

## FOKUS 1

# Die Eigenschaften der Gase

Ein **Gas** ist eine Form von Materie, die einen beliebigen Behälter stets vollständig ausfüllt. In den folgenden Abschnitten werden wir die Eigenschaften von Gasen charakterisieren, deren Kenntnis im weiteren Verlauf des Textes vorausgesetzt wird.

### 1.1 Das ideale Gas

Ein „ideales Gas“ ist ein vereinfachendes, idealisiertes Konzept zur Beschreibung von Gasen. Die Zustandsgleichung des idealen Gases kann aus experimentellen Befunden gewonnen werden, die durch das Boyle'sche Gesetz, das Charles'sche Gesetz und durch das Avogadro'sche Prinzip beschrieben werden.

*1.1.1 Die Zustandsgleichung des idealen Gases; 1.1.2 Anwendungen der Zustandsgleichung des idealen Gases; 1.1.3 Mischungen von Gasen: Der Partialdruck*

### 1.2 Die kinetische Gastheorie

Ein zentraler Aspekt der Physikalischen Chemie ist es, Modelle für das Verhalten von Molekülen aufzustellen, um die beobachteten Phänomene erklären zu können. Ein Paradebeispiel hierfür ist die Ableitung eines Modells für das Verhalten der Moleküle (oder Atome) eines idealen Gases, die sich in ständiger, ungerichteter Bewegung befinden. Dieses Modell ist die Grundlage für die molekulare, kinetische Gastheorie. Sie liefert nicht nur eine Erklärung für die Gasgesetze, sondern sie kann auch benutzt werden, um die mittlere Geschwindigkeit zu berechnen, mit der sich Moleküle in einem Gas bewegen, sowie deren Abhängigkeit von der Temperatur. Das Modell erlaubt darüber hinaus, Geschwindigkeitsverteilungen sowie deren Abhängigkeit von Molekülmasse und Temperatur anzugeben.

*1.2.1 Der Druck eines Gases; 1.2.2 Die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle; 1.2.3 Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung; 1.2.4 Diffusion und Effusion; 1.2.5 Intermolekulare Stöße*

### 1.3 Reale Gase

Das ideale Gas ist ein ausgezeichnete Ausgangspunkt für die Betrachtung aller Gase, und dessen Eigenschaften werden uns bei der Betrachtung der Thermodynamik und der Kinetik immer wieder begegnen. Allerdings weicht das tatsächliche Verhalten von „realen Gasen“ von diesen idealisierten Eigenschaften ab. Daher beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit der Interpretation dieser Abweichungen, und wir verfeinern das Modell, indem wir die Effekte molekularer Anziehungs- und Abstoßungskräfte berücksichtigen. Die Diskussion realer Gase ist ein weiteres Beispiel dafür, dass einfache Modellvorstellungen bald an ihre Grenzen stoßen, jedoch durch Berücksichtigung weiterer Aspekte und Verfeinerung der Theorie den Beobachtungen in der realen Welt angepasst werden können.

*1.3.1 Intermolekulare Wechselwirkungen; 1.3.2 Die kritische Temperatur; 1.3.3 Der Kompressionsfaktor; 1.3.4 Die Virialgleichung; 1.3.5 Die van-der-Waals-Gleichung; 1.3.6 Die Verflüssigung von Gasen*

### Anwendungen

Das ideale Gasgesetz und die kinetische Gastheorie finden Anwendung bei der Betrachtung der Vorgänge in einem einzelnen Reaktionsgefäß, oder sogar auf einem ganzen Planeten. Im Exkurs „Anwendung 1: Umweltwissenschaft – Die Bedeutung der Gasgesetze für das Wetter“ am Ende dieses Fokus werden wir sehen, wie die Gasgesetze dazu benutzt werden, um meteorologische Phänomene zu beschreiben und zu verstehen.

## 4 | 1 Die Eigenschaften der Gase

## 1.1 Das ideale Gas

**Motivation**

Die Gleichungen, die das Verhalten eines idealen Gases beschreiben, bilden die Grundlage zur Ableitung vieler, komplexerer Gesetze der Physikalischen Chemie. Das ideale Gasgesetz ist darüber hinaus eine gute erste Näherung, um das Verhalten realer Gase zu beschreiben.

**Schlüsselideen**

Das ideale Gasgesetz, das eine Reihe empirischer Beobachtungen zusammenfasst, beschreibt die Eigenschaften eines realen Gases umso präziser, je näher sich der Druck eines Gases null nähert.

**Voraussetzungen**

Die einzige Voraussetzung zum Verständnis dieses Abschnitts ist die Kenntnis der SI-Einheiten und ihrer Umrechnung, wie in „Toolkit 1: Größen und Einheiten“ beschrieben.

