3 Energieerhaltungssatz

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom $\mathbf{F} = m \dot{\mathbf{v}}$ (für $m = \text{const}$) und nach Gl. (1.2–2) gilt:

$$\begin{aligned} \int_{1,C}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= m \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2(t) \right) dt \\ &= \frac{m}{2} v^2(t_2) - \frac{m}{2} v^2(t_1) = T(t_2) - T(t_1) \end{aligned} \quad (1.3-1)$$

Dabei ist

$$T := \frac{m}{2} v^2 \quad (1.3-2)$$

die **kinetische Energie** des bewegten Teilchens. Die gesamte bei der Bewegung aufgebrauchte Arbeit wird für die Änderung der kinetischen Energie verwendet.

Andererseits gilt für konservative Kräfte

$$\int_{1,C}^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{1,C}^2 \nabla V \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \quad (1.3-3)$$

$$\Rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1.3-4)$$

*Für konservative Kräfte ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant. Dies ist der **Energieerhaltungssatz** für konservative Kräfte. Übrigens ist dieser Erhaltungssatz der Grund für den Namen ‚konservativ‘.*

1.4 Beschleunigte Bezugssysteme

Bisher haben wir die Newtonsche Mechanik nur in unbeschleunigten Bezugssystemen betrachtet. Manchmal ist es aber zweckmäßig, beschleunigte Koordinatensysteme zu verwenden – z. B. in rotierenden Systemen.

In Abschn. 1.1 wurden zwei Inertialsysteme S und S' betrachtet, die sich mit *konstanter* Relativgeschwindigkeit \mathbf{u} gegeneinander bewegen. Die Ortsvektoren $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{r}'(t)$, die eine Punktmasse in beiden Inertialsystemen hat, sind durch eine sog. **Galileitransformation**

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} t + \mathbf{r}'(t) \quad (1.4-1)$$

miteinander verknüpft. Wegen der Gl. $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}'(t)$ sind die Beschleunigungen in beiden Inertialsystemen gleich. Da auch die Kräfte und die Massen nicht vom verwendeten Inertialsystem abhängen, ist *das zweite Newtonsche Axiom $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ invariant unter Galileitransformationen.*

Wir gehen nun einen Schritt weiter und betrachten neben einem Inertialsystem S ein *beschleunigtes* Bezugssystem S' . Die beiden Koordinatensysteme haben die Ursprünge 0 und $0'$. Die Basisvektoren des beschleunigten Systems S' und die in S' gemessenen Ortsvektoren, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden mit einem Strich ' gekennzeichnet.

Die Bewegungen beschleunigter Bezugssysteme S' sind zusammengesetzt aus

1. *Translationen.* Sie werden durch Bewegung des Koordinatenursprungs $0'$ beschrieben. Rotationen treten dabei nicht auf.
2. *Rotationen.* Das System S' rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um seinen bewegten Koordinatenursprung $0'$.

Die Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sind im Inertialsystem verankert und daher konstant. Die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1(t), \mathbf{e}'_2(t), \mathbf{e}'_3(t)$ hingegen sind fest mit dem beschleunigten Bezugssystem verbunden und rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um den Koordinatenursprung $0'$. *Die Zeitabhängigkeit der gestrichelten Basisvektoren ist für das spätere Auftreten von Scheinkräften verantwortlich.* Nach Aufgabe 1–2 betragen ihre Geschwindigkeiten

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i(t) \quad (1.4-2)$$

Für den Ortsvektor eines Massenpunktes gilt laut Abb. 1.4–1:⁶

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_{00'}(t) + \mathbf{r}'(t)$$

Dabei ist $\mathbf{R}_{00'}(t)$ der Ortsvektor des bewegten Koordinatenursprungs $0'$ im Inertialsystem S . In Koordinatendarstellung lautet diese Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_{00'}(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \quad (1.4-3)$$

6) Für $\mathbf{R}_{00'} = \mathbf{0}$ sind die Ortsvektoren im Inertialsystem und im rotierenden Bezugssystem gleich groß, obwohl sie verschiedene Koordinaten $x_i(t)$ und $x'_i(t)$ haben:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad \text{d. h.} \quad \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i \quad \text{für } \mathbf{R}_{00'} = \mathbf{0}$$

Geschwindigkeiten sind aber in zueinander bewegten Bezugssystemen und Beschleunigungen in zueinander beschleunigten Bezugssystemen verschieden groß. Für einen Reisenden, der aus dem Fenster eines fahrenden Zuges schaut, hat ein Baum eine Geschwindigkeit, für einen auf der Erde stehenden Beobachter aber nicht.

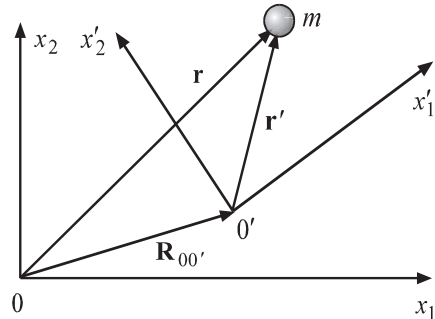


Abb. 1.4–1 Das Bezugssystem S ist inertial, das System S' ist beschleunigt. $\mathbf{R}_{00'}(t)$ ist der zeitabhängige Verbindungsvektor der beiden Koordinatenursprünge.

Mit Gl. (1.4–2) kann die Zeitableitung der Gl. (1.4–3) leicht berechnet werden:

$$\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{R}}_{00'}(t) + \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \quad (1.4-4)$$

Die vier Terme haben folgende Bedeutung:

- $\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{v}$ ist die *im Inertialsystem* gemessene Geschwindigkeit.
- $\dot{\mathbf{R}}_{00'}(t)$ ist die Relativgeschwindigkeit der beiden Koordinatenursprünge.
- $\sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i = \mathbf{v}'$ ist die *im beschleunigten System S'* gemessene Geschwindigkeit. Für einen Beobachter im rotierenden System sind die Basisvektoren \mathbf{e}'_i konstant.
- $\boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ ist die im Inertialsystem gemessene Geschwindigkeit eines Punktes, der *starr mit dem beschleunigten System S'* verbunden ist.

In vektorieller Form lautet Gl. (1.4–4)

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}_{00'}(t) + \mathbf{v}'(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'(t) \quad (1.4-4')$$

Die Zeitableitung der Gl. (1.4–4) führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \mathbf{e}_i = \ddot{\mathbf{R}}_{00'}(t) + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \right] + 2 \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \\ &+ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \end{aligned} \quad (1.4-5)$$

In vektorieller Form lautet diese Gl.

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}}_{00'} + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \quad (1.4-6)$$

Wir setzen die – im Inertialsystem gemessene – Beschleunigung \mathbf{a} in die inertielle Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ ein und erhalten die

Bewegungsgleichung in beschleunigten Bezugssystemen:

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{R}}_{00'} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \quad (1.4-7)$$

Dabei sind

$$\mathbf{a}' = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i(t)$$

die im rotierenden Bezugssystem gemessenen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten.

Diese Differentialgleichung enthält neben der Kraft \mathbf{F} , die durch die Umgebung verursacht wird, vier sog. **Trägheitskräfte**, die nicht von anderen Körpern verursacht werden und daher auch nicht das dritte Newtonsche Axiom „actio = reactio“ erfüllen. Da Trägheitskräfte auf die Zeitableitung der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i(t)$ und damit auf die Beschleunigung des Bezugssystems zurückzuführen sind und durch eine Transformation auf ein Inertialsystem beseitigt werden können, heißen sie auch **Scheinkräfte**. *Durch die Einführung der vier Scheinkräfte in Gl. (1.4–7) wird das zweite Newtonsche Axiom beibehalten.* Die Bewegungsgleichung in beschleunigten Bezugssystemen sieht wie das zweite Newtonsche Axiom aus, wenn die Scheinkräfte berücksichtigt werden.

Wir zählen die vier Scheinkräfte kurz auf:

- $-m \ddot{\mathbf{R}}_{0'0'}$ geht auf die Beschleunigung des Koordinatenursprungs $0'$ zurück. Beim Beschleunigen oder Bremsen eines Autos ist diese Kraft für die Fahrzeuginsassen deutlich spürbar. Sie ist entgegengesetzt zur Beschleunigung $\ddot{\mathbf{R}}_{0'0'}$ des Autos.
- $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ ist die **Zentrifugalkraft** oder **Fliehkraft**. Diese Kraft ist bei der Kurvenfahrt von Fahrzeugen fühlbar. Zerlegt man den Ortsvektor $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ in eine Komponente parallel und in eine Komponente senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, erhält man

$$-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp}) = m \omega^2 \mathbf{r}'_{\perp} \quad (1.4-8)$$

Die Zentrifugalkraft steht senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und weist radial nach außen. Sie ist uns allen aus dem Alltag bekannt.

- $-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ist die geschwindigkeitsabhängige **Corioliskraft**. Sie steht senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und senkrecht auf der Geschwindigkeit \mathbf{v}' , die im beschleunigten Bezugssystem S' gemessen wird. Das gilt auch für Geschwindigkeiten \mathbf{v}' in radiale und in azimutale Richtungen. Die Corioliskraft spürt z. B. ein Kind, das auf einer im Uhrzeigersinn rotierenden Scheibe (Drehteller) nach außen läuft. (Auf manchen Spielplätzen gibt es solche begehbaren, rotierenden Scheiben.) Wenn sich das Kind von der Drehachse entfernt, dann wird die nach rechts gerichtete Umlaufgeschwindigkeit der Scheibe ωr unter den Füßen immer größer, so dass das Kind die Kraft $-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ nach links verspürt und nach links umzukippen droht. Ähnlich werden die Corioliskräfte auf die Passatwinde (siehe Abb. 1.5–3) im Erdkundeunterricht anschaulich erklärt.
- $-m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ ist nur bei nichtgleichförmiger Rotation ungleich null. Diese Kraft hat keinen Namen und zeigt in die azimutale Richtung. Wenn das Kind auf dem Drehteller steht und die Winkelgeschwindigkeit ω des Drehtellers erhöht (erniedrigt) wird, dann zeigt diese Kraft in die (entgegengesetzt zur) Richtung der (im Inertialsystem beobachteten) Geschwindigkeit \mathbf{v}' des Kindes. Auch das ist ohne Rechnung verständlich.

Nur Beobachter, die sich in beschleunigten Bezugssystemen befinden oder sich gedanklich in beschleunigte Bezugssysteme hineinversetzen, dürfen mit Scheinkräften argumentieren.

Beispiel 1.4–1 Einfache Beschleunigungen in rotierenden Systemen

Wir betrachten ein Koordinatensystem S' , das mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotiert. Der Koordinatenursprung $0'$ ruht und fällt mit 0 zusammen, so dass $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$.

Beispiel 1.4–3 Horizontale Ablenkung eines frei fallenden Körpers

Berechne näherungsweise die durch die Erdrotation verursachte horizontale Ablenkung eines reibungsfrei fallenden Teilchens von der Vertikalen.

Hinweis: 1) Die Winkelgeschwindigkeit der Erde werde als klein angenommen.

2) Verwende das rotierende Koordinatensystem aus Abb. 1.4–3 und zerlege die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde in zwei Anteile

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{e}'_1 \cos \varphi + \omega \mathbf{e}'_3 \sin \varphi \quad (1.4-12)$$

Dabei ist φ die geographische Breite.