Den genauen Zustand einer gasförmigen Substanzprobe können wir durch die Angabe der Werte folgender Größen charakterisieren:

- $p$  (der Druck der Probe),
- $V$  (das Volumen der Probe),
- $T$  (die Temperatur der Probe),
- $n$  (die Stoffmenge in der Probe).

Diese vier Größen sind wie folgt definiert:

Das **Volumen**  $V$  ist der dreidimensionale Rauminhalt, den eine Substanz einnimmt. Volumen wird in Quadratmetern  $\text{m}^3$  angegeben, bzw. in Bruchteilen hiervon, wie z. B. Kubikdezimeter  $\text{dm}^3$  ( $1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ ) oder Kubikzentimeter ( $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$ ). Häufig werden Volumina in den nicht-SI-Einheiten Liter ( $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ ) bzw. Milliliter ( $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$ ) angegeben.

Der **Druck**  $p$  ist definiert als das Verhältnis aus der **Kraft**  $F$ , geteilt durch die **Fläche**  $A$ , auf welche diese Kraft wirkt:

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{F}{A}. \quad (1.1)$$

In einem Gas wird die Kraft, gemessen in **Newton** (N) mit  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ , durch Stöße der Atome oder Moleküle des Gases auf die Wand des Behälters hervorgerufen, wie wir in Abschn. 1.2 im Detail besprochen werden. Die SI-Einheit des Drucks ist das **Pascal** (Pa), wobei  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Das Pascal entspricht ungefähr dem Druck, den eine Masse von 10 mg auf  $1 \text{ cm}^2$  an der Erdoberfläche ausübt –

es ist also eine sehr „kleine“ Einheit. Dies führt dazu, dass es häufig angebracht erscheint, den Druck in anderen Einheiten anzugeben. Eine der am häufigsten verwendeten Alternativen ist das **Bar** (bar), wobei  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ; das Bar ist zwar keine SI-Einheit, aber es ist eine allgemein akzeptierte und weit verbreitete Abkürzung für  $10^5 \text{ Pa}$ . Der Atmosphärendruck auf der Erde, dem wir normalerweise ausgesetzt sind, entspricht ungefähr 1 bar. Eine ähnliche, ältere Einheit, die diesen Umstand noch genauer berücksichtigt, ist die physikalische **Atmosphäre** (atm), wobei  $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$  ist. Man beachte, dass der Druck bei 1 atm etwas höher ist als bei 1 bar (ca. 1 %).

**Temperatur** ist die Eigenschaft eines Objekts, die bestimmt, in welche Richtung Energie in Form von **Wärme** abgegeben wird, wenn es mit einem anderen Objekt in Kontakt gebracht wird: der Energiefluss verläuft stets vom wärmeren zum kälteren Objekt. Bei Angabe der **thermodynamischen Temperatur**  $T$ , die auch „absolute Temperatur“ genannt wird, ist die niedrigste mögliche Temperatur als  $T = 0$  definiert; sie wird in der Einheit **Kelvin** (K) angegeben. Die Definition der **Kelvin-Skala** basiert ferner auf dem sogenannten „Tripelpunkt“ von Wasser; bei 273,16 K existieren flüssiges Wasser, Eis und Wasserdampf nebeneinander im Gleichgewicht. Der Gefrierpunkt von Wasser liegt nur unwesentlich niedriger, nämlich bei 273,15 K. In der Praxis wird darüber hinaus die besser bekannte **Celsius-Skala** verwendet, das Symbol für die Temperatur ist dann  $\theta$  (theta). Die Celsius-Skala hängt mit der Kelvin-Skala durch folgende Beziehung zusammen:

$$\frac{\theta}{^\circ\text{C}} = \frac{T}{\text{K}} - 273,15. \quad (1.2)$$

Eine Temperaturänderung von 1 Kelvin ist gleich groß wie eine Temperaturänderung um 1 Grad Celsius. Auf der Celsius-Skala gefriert Wasser bei 1 atm Druck bei  $0^\circ\text{C}$ , und der Siedepunkt liegt bei knapp  $100^\circ\text{C}$ .

Die **Stoffmenge**  $n$  ist die Anzahl von Atomen oder Molekülen  $N$  in einer Probe, ausgedrückt als ein Vielfaches der **Avogadro-Konstanten**,  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Die Einheit der Stoffmenge ist das **Mol** (mol):

$$n = \frac{N}{N_A}. \quad (1.3)$$

In der Praxis wird die Stoffmenge aus der Masse  $m$  und der molaren Masse  $M$  einer Substanz berechnet, gemäß  $n = m/M$ . Im Labor sprechen Chemiker noch häufig von der Molzahl oder Molmenge; diese Ausdrucksweise ist jedoch inoffiziell und veraltet.