Lösung:

Bei Vernachlässigung der Terme proportional zu ω^2 erhalten wir nach Gl. (1.4–7)

$$\dot{x}' = 2\omega \dot{y}' \sin \varphi \quad (1.4-13a)$$

$$\dot{y}' = -2\omega (\dot{x}' \sin \varphi + \dot{z}' \cos \varphi) \quad (1.4-13b)$$

$$\dot{z}' = -g + 2\omega \dot{y}' \cos \varphi \quad (1.4-13c)$$

Einmalige Integration der Gln. (1.4–13a) und (1.4–13b) liefert für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0 \quad z(0) = h$$

die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}' = 2\omega \dot{y}' \sin \varphi \quad (1.4-14a)$$

$$\dot{y}' = -2\omega (\dot{x}' \sin \varphi + \dot{z}' \cos \varphi) + 2\omega h \cos \varphi \quad (1.4-14b)$$

$$\text{und } \dot{z}' = -g - 4\omega^2 \cos \varphi [x' \sin \varphi + (z' - h) \cos \varphi] \quad (1.4-14c)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde ist sehr klein. Daher kann der zweite Term in Gl. (1.4–14c) vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\dot{z}' = -g t \quad (1.4-15)$$

Einsetzen der Gln. (1.4–14a) und (1.4–15) in Gl. (1.4–13b) führt auf

$$\ddot{y}' = -4\omega^2 y' \sin^2 \varphi + 2\omega g t \cos \varphi$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist proportional zu ω^2 und wird ebenfalls vernachlässigt.

$$y'(t) = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi$$

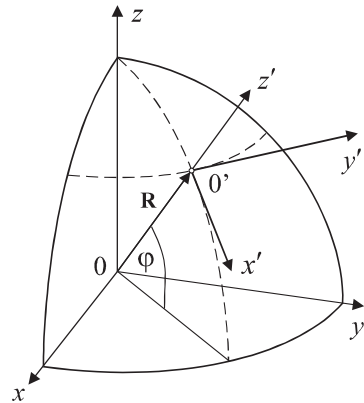


Abb. 1.4–3 Das bewegte Koordinatensystem (x', y', z') ist fest mit der Erde verbunden; die x' -Achse zeigt nach Süden, die y' -Achse nach Osten und die z' -Achse vertikal nach oben.

Die östliche Abweichung y vom vertikalen Fall kann auch als Funktion der Fallhöhe h bestimmt werden. Mit der Fallzeit $t = \sqrt{2h/g}$ folgt sofort

$$y'(h) = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2h)^3}{g}} \cos \varphi \quad (1.4-16)$$

Die Abweichung ist am Äquator am größten. Sie beträgt dort für eine Fallhöhe von 100 m etwa 2,19 cm.

1.5 Corioliskräfte der Erdrotation*

Infolge der Erdrotation können wir Erdbewohner Zentrifugal- und Corioliskräfte messen. Auf Körper, die auf der Erde *ruhen*, wirkt lediglich die Zentrifugalkraft

$$\mathbf{F}_{\text{Zen}} = -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}') \stackrel{\text{Gl. (1.4-8)}}{=} m \omega^2 \mathbf{R}'_{\perp}$$

mit

\mathbf{R}' = Vektor vom Erdmittelpunkt zum ruhenden Körper auf der Erdoberfläche und

\mathbf{R}'_{\perp} = Vektor von der Erdachse zum ruhenden Körper – senkrecht auf der Erdachse.

Die Schwerebeschleunigung \mathbf{g}_0 , die nur durch die Gravitation verursacht wird, ergibt zusammen mit der Zentrifugalbeschleunigung die effektive Schwerebeschleunigung oder sog. „Erdbeschleunigung“

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \omega^2 \mathbf{R}'_{\perp}$$

Auf dem Äquator führt die Zentrifugalkraft zu einer Herabsetzung der Erdbeschleunigung um $0,034 \text{ m/s}^2$. Die Richtung von \mathbf{g} , die man die Vertikale nennt und die durch das Lot leicht zu bestimmen ist, weicht infolge der Zentrifugalkraft etwas von der Richtung der Schwerebeschleunigung \mathbf{g}_0 ab.

Massen, die sich auf der Erde *bewegen*, sind zusätzlich noch der Corioliskraft \mathbf{F}_C ausgesetzt. Abb. 1.5–1 zeigt die Corioliskraft auf zwei Körper, die sich entlang eines Meridians von Süden nach Norden bewegen. *Die durch die Erdrotation hervorgerufenen Corioliskräfte liegen in der Äquatorebene und versuchen, ein Teilchen, das sich auf der nördlichen Erdhalbkugel in einer horizontalen Ebene bewegen muss, nach rechts abzulenken.* Auf der südlichen Halbkugel zeigt die Corioliskraft nach links.

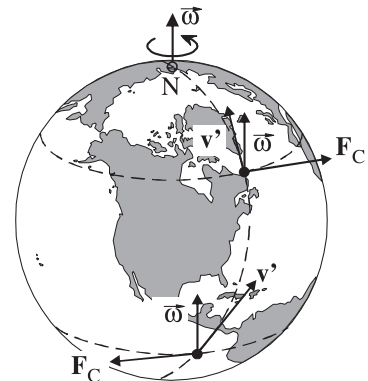


Abb. 1.5–1 Corioliskräfte \mathbf{F}_C auf zwei Körper, die sich auf einem Meridian von Süden nach Norden bewegen.

Laborsysteme, die fest mit der Erde verbunden sind, können wegen der relativ langsamen Drehung der Erde in guter Näherung als Inertialsysteme angesehen werden, wenn nur kurzzeitige

und kleinräumige Ereignisse beobachtet werden. Bei Vorgängen hingegen, die über lange Zeiten oder große Entfernungen ablaufen, ist die Rotation der Erde oft zu berücksichtigen; hier spielen vor allem die Corioliskräfte eine große Rolle.

Wir besprechen im Folgenden die sehr bedeutsamen Auswirkungen der durch die Erdrotation verursachten Corioliskräfte auf das Wetter:

1) Die **außertropischen Zyklone** und **Antizyklone** sind die bekannten Tiefs und Hochs der Wetterkarten. Sie bilden riesige atmosphärische Wirbel in den außertropischen Breiten mit Durchmessern der Größenordnung 1000 km. Oft herrscht in ihnen Windstärke 9 (Sturm), manchmal sogar Windstärke 12 (Orkan) mit Geschwindigkeiten von über 130 km/h. Zyklone entstehen durch das Einströmen atmosphärischer Luft in Tiefdruckgebiete mit annähernd konzentrischen Isobaren; Antizyklone bilden sich durch das Abströmen großer Luftmassen aus Hochdruckgebieten. Wegen der Corioliskraft wird die bewegte Luft auf der nördlichen (südlichen) Halbkugel nach rechts (links) abgelenkt, so dass Wirbel entstehen.

Bemerkung: Die Zyklone erinnern an die Strudel, die das auslaufende Wasser am Abfluss einer Badewanne oder eines Waschbeckens erzeugt. Die Strudeldrehung wird aber i. Allg. *nicht* (!) durch die Corioliskraft verursacht, sondern vielmehr durch das Herausziehen des Stöpsels, die Form der Wanne und des Abflusses und vor allem durch Wirbel, die noch vom Einlaufen des Wassers übrig geblieben sind und wegen der Drehimpulserhaltung in immer schnellere Rotation geraten, wenn das Wasser beim Leerlaufen der Wanne zum Abfluss fließt. Man kann die Dominanz dieser Effekte über die Corioliskraft leicht daran erkennen, dass sich die Wirbel in vielen Becken eher im positiven Uhrzeigersinn, d. h. falsch herum, als im negativen drehen. Um den äußerst schwachen Corioliseffekt eindeutig sichtbar zu machen – eine Aufgabe, die selbst unter Laborbedingungen schwierig ist –, braucht man große und symmetrische Gefäße. Zudem muss sich das Wasser nach dem Einlaufen völlig beruhigen (siehe den Artikel von A. Shapiro, Nature 196, 1080 (1962)).

2) Vergleichbar in ihrer Struktur sind die **tropischen Wirbelstürme**, die je nach Entstehungsort verschiedene Namen tragen: Sie werden „Hurrikans“ genannt, wenn sie sich über dem Atlantik bilden; im westlichen Nordpazifik heißen sie „Taifune“, in Madagaskar „Trovadoes“, im nördlichen indischen Ozean einfach „Zyklone“. Die tropischen Wirbelstürme haben i. Allg. Durchmesser bis zu wenigen hundert Kilometer –, aber ungeheure Zerstörungskräfte, da Windgeschwindigkeiten bis über 300 km/h auftreten können. (Der Winddruck (Staudruck) ist nach der Bernoulli-Gleichung proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.)

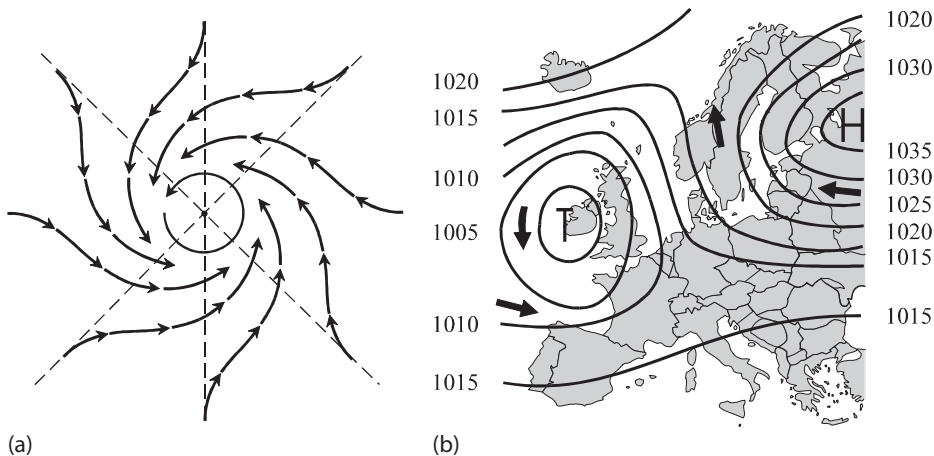


Abb. 1.5–2 (a) Idealisierter außertropischer Zyklon auf der Nordhalbkugel. (b) Wetterkarte für Europa mit einem Hoch und einem Tief und mit Isobaren.

Die tropischen Wirbelstürme entwickeln sich nur über dem Meer und bei Wassertemperaturen von mindestens 27°C . Unter der heißen Sonne verdunsten riesige Mengen Wasser. Die stark erhitze und mit Wasserdampf gesättigte Luft steigt auf und zieht von den Flanken kühlere Luft nach, die sich auf dem Weg ins Zentrum ebenfalls erhitze und mit Wasserdampf sättigt. So entsteht ein gigantisches Transportsystem, das sehr warme und mit Wasserdampf gesättigte Luft nach oben fördert. Beim Aufstieg kühlt sich die Luft ab, so dass ein Teil des Wassers nicht mehr im gasförmigen Zustand verbleiben kann und Wassertröpfchen kondensieren. Beim Kondensieren wird dieselbe Energie, die vorher zur Verdunstung benötigt wurde, wieder freigesetzt. Die Luft wird dadurch erneut aufgeheizt und der weitere Aufstieg gefördert. In den oberen Wolken-schichten nimmt die Kondensation dermaßen zu, dass es in Strömen regnet, ja oft sogar wie aus Eimern gießt. Auf der Insel Reunion fielen 1966 in 24 Stunden $1,82\text{ m}$ Niederschlag und 1980 in einer Woche $5,00\text{ m}$.

Auch bei den tropischen Wirbelstürmen werden die Wirbel durch die Erdrotation gebildet: Die Luftmassen, die mit großer Geschwindigkeit von außen in das zentrale Tiefdruckgebiet, in dem ein sehr geringer Luftdruck – mitunter 900 mbar und noch weniger – herrscht, einströmen, werden von der Corioliskraft abgelenkt. Auf der nördlichen (südlichen) Halbkugel drehen sich die Wirbel im negativen (positiven) Uhrzeigersinn. Die fließende Luft windet sich auf einer Spirale in das Innere des Zyklons.

Die meisten Wirbelstürme entstehen zwischen dem zehnten und zwanzigsten Breitengrad. In den nördlicheren und südlicheren Regionen liegt die Wassertemperatur des Meeres größtenteils unter 27°C , und in der Nähe des Äquators können keine Wirbel erzeugt werden, da die Corioliskraft dem Vektorprodukt aus Luftgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit der Erde proportional ist.

Über dem Land verlieren die Wirbelstürme schnell ihre Wucht und Zerstörungskraft, weil die aufsteigenden Luftmassen nicht genügend Wasserdampf enthalten, so dass in den höheren Luftschichten zu wenig Kondensationswärme freigesetzt wird; der Energieumsatz ist zu gering.