Wenn eine Probe in kleinere Einzelproben aufgeteilt wird, und eine untersuchte Größe der Gesamtprobe

sich nun aus der Summe dieser Größe in den Einzelproben ergibt, spricht man von einer **extensiven Größe**. Beispiele dafür sind die Masse  $m$  oder das Volumen  $V$ . Wenn eine Größe hingegen auch in den Einzelproben unverändert bleibt, spricht man von einer **intensiven Größe**. Die Summe dieser Größe in den Einzelproben wäre also ungleich der Größe in der ursprünglichen, ungeteilten Probe. Beispiele dafür sind die Temperatur und der Druck. Die **Dichte**  $d$ , mit  $d = m/V$ , ist ebenfalls eine intensive Größe, da sie in allen Einzelproben gleich groß wäre wie in der ungeteilten Gesamtprobe. Alle molaren Größen,  $X_m = X/n$ , bei denen sowohl  $X$  als auch  $n$  extensive Größen sind, stellen intensive Größen dar.

Ein überraschender experimenteller Befund besagt: *Die Größen  $p$ ,  $V$ ,  $T$  und  $n$  sind nicht unabhängig voneinander.* Wir können zum Beispiel nicht willkürlich eine Probe von  $0,555 \text{ mol}$  Wasser innerhalb eines Volumens von  $100 \text{ cm}^3$  in einen Zustand bei  $100 \text{ kPa}$  und  $500 \text{ K}$  versetzen. Es wird *experimentell* gefunden, dass ein solcher Zustand nicht existiert. Geben wir Stoffmenge, Volumen und Temperatur vor, so müssen wir

einen bestimmten Druck akzeptieren (für den oben angeführten Fall etwa  $230 \text{ kPa}$ ). Das gilt prinzipiell für alle Substanzen, unterschiedlich sind nur die Werte des Drucks, der sich jeweils einstellt, wenn man die drei anderen Größen vorgibt. Wir wollen den experimentellen Befund verallgemeinern: Jede Substanz gehorcht einer **Zustandsgleichung**, einer Gleichung der Form

$$p = f(n, V, T). \quad (1.4)$$

Diese Gleichung besagt, dass der Druck eine Funktion der Stoffmenge, des Volumens und der Temperatur ist. Wenn wir diese drei Größen kennen, dann kann auch der Druck nur einen ganz bestimmten Wert haben.

Die Zustandsgleichungen der meisten Substanzen kennen wir nicht, so dass wir gewöhnlich keinen expliziten Ausdruck für den Druck in Abhängigkeit von den anderen Größen angeben können. Bestimmte Zustandsgleichungen hingegen sind bekannt, insbesondere die Zustandsgleichung eines Gases bei niedrigem Druck, die sich als besonders einfach und sehr nützlich erweist. Sie wird verwendet, um ebenso das Ver-

### Toolkit 1: Größen und Einheiten

Das Ergebnis einer Messung ist eine **physikalische Größe** (zum Beispiel eine Masse oder eine Dichte), die als Vielfaches einer vereinbarten **Einheit** angegeben wird:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert} \times \text{Einheit}.$$

Wir können Einheiten wie algebraische Größen behandeln, können sie miteinander multiplizieren, durch sie dividieren und sie gegeneinander kürzen. Der Ausdruck (physikalische Größe) / Einheit ist einfach der Zahlenwert unserer Messung, das heißt eine dimensionslose Zahl. Wir könnten die Masse eines Objektes mit  $m = 2,5 \text{ kg}$  oder auch mit  $m/\text{kg} = 2,5$  angeben. Obwohl es sich bewährt hat, ausschließlich **SI-Einheiten** aus dem **internationalen Maßeinheitensystem (SI)** zu verwenden, werden historisch bedingt auch einige nicht-SI-Einheiten nach wie vor verwendet und akzeptiert. Physikalische Größen werden kursiv gesetzt oder mit griechischen Buchstaben benannt (z. B.  $m$  für die Masse,  $\mu$  für das chemische Potenzial); alle Einheiten und deren Präfixe werden steil gesetzt, um eine Unterscheidung von den Größen zu ermöglichen (z. B.  $\text{m}$  für Meter,  $\mu\text{m}$  für Mikrometer).

Im **SI-System** wurden alle Einheiten auf sieben **Basis-einheiten** zurückgeführt, die im Anhang in Tab. A2.1 aufgeführt sind. Alle anderen physikalischen Größen sind in Zusammensetzungen dieser Einheiten darstellbar und werden in **abgeleiteten Einheiten** angegeben. Die wichtigsten sind im Anhang in den Tab. A2.2

und A2.3 aufgeführt. Die **Molarität** (formeller auch als **Stoffmengenkonzentration** bezeichnet), also die Menge einer Substanz dividiert durch das von ihr eingenommene Volumen, wird beispielsweise angegeben in  $\text{mol dm}^{-3}$ , also durch die Kombination der Einheiten für Stoffmenge und Volumen. Einige abgeleitete Einheiten haben spezielle Namen und Symbole, auf die wir eingehen werden, sobald sie im Rahmen dieses Buches verwendet werden.

Einheiten können mit einem Präfix für eine Zehnerpotenz versehen werden. Die am häufigsten verwendeten Präfixe sind im Anhang in Tab. A2.4 aufgeführt. Folgende Beispiele verdeutlichen ihre Verwendung:

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}, \quad 1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}, \quad 1 \mu\text{mol} = 10^{-6} \text{ mol}.$$

Potenzen wirken sich sowohl auf die Präfixe als auch auf die Einheit aus:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 (\text{cm})^3 = 1(10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Beachten Sie, dass  $1 \text{ cm}^3$  nicht  $1 \text{ c}(\text{m}^3)$  bedeutet. Wenn wir numerische Berechnungen durchführen, notieren wir die Zahlenwerte von Größen am besten ebenfalls in wissenschaftlicher Schreibweise, also in Zehnerpotenzen nach dem Schema:

$$n, \text{nnn} \times 10^n.$$

## 6 | 1 Die Eigenschaften der Gase

halten der Atmosphäre zu beschreiben wie das von gasförmigen Reaktionsprodukten. Ferner dient diese Gleichung zur Lösung von Problemen in der chemischen Verfahrenstechnik. Sogar zur Modellierung des Aufbaus von Sternen und Gasplaneten, wie z. B. Jupiter und Saturn, kann sie herangezogen werden.

## 1.1.1 Die Zustandsgleichung des idealen Gases

Die Experimente von Robert Boyle im siebzehnten Jahrhundert und dessen Nachfolgern führten zur Formulierung der **Zustandsgleichung des idealen Gases**:

$$pV = nRT \quad (1.5a)$$

(Diese Beziehung hat die Form von Gl. (1.4), wenn wir sie zu

$$p = \frac{nRT}{V} \quad (1.5b)$$

umformen.) Die (molare) **Gaskonstante**  $R$  wird experimentell bestimmt und besitzt für alle Gase den gleichen Wert. Sie kann durch eine Berechnung von  $R = pV/(nT)$  aus experimentellen Daten für ein Gas bei unterschiedlichen Drücken und eine anschließende Extrapolation der Daten auf  $p = 0$  bestimmt werden. Weiterhin ist die Gaskonstante aus Messungen der Schallgeschwindigkeit (die von  $R$  abhängt) zugänglich. In Tab. 1.1 ist der Wert für die Gaskonstante in verschiedenen Einheiten angegeben.

Die Bezeichnung „Zustandsgleichung des idealen Gases“ drückt aus, dass dieses Gesetz eine Idealisierung der Zustandsgleichungen ist, denen Gase eigentlich gehorchen. Es wird insbesondere gefunden, dass sich das Verhalten aller Gase umso besser durch dieses Gesetz beschreiben lässt, je niedriger der Druck ist. Daher ist Gl. (1.5a) ein Beispiel für ein **Grenzesetz**: Die Näherung wird immer besser, je weiter der Druck abnimmt, und im Grenzfall  $p \rightarrow 0$  wird das Gesetz exakt befolgt.

Eine hypothetische Substanz, für die Gl. (1.5a) bei *allen* Drücken gültig wäre, wird **ideales Gas** genannt.

Ein wirklich existierendes Gas, ein **reales Gas**, verhält sich mehr und mehr wie ein ideales Gas, je weiter der Druck auf null reduziert wird. In der Praxis zeigen die meisten Gase bereits bei normalem Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels ( $p \approx 100$  kPa) ein nahezu ideales Verhalten. Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, werden wir innerhalb dieses Buchs alle Gase als ideal betrachten. Das nichtideale Verhalten realer Gase kann auf Anziehungen und Abstoßungen zwischen den Molekülen zurückgeführt werden (siehe Abschn. 1.3), die es in einem idealen Gas nicht gibt.