Die **Tornados** sind geheimnisvoller und weniger erforscht. Sie werden oft von Gewittern begleitet und sind leicht an einem gigantischen Rüssel zu erkennen, der aus dunkler Bewölkung herabreicht und schwarz ist, weil Dreck, Staub und Wasser hoch gewirbelt werden. Ihr Durchmesser ist selten größer als 500 m . Die Windgeschwindigkeiten können bis zu 500 km/h betragen. Laut Bernoulli-Gleichung $p + \rho v^2/2 + \rho g h = \text{const}$ führen diese hohen Geschwindigkeiten v zu hohen Staudrücken $\rho_{\text{Luft}} v^2/2$ und zu geringen statischen Drücken p . Beim Vorbeiziehen eines Tornados kann der Druck p im Inneren eines Gebäudes, wo die Luft ruht, daher deutlich größer sein als außerhalb; infolgedessen können Fenster explodieren oder gar Dächer abheben. Selbst Lastwagen und Lokomotiven können hoch gewirbelt werden.

3) Die starke Sonneneinstrahlung am Äquator verursacht ein unaufhörliches Aufsteigen der erhitzten Luft, so dass die äquatoriale Zone in den tieferen Luftschichten bis etwa 4 km Höhe ein beständiges Tiefdruckgebiet darstellt, in das von Norden und Süden kältere Luft aus den Subtropen einströmt. Die durchschnittlich starken und gleichmäßig wehenden **Passatwinde** werden auf der Nordhalbkugel nach rechts (Nordostpassat), auf der Südhalbkugel nach links (Südostpassat) abgelenkt. Die Antipassate, die ab 4 km Höhe wehen und die Luftmassen in die Subtropen zurückführen, werden ebenfalls abgelenkt.

4) Auch die Meeresströmungen werden durch die Corioliskräfte stark beeinflusst.

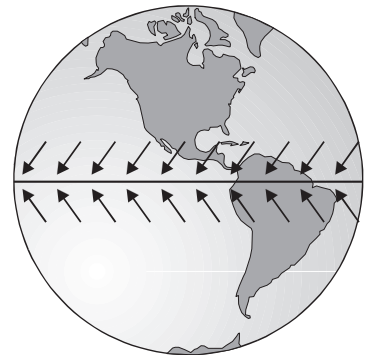


Abb. 1.5–3 Die zum Äquator wehenden Passatwinde werden durch die Corioliskraft der Erdrotation abgelenkt.

5) Gelegentlich ist zu lesen, dass auf den Eisenbahnstrecken, die nur in einer Richtung befahren werden, die rechte Schiene stärker als die linke abgenutzt wird, da sie wegen der horizontalen Komponente der Corioliskraft einem größeren Druck ausgesetzt ist. Auch soll die rechte Schiene schlecht befestigter Gleise seitlich wandern.

Eine Bestätigung dieser Aussage dürfte in der Praxis kaum möglich sein, da die Corioliskräfte verhältnismäßig klein sind und bereits von Windkräften übertroffen werden können. So wirkt z. B. auf eine 100 t schwere Lokomotive, die auf dem 45. Breitengrad mit 180 km/h in nördliche Richtung fährt, eine nach Osten gerichtete Corioliskraft von nur 516 N. Die Lokomotive erfährt eine gleich große Zentrifugalkraft, wenn sie mit der angegebenen Geschwindigkeit eine leichte Linkskurve mit dem riesigen Radius $r = 485$ km fährt. Bei der Bundesbahn wurden weder an den Gleisen noch an den Rädern der Lokomotiven und Wagen einseitig verstärkte Abnutzungen, die auf die Corioliskraft zurückzuführen sind, beobachtet.

1.6 Zusammenfassung

1) Die drei Newtonschen Axiome lauten:

- **1. Axiom:** Es gibt Bezugssysteme, in denen sich *alle* Körper, die keine Umgebung haben, gleichförmig und geradlinig bewegen oder ruhen. Diese Bezugssysteme heißen „Inertialsysteme“. Die Inertialsysteme sind fest mit dem Fixsternhimmel verbunden oder bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber dem Fixsternhimmel – ohne Rotation.
- **2. Axiom:** Es gilt nur in Inertialsystemen und beschreibt den Einfluss der Umgebung:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) \quad \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{nur für } m = \text{const}}}{m} \quad m \mathbf{a} \quad (1.1-2)$$

- **3. Axiom:** Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft \mathbf{F}_{21} aus, so übt der Körper 2 auf den Körper 1 die entgegengesetzt gleich große Kraft \mathbf{F}_{12} aus:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (1.1-3)$$

2) Die Arbeit ist das Linien- oder Kurvenintegral der Kraft längs einer Kurve. Linienintegrale werden meistens durch die Parametrisierung der Raumkurve C berechnet, wobei als Parameter oft die Zeit t verwendet wird. Mit $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t) dt$ gilt:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \cdot \mathbf{v}(t) dt \quad (1.2-2)$$

3) Eine Kraft heißt konservativ, wenn sie nur vom Ort abhängt und wenn die Arbeit

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges C abhängt. Es gibt drei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konservativ ist:

- Es gibt ein skalares Feld $V(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\text{grad } V(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (1.2-3)$$

Das skalare Feld $V(\mathbf{r})$ heißt **Potential** oder **potentielle Energie**.

- Das Linienintegral der Kraft über *jede* geschlossene Kurve ist null: $\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$
- Die Rotation der Kraft verschwindet:

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.2-6}$$

4) Für konservative Kräfte lautet die Arbeit

$$\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \nabla V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - [V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)] \tag{1.2-4}$$

Für konservative Kräfte ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant.