Die *Zustandsgleichung des idealen Gases* vereinigt drei Beziehungen, die eine gegenseitige Abhängigkeit von jeweils zwei der vier Größen  $p$ ,  $V$ ,  $T$  und  $n$  angeben. Die erste Gleichung, das **Boyle'sche Gesetz**, beschreibt den Zusammenhang zwischen  $p$  und  $V$ :

*Bei konstanter Temperatur und Stoffmenge ist der Druck eines Gases umgekehrt proportional zu dessen Volumen.*

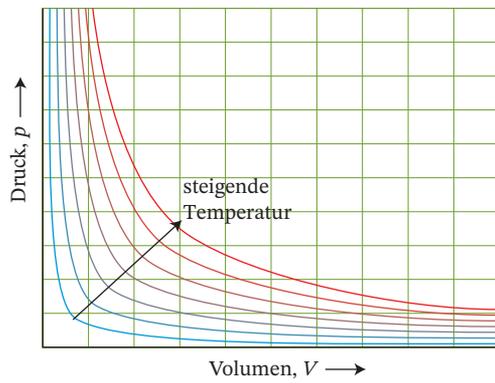
In mathematischer Schreibweise lautet das *Boyle'sche Gesetz*:

$$\text{Bei konstantem } T \text{ und } n \text{ gilt } p \propto \frac{1}{V} \quad (1.6)$$

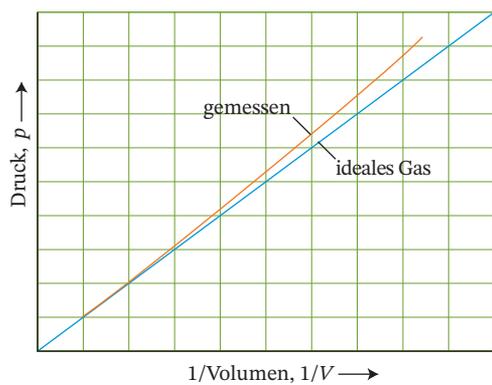
Wir können sehr einfach nachweisen, dass Gl. (1.5a) mit dem Boyle'schen Gesetz vereinbar ist. Dazu behandeln wir  $n$  und  $T$  als Konstanten. Dann ergibt sich für  $pV$  auch ein konstanter Wert, so dass  $p \propto 1/V$  ist. Das Boyle'sche Gesetz besagt, dass sich der Druck eines Gases verdoppelt, wenn es bei konstanter Temperatur und Stoffmenge auf die Hälfte des ursprünglichen Volumens komprimiert wird. Abbildung 1.1 veranschaulicht das Boyle'sche Gesetz in Form eines Diagramms. Aufgetragen sind experimentell bestimmte Werte des Drucks als Funktion des Volumens bei verschiedenen Temperaturen (bei konstanter Stoffmenge  $n$ ) und die jeweils vom Boyle'schen Gesetz vorhergesagten Kurven. Jede einzelne Kurve ist eine **Isotherme**, denn sie gibt die Änderung einer Größe (in diesem Fall des Drucks) bei einer einzelnen *konstanten Temperatur* an. Diesem Diagramm ist nicht ohne weiteres anzusehen, ob das Boyle'sche Gesetz für den ge-

Tab. 1.1 Die Gaskonstante in verschiedenen Einheiten.

$R$	Einheit	Typische Anwendung
8,314 47	$\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	Fundamentale Anwendungen
8,314 47	$\text{kPa dm}^3 \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	Volumen in Litern (bzw. $\text{dm}^3$ ) angegeben
$8,205 74 \times 10^{-2}$	$\text{dm}^3 \text{ atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	Druck in Atmosphären und Volumen in Litern (bzw. $\text{dm}^3$ ) angegeben
62,364	$\text{dm}^3 \text{ Torr K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	Druck in Torr und Volumen in Litern (bzw. $\text{dm}^3$ ) angegeben
1,987 21	$\text{cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	In der Kalorimetrie, Daten in Kalorien (cal) angegeben



**Abb. 1.1** Das Volumen eines gasförmigen Stoffes nimmt mit steigendem Druck ab. Bei konstanter Temperatur entspricht der Verlauf des Drucks in Abhängigkeit vom Volumen einer Hyperbel, wenn das Verhalten des Gases durch das Boyle'sche Gesetz beschrieben wird. Jede Kurve stellt den Zusammenhang zwischen Druck und Volumen bei einer einzelnen Temperatur dar und wird daher *Isotherme* genannt.



**Abb. 1.2** Die Gültigkeit des Boyle'schen Gesetzes kann in einfacher Weise durch eine Auftragung des Drucks als Funktion von  $1/V$  bei konstanter Temperatur überprüft werden. Ist das Boyle'sche Gesetz erfüllt, so ergibt sich eine Gerade. Das Diagramm zeigt, dass die bei höheren Drücken vorhandene Abweichung der gemessenen Werte (rote Linie) von idealem Verhalten (blaue Linie) zusehends verschwindet, wenn der Druck verringert wird. Bei hinreichend kleinen Drücken bzw. großen Volumina liegen die Messdaten auf der blauen Geraden, denn das Verhalten realer Gase wird dann vom Boyle'schen Gesetz richtig wiedergegeben.

samten Druckbereich gültig ist. Tragen wir hingegen  $p$  als Funktion von  $1/V$  auf, erhalten wir gerade Linien, so wie wir es aufgrund des Boyle'schen Gesetzes auch erwarten würden (siehe Abb. 1.2). Es ist gewöhnlich besonders einfach, eine Beziehung zu überprüfen, wenn man die experimentellen Daten so aufträgt, dass sich eine Gerade ergeben sollte. In „Toolkit 2: Lineare Beziehungen und Graphen“ sind die Grundlagen der linearen Auftragung physikalischer Größen beschrieben.

**Toolkit 2: Lineare Beziehungen und Graphen**

Es ist oft sehr schwierig, allein anhand von Kurvenverläufen mit bloßem Auge zu entscheiden, ob eine Beziehung zwischen zwei Größen über den gesamten betrachteten Größenbereich gilt. Daher bietet es sich an, die Gültigkeit des postulierten mathematischen Zusammenhangs zweier physikalischer Größen  $x$  und  $y$  zu überprüfen, indem man eine Auftragung wählt, bei der sich ein linearer Graph ergibt. Die allgemeine Gleichung einer Geraden lautet

$$y = mx + b.$$

In diesem Ausdruck ist  $m$  die Steigung der Geraden und  $b$  ist der  $y$ -Achsenabschnitt (bei  $x = 0$ ). Daraus ergibt sich ein positiver Wert für  $m$  bei einer von links nach rechts ansteigenden Geraden (mit steigendem  $x$ ); analog ergibt sich ein negativer Wert für  $m$  bei einer von links nach rechts absteigenden Geraden. Die Größe  $y$  ist *linear abhängig* von  $x$ , wenn die Beziehung der allgemeinen Geradengleichung  $y = mx + b$  folgt. Wenn die lineare Beziehung darüber hinaus durch den Nullpunkt geht, die Geradengleichung sich also zu  $y = mx$  vereinfacht, dann ist  $y$  *linear proportional* zu  $x$ .

Die horizontale und die vertikale Achse der graphischen Auftragung sollten reine Zahlenwerte repräsentieren, indem man die aufgetragenen physikalischen Größen durch ihre Einheiten teilt (wie zuvor in „Toolkit 1: Größen und Einheiten“ beschrieben). Um zum Beispiel das Volumen eines Gases gemessen in Kubikdezimetern (= Litern) gegen die Temperatur gemessen in Kelvin aufzutragen, trägt man  $V/\text{dm}^3$  gegen  $T/\text{K}$  auf. Sowohl die Steigung der Geraden als auch der Achsenabschnitt sind dann reine – also dimensionslose – Zahlen, und die Einheiten von  $m$  und  $b$  müssen entsprechend der gewählten Auftragung interpretiert werden. Obschon die Einheiten von  $m$  und  $b$  im oben genannten Beispiel unmittelbar einleuchtend sein dürften, ist es hilfreich, sich für kompliziertere Fälle ein allgemeines, systematisches Vorgehen zu überlegen:

Bezeichnen wir die Einheit der Größe  $y$  mit  $Y$  (im oben genannten Beispiel ist  $Y = \text{dm}^3$ ) und die Einheit der Größe  $x$  mit  $X$  (im Beispiel ist  $X = \text{K}$ ). Dann können wir die Geradengleichung  $y = mx + b$  wie folgt schreiben:

$$(y/Y)Y = m(x/X)X + b$$

[im Beispiel wird  $V = mT + b$  zu

$$(V/\text{dm}^3) \text{dm}^3 = m(T/\text{K})\text{K} + b]$$

Wir teilen nun die allgemeine Gleichung durch  $Y$ :

$$(y/Y) = m(x/X)X/Y + b/Y$$

[im Beispiel:  $(V/\text{dm}^3) = m(T/\text{K})\text{K}/\text{dm}^3 + b/\text{dm}^3]$

8 | 1 Die Eigenschaften der Gase

was (nach Vereinfachung des ersten Terms) gleichbedeutend ist mit

$$y/Y = (mX/Y)x/X + b/Y$$

[im Beispiel:  $V/\text{dm}^3 = (m\text{K}/\text{dm}^3)T/\text{K} + b/\text{dm}^3$ ]