5) Die Bewegungen beschleunigter Bezugssysteme S' sind zusammengesetzt aus Translationen und Rotationen. Die Zeitableitungen der rotierenden Basisvektoren $\mathbf{e}'_i(t)$ sind für das Auftreten der Scheinkräfte verantwortlich und lauten

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i(t) \tag{1.4-2}$$

Für den Ortsvektor eines Massenpunktes gilt laut Abb. 1.4-1:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_{00'}(t) + \mathbf{r}'(t)$$

In Koordinaten lautet diese Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_{00'}(t) + \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \tag{1.4-3}$$

Die zweimalige Zeitableitung dieser Gleichung führt mit Gl. (1.4-2) auf die *Bewegungsgleichung in beschleunigten Bezugssystemen*:

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} - m \ddot{\mathbf{R}}_{00'} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \tag{1.4-7}$$

Diese Differentialgleichung enthält neben der Kraft \mathbf{F} vier sog. **Trägheitskräfte** oder **Scheinkräfte**, die nicht von anderen Körpern verursacht werden. Die Bewegungsgleichung in beschleunigten Bezugssystemen sieht wie das zweite Newtonsche Axiom aus, wenn die Scheinkräfte berücksichtigt werden. Sie sind im Einzelnen:

- $-m \ddot{\mathbf{R}}_{00'}$ geht auf die Beschleunigung des Koordinatenursprungs $0'$ zurück.
- $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ ist die Zentrifugalkraft oder Fliehkraft. Diese Kraft ist bei der Kurvenfahrt von Fahrzeugen fühlbar. Zerlegt man den Ortsvektor $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ in eine Komponente parallel und in eine Komponente senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, erhält man

$$-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp}) = m \omega^2 \mathbf{r}'_{\perp} \tag{1.4-8}$$

- $-2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ ist die Corioliskraft. Sie steht senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}$ und senkrecht \mathbf{v}' .
- $-m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ ist nur bei nichtgleichförmiger Rotation ungleich null.

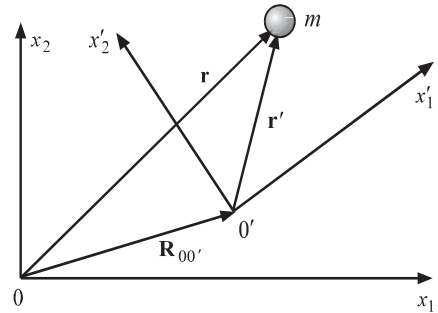


Abb. 1.4-1 Das Bezugssystem S ist inertial, das System S' ist beschleunigt.

1.7 Aufgaben

1-1 Leicht Gradient, Divergenz und Rotation

a) Der Gradient eines skalaren Feldes $f(r)$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \text{grad } f(\mathbf{r}) := (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z) \quad (1.7-1)$$

Zeige:

$$\nabla r = \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.7-2)$$

b) Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ist laut Definition ein skalares Feld:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{f}(\mathbf{r}) := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad \text{mit } f_i = i\text{-te Komponente von } \mathbf{f} \quad (1.7-3)$$

Zeige:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3. \quad (1.7-4)$$

c) Die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ist laut Definition ein Vektorfeld:

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{r}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{r}) \\ f_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3(\mathbf{r})}{\partial y} - \frac{\partial f_2(\mathbf{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{r})}{\partial z} - \frac{\partial f_3(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial f_1(\mathbf{r})}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.7-5)$$

Zeige:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.7-6)$$

1-2 Mittel Geschwindigkeit rotierender Basisvektoren

Das beschleunigte Bezugssystem S' mit den Basisvektoren $\mathbf{e}'_i(t)$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um seinen Ursprung. Beweise:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i(t) \quad (1.4-2)$$

1-3 Mittel Iterative Berechnung einer Geschosßbahn

Ein Geschosß wird auf der geographischen Breite φ unter dem Winkel α gegen die Horizontale in südliche Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgefeuert. Löse die Bewegungsgleichung iterativ unter Beachtung der Corioliskraft der Erdrotation.

Hinweis: 1) Verwende das Koordinatensystem aus Abb. 1.4-3 und die Gln. (1.4-13a/b/c), in denen alle Terme mit ω^2 – also die Zentrifugalkraft – vernachlässigt werden.

2) Im ersten Iterationsschritt vernachlässigen wir die Terme proportional zu ω .

3) Die geographische Breite (auch Breitengrad genannt) ist die in Grad angegebene Entfernung eines Punktes auf der Erdoberfläche vom Äquator. Daher verlaufen Breitengrade parallel zum Äquator, der die geographische Breite 0° hat.

1-4 Mittel Potential der Gravitationskraft

Die Gravitationskraft eines Massenpunktes m_1 im Koordinatenursprung auf einen zweiten Massenpunkt mit Ortsvektor \mathbf{r} beträgt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1.7-7}$$

- a) Zeige, dass die Kraft konservativ ist.
- b) Berechne das Potential der Gravitationskraft. Das Potential soll im Unendlichen verschwinden.

1-5 Mittel Energiegewinn einer Perle

In Beispiel 1.4-2 wird eine Perle durch einen Draht beschleunigt, der in der x, y -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um den Koordinatenursprung rotiert.

- a) Löse die Bewegungsgl. (1.4-10) $\ddot{x}' = \omega^2 x'$ für die Anfangsbedingungen $x'(0) =: x'_0 > 0$ und $\dot{x}'(0) = 0$.
- b) Berechne die Arbeit, die der Draht im Zeitintervall $[0, t]$ an der Perle verrichtet.
- c) Wie groß ist die kinetische Energie $E(t)$ der Perle zur Zeit t ?

1-6 Mittel Schwingender Fahrstuhl

Ein Mann mit Masse m_M betritt einen Fahrstuhl mit Masse m_F . Nachdem die leichten Fahrstuhlschwingungen, die durch die neue Belastung verursacht wurden, verschwunden sind, geht der Mann in die Hocke, richtet sich wieder auf, geht erneut in die Hocke usw. Wir nehmen an, dass der Schwerpunkt des Mannes bei dieser sportlichen Übung die harmonische Schwingung $x'_M = A \cos(\Omega t)$ macht – relativ zum Fahrstuhlkorb. Stelle mit dem zweiten Newtonschen Axiom die Bewegungsgleichung auf, die die dadurch ausgelöste Schwingung $x_F(t)$ des Fahrstuhls beschreibt – bezogen auf ein Inertialsystem.

Hinweis: Der Fahrstuhlkorb soll ein gedämpfter harmonischer Oszillator mit Federkonstante D und Dämpferkonstante c sein.

1-7 Mittel Käfer auf rotierender Scheibe

Eine ebene Scheibe rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenurzeigersinn um die vertikale z -Achse. Das körperfeste Koordinatensystem x', y', z' ist fest mit der rotierenden Scheibe verbunden. Ein Käfer läuft mit konstanter Geschwindigkeit v' auf der x' -Achse nach außen.