Bei der nun folgenden Auftragung der dimensionslosen Größe  $y/Y$  gegen die dimensionslose Größe  $x/X$  erhalten wir eine Gerade mit dem Achsenabschnitt  $b/Y$  und der Steigung  $mX/Y$  (siehe Abb. T1). Nun lassen sich aus den reinen Zahlenwerten für den *Achsenabschnitt* und die *Steigung*, die dem Graphen entnommen werden, die gewünschten Werte von  $b$  und  $m$  ermitteln:

$$b/Y = \text{Achsenabschnitt},$$

also  $b = \text{Achsenabschnitt} \times Y$

$$mX/Y = \text{Steigung},$$

also  $m = \text{Steigung} \times Y/X = \text{Steigung} \times YX^{-1}$

[im Beispiel:  $b = \text{Achsenabschnitt} \times \text{dm}^3$  und  $m = \text{Steigung} \times \text{dm}^3/\text{K} = \text{Steigung} \times \text{dm}^3 \text{K}^{-1}$ ]

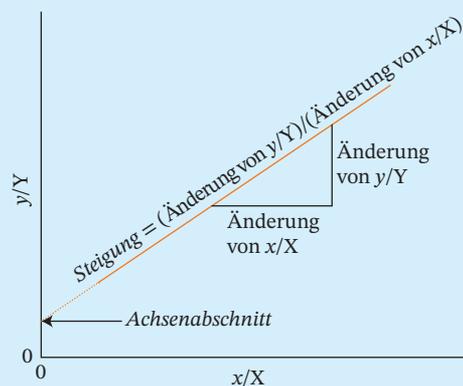


Abb. T1

Die zweite experimentelle Beobachtung, die sich in der *Zustandsgleichung des idealen Gases* ausdrückt, ist das **Charles'sche Gesetz**, das den Zusammenhang zwischen  $V$  und  $T$  beschreibt:

*Bei konstantem Druck und konstanter Stoffmenge ändert sich das Volumen eines Gases proportional zur absoluten Temperatur.*

In mathematischer Schreibweise:

$$\text{Bei konstantem } p \text{ und } n \text{ gilt } V \propto T \quad (1.7)$$

Somit führt bei konstantem Druck eine Verdopplung der Temperatur auf der Kelvin-Skala (beispielsweise von 300 auf 600 K, entsprechend einer Erhöhung von 27 auf 327 °C) zu einer Verdopplung des Volumens.

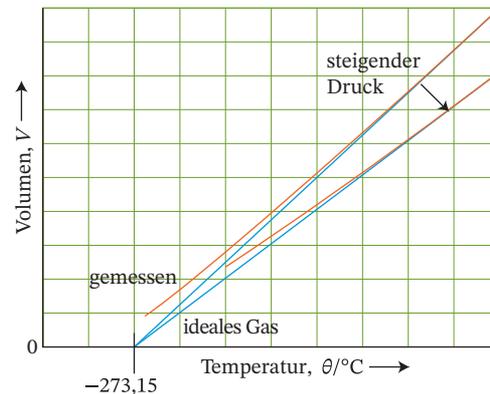


Abb. 1.3 Dieses Diagramm veranschaulicht das Charles'sche Gesetz und zeigt, dass das Volumen eines Gases bei konstantem Druck linear von der Temperatur abhängt. Beim Auftragen der Werte gegen die Celsius-Temperatur (wie hier gezeigt) ergeben sich für alle Gase Geraden, die bei Extrapolation nach  $V = 0$  Schnittpunkte mit der  $\theta$ -Achse bei einer Celsius-Temperatur von  $-273,15$  °C besitzen. Diese Temperatur sollte demnach die tiefste sein, auf die ein Körper abgekühlt werden kann.

Nun können wir überprüfen, ob Gl. (1.5a) mit dem Charles'schen Gesetz vereinbar ist. Hierzu formen wir Gl. (1.5a) zunächst in  $V = nRT/p$  um. Wenn nun sowohl die Stoffmenge  $n$  als auch der Druck  $p$  konstant sind, gilt tatsächlich:  $V \propto T$ . Dies ist in Abb. 1.3 dargestellt.