- a) Berechne die Haftreibungskraft F_H , die die Scheibe auf die Beine des Käfers ausübt.
- b) In welcher Entfernung x' von der Drehachse rutscht der Käfer weg? In welche Richtung beginnt der Käfer zu rutschen?

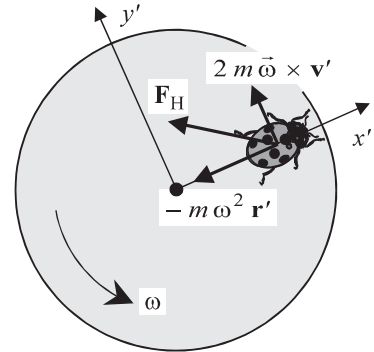


Abb. 1.7-1 F_H ist die Haftreibungskraft der Scheibe auf den Käfer.

1-8 Mittel Künstliches Schwerfeld

In einer zylinderförmigen Raumstation wird durch Rotation um die Zylinderachse ein künstliches Schwerfeld erzeugt.

Für den Radius $r = 30$ m und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0,57 \text{ s}^{-1}$ erfährt ein ruhender Astronaut ($\mathbf{v}' = \mathbf{0}$) aufgrund der Zentripetalbeschleunigung annähernd die gewohnte Erdbeschleunigung. Rennt der Astronaut aber mit $v' = 6 \text{ m/s}$ den äußeren Ringkorridor entlang, dessen Radius $r = 30$ m beträgt, dann tritt die Corioliskraft als weitere Trägheitskraft auf.

- a) Berechne im Inertialsystem die vom Boden auf den Läufer übertragene Kraft F_B , wenn er *mit* und wenn er *gegen* die Rotation der Raumstation läuft.
- b) Berechne die Kraft F_B im Bezugssystem, das fest mit der rotierenden Raumstation verbunden ist.

Lösungen

Lösungen 1: Einteilchensysteme

1-1 Gradient, Divergenz und Rotation

a)

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r$$

b)

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

c)

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

1-2 Geschwindigkeit rotierender Basisvektoren

Wir nehmen an, dass das Bezugssystem S' um die z -Achse rotiert: $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Dann lautet z. B. der rotierende Einheitsvektor

$$\mathbf{e}'_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}'_1(t) = \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_1(t)$$

1-3 Iterative Berechnung einer Geschosßbahn

Für das in Abb. 1.4–3 dargestellte Koordinatensystem und für die Anfangsbedingungen

$$\dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = \dot{z}'(0) = 0$$

$$\dot{x}'(0) = v_0 \cos \alpha \quad \dot{y}'(0) = 0 \quad \dot{z}'(0) = v_0 \sin \alpha$$

ergibt die zweimalige Integration der Bewegungsgleichungen (1.4–13a, b und c) in Beispiel 1.4–3

$$x'(t) = 2 \omega \sin \varphi \int_0^t y'(\hat{t}) d\hat{t} + v_0 t \cos \alpha \tag{1a}$$

$$y'(t) = -2 \omega \sin \varphi \int_0^t x'(\hat{t}) d\hat{t} - 2 \omega \cos \varphi \int_0^t z'(\hat{t}) d\hat{t} \tag{1b}$$

$$z'(t) = 2 \omega \cos \varphi \int_0^t y'(\hat{t}) d\hat{t} - \frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha \tag{1c}$$

Im ersten Iterationsschritt vernachlässigen wir die Terme proportional zu ω und erhalten

$$x'(t) = v_0 t \cos \alpha \quad y'(t) = 0 \quad z'(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha$$

Im zweiten Iterationsschritt werden diese Gln. in die Integrale der Gln. (1a, b und c) eingesetzt:

$$\begin{aligned} x'(t) &= v_0 t \cos \alpha \\ y'(t) &= -\omega v_0 t^2 \sin(\varphi + \alpha) + \frac{\omega}{3} g t^3 \cos \varphi \\ z'(t) &= -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist richtig bis zur Ordnung ω^1 . Die nächste Iteration liefert die Beiträge, die proportional zu ω^2 sind. Diese Näherung ist aber nicht mehr sinnvoll, da in den Ausgangsgleichungen (1a/b/c) alle Terme mit ω^2 vernachlässigt wurden.

1–4 Potential der Gravitationskraft

a) Die Gravitationskraft ist nach Beispiel 1.2–3b konservativ.

b) Das Potential $V(\mathbf{r})$ in einem Punkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} ist in diesem Fall das Linienintegral der Kraft vom Unendlichen zum Punkt P. Da das Linienintegral einer konservativen Kraft wegunabhängig ist, können wir den für die Integration günstigsten Weg wählen. Der günstigste Weg verläuft hier geradlinig, *radial* von unendlich zum Punkt P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} . Es gilt:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= V(\mathbf{r}) - V(\infty) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \nabla V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot d\mathbf{r}' \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Auf dem Integrationsweg} \\ \text{ist } \mathbf{r}' \text{ parallel zu } d\mathbf{r}'}}{=} \int_{\infty}^r \gamma \frac{m_1 m_2}{r'^2} dr' = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} = V(r) \end{aligned}$$

1–5 Energiegewinn einer Perle

a) Der Ansatz $x'(t) = c_1 \cosh(\lambda t) + c_2 \sinh(\lambda t)$ führt auf

$$\ddot{x}'(t) = \lambda^2 x'(t)$$

Daher ist der Ansatz richtig für $\lambda = \omega$. Die Anfangsbedingungen führen auf

$$x'(t) = x'_0 \cosh(\omega t) \tag{1}$$

b) Die vom Draht verrichtete Arbeit beträgt nach Gl. (1.4–11)

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^t \mathbf{F}_D(\dot{x}') \cdot \mathbf{v}(\hat{t}) \, d\hat{t} \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Gl. (1.4–11)}}}{=} 2m\omega \int_0^t \dot{x}'(\hat{t}) \mathbf{e}'_2(\hat{t}) \cdot \mathbf{v}(\hat{t}) \, d\hat{t} \\
 &= 2m\omega \int_0^t \dot{x}' \mathbf{e}'_2 \cdot \underbrace{[\dot{x}' \mathbf{e}'_1 + \omega x' \mathbf{e}'_2]}_{\substack{\text{Geschwindigkeit der Perle} \\ \text{im Inertialsystem}}} \, d\hat{t} = 2m\omega \int_0^t \dot{x}' \omega x' \, d\hat{t} \\
 &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Gl. (1)}}}{=} 2m\omega^3 x_0'^2 \int_0^t \sinh(\omega \hat{t}) \cosh(\omega \hat{t}) \, d\hat{t} = m\omega^2 x_0'^2 \sinh^2(\omega t)
 \end{aligned}$$

c) Es gibt zwei Möglichkeiten, die Energie der Perle zu berechnen:

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} [\dot{x}'^2 + (\omega x')^2] \\
 &= \frac{m}{2} \omega^2 x_0'^2 [\sinh^2(\omega t) + \cosh^2(\omega t)] \\
 &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}}{=} \frac{m}{2} \omega^2 x_0'^2 [2 \sinh^2(\omega t) + 1]
 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: $E(t) = E(0) + W = \frac{m}{2} (\omega x_0')^2 + m\omega^2 x_0'^2 \sinh^2(\omega t)$

1–6 Schwingender Fahrstuhl

Die Gleichgewichtslage des mit dem Mann belasteten Fahrstuhls liegt im inertialen Koordinatensprung: $x_F = 0$. Auf den schwingenden Fahrstuhlkorb wirken drei Kräfte:

Die Federkraft $-D x_F(t)$ und die Dämpferkraft $-c\dot{x}_F(t)$

Die Trägheitskraft, die durch die sportliche Übung verursacht wird:

$$-m_M \ddot{x}_M(t) = -m_M \underbrace{[\ddot{x}_F(t) - A \Omega^2 \cos(\Omega t)]}_{\substack{\text{Beschleunigung des Mannes} \\ \text{im Inertialsystem}}}$$

Daher lautet die Bewegungsgleichung des Fahrstuhlkorbes während der sportlichen Übung:

$$\begin{aligned}
 m_F \ddot{x}_F &= -D x_F - c\dot{x}_F - m_M [\ddot{x}_F(t) - A \Omega^2 \cos(\Omega t)] \\
 \Rightarrow (m_F + m_M) \ddot{x}_F + c\dot{x}_F + D x_F &= -m_M \Omega^2 A \cos(\Omega t)
 \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie entspricht der Differentialgl. (13.1–13) und beschreibt die angeregte Schwingung eines gedämpften harmonischen Oszillators. Ihre ausführliche Lösung wird in dem einfachen Beispiel 13.1–3, das bereits jetzt gelesen und verstanden werden kann, vorgeführt.

1-7 Käfer auf rotierender Scheibe

a) Nach den Gln. (1.4–7/8) lautet die Bewegungsgleichung im rotierenden System der Scheibe:

$$m \ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{0} = \mathbf{F}_H + m \omega^2 \mathbf{r}' + 2 m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \mathbf{F}_H = -m \omega^2 \mathbf{r}' + 2 m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (1)$$

Die Haftreibungskraft F_H der Scheibe auf den Käfer wird in Abb. 1.7–1 dargestellt.

b) Die Grenzbedingung für das Haften lautet

$$|\mathbf{F}_H| \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Gl. (1)}}}{=} m \omega \sqrt{\omega^2 x'^2 + 4 v'^2} \stackrel{!}{=} F_{H;\max} = \mu_0 m g$$

$$\Rightarrow x' = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\mu_0^2 g^2 - 4 \omega^2 v'^2}$$

Der Käfer beginnt in die entgegengesetzte Richtung von F_H zu rutschen.

1-8 Künstliches Schwerfeld

a) Der Radius der Kreisbahn ist $r = 30$ m. Im Inertialsystem ist die Läufergeschwindigkeit v beim

gleichsinnigen Umlauf: $v = \omega r + v' = 23,1$ m/s

gegenseitigen Umlauf: $v = \omega r - v' = 11,1$ m/s.

Im Inertialsystem errechnen sich dann folgende Zentripetalkräfte für den

gleichsinnigen Umlauf: $m \frac{v^2}{r} = m \frac{(\omega r + v')^2}{r} = F_B \approx m \cdot 17,8$ m/s² (1a)

gegenseitigen Umlauf: $m \frac{v^2}{r} = m \frac{(\omega r - v')^2}{r} = F_B \approx m \cdot 4,11$ m/s² (1b)

Im ersten (zweiten) Fall wird der laufende Astronaut etwa mit dem 1,8-fachen (0,42-fachen) Wert seiner irdischen Gewichtskraft zu Boden gedrückt.

b) Nach den Gln. (1.4–7/8) lautet die Bewegungsgleichung des Läufers:

$$m \ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}_B + m \omega^2 \mathbf{r}' + 2 m \mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \mathbf{F}_B = m \left(\ddot{\mathbf{r}}' + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2 \mathbf{r}' \right) \quad (2)$$

Wir müssen jetzt nur noch den ersten und zweiten Term in der runden Klammer berechnen.

Erster Term: Da der Läufer in der Raumstation mit der Geschwindigkeit v' auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r = 30$ m rennt, ist seine in der Raumstation gemessene Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}'$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\omega^2 \mathbf{r}' = -\frac{v'^2}{r^2} \mathbf{r}' \quad (3)$$

Zweiter Term: Für den $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichsinnigen} \\ \text{gegenseitigen} \end{array} \right\}$ Umlauf zeigt $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ radial nach $\left\{ \begin{array}{l} \text{innen} \\ \text{außen} \end{array} \right\}$, so dass

$$2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \mp 2 \omega v' \frac{\mathbf{r}'}{r} \quad (4)$$

Wir setzen die Gln. (3) und (4) in Gl. (2) ein:

$$\mathbf{F}_B = -m \left(\frac{v'^2}{r^2} \pm 2 \omega \frac{v'}{r} + \omega^2 \right) \mathbf{r}' \quad \text{für den } \left\{ \begin{array}{l} \text{gleichsinnigen} \\ \text{gegenseitigen} \end{array} \right\} \text{ Umlauf}$$

Daraus folgen die bereits in Teil a) der Aufgabe berechneten Kräfte F_B (siehe die Gln. (1a/b)).