Die dritte Eigenschaft von Gasen, die durch Gl. (1.5a) ausgedrückt wird, ist das **Avogadro'sche Prinzip**. Es gibt den Zusammenhang zwischen  $V$  und  $n$  an:

*Bei vorgegebener Temperatur und vorgegebenem Druck enthalten gleiche Volumina eines Gases die gleiche Anzahl Moleküle.*

Das bedeutet, dass 1,00 dm<sup>3</sup> (1,00 L) Sauerstoff bei 100 kPa und 300 K genauso viele Moleküle enthält wie 1,00 dm<sup>3</sup> Kohlendioxid oder 1,00 dm<sup>3</sup> eines beliebig anderen Gases bei gleicher Temperatur und gleichem Druck. Dieses Prinzip impliziert, dass sich das Volumen einer Probe verdoppelt, wenn wir die Anzahl der Moleküle verdoppeln, Temperatur und Druck jedoch konstant halten. Daher können wir für das *Avogadro'sche Prinzip* auch schreiben:

$$\text{Bei konstantem } p \text{ und } T \text{ gilt } V \propto n \quad (1.8)$$

Dieses Ergebnis kann in einfacher Weise aus Gl. (1.5a) abgeleitet werden, wenn wir  $p$  und  $T$  als Konstanten behandeln. Avogadros Hypothese ist in der Tat eher ein Prinzip als ein Gesetz, denn es wurde nicht aus experimentellen Befunden abgeleitet, sondern basiert auf der Modellvorstellung eines Gases als Ansammlung einer Vielzahl von Molekülen.

Das **Molvolumen**  $V_m$  einer beliebigen Substanz (nicht nur eines Gases) entspricht dem Volumen, das von einem Mol dieser Substanz eingenommen wird:

$$\text{Molvolumen} = \frac{\text{Volumen der Probe}}{\text{Stoffmenge}}, \quad V_m = \frac{V}{n}. \quad (1.9a)$$

Für ein ideales Gas gilt  $n = pV/RT$ . Eine Kombination beider Gleichungen liefert

$$V_m = \frac{V}{n} = \frac{V}{pV/(RT)} = \frac{1}{p/(RT)} = \frac{RT}{p}. \quad (1.9b)$$

Mit diesem Ausdruck können wir das Molvolumen eines beliebigen (idealen) Gases aus dessen Druck und Temperatur bestimmen. Außerdem zeigt Gl. (1.9b), dass alle Gase bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck das gleiche Molvolumen haben, wenn sie sich ideal verhalten.

#### Illustration 1.1: Das Molvolumen eines idealen Gases

Zur Berechnung des Molvolumens eines idealen Gases bei 298,15 K und 100,0 kPa aus Gl. (1.9b) ist es sinnvoll, denjenigen Wert für die Gaskonstante  $R$  zu verwenden, bei dem die Einheiten bereits in den vorgegebenen Dimensionen angegeben sind (hier: Volumen in Kubikdezimeter, Stoffmenge in Mol, Druck in Kilopascal). In diesem Falle wählen wir  $R = 8,31447 \text{ dm}^3 \text{ kPa K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{\overbrace{8,31447 \text{ dm}^3 \text{ kPa K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}^R \times \overbrace{298,15 \text{ K}}^T}{\underbrace{100,0 \text{ kPa}}_p} \\ &= \frac{8,31447 \times 298,15 \text{ dm}^3 \text{ kPa K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ K}}{100,0 \text{ kPa}} \\ &= 24,79 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}. \end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise erlaubt es, die Einheiten im letzten Schritt einfach zu kürzen.

#### Selbsttest 1.1

Berechnen Sie das Molvolumen eines idealen Gases bei 0,0 °C und 1,000 atm.

[Antwort: 22,41 dm<sup>3</sup> mol<sup>-1</sup>]

Die Werte in Tab. 1.2 zeigen, dass die Folgerung, dass das Molvolumen aller Gase bei derselben Temperatur und demselben Druck identisch sind, solange sie sich

**Tab. 1.2** Molvolumina von Gasen bei Standardtemperatur und Standarddruck (298,15 K und 1 bar).

Gas	$V_m / (\text{dm}^3 \text{ mol}^{-1})$
Ideales Gas	24,7896 <sup>a)</sup>
Ammoniak	24,8
Argon	24,4
Kohlendioxid	24,6
Stickstoff	24,8
Sauerstoff	24,8
Wasserstoff	24,8
Helium	24,8

a)  $V_m = 22,4140 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$  bei 0 °C und 1 atm.

ideal verhalten, für die meisten Gase unter normalen Bedingungen (normaler Luftdruck von etwa 100 kPa und Raumtemperatur) annähernd zutrifft.

Chemiker und Physiker geben Daten zu Gasen häufig bei sogenannten **Standardbedingungen** bzw. **Normbedingungen** an. Dabei sind u. a. zu unterscheiden:

- *Standardbedingungen* (SATP, engl. „standard ambient temperature and pressure“, gemäß IUPAC): Temperatur  $T^\ominus = 25 \text{ °C}$  (= 298,15 K); Druck  $p^\ominus = 1 \text{ bar}$  (= 100 kPa)
- *Normbedingungen* (STP, engl. „standard temperature and pressure“, gemäß DIN 1343): Temperatur  $T_n = 0 \text{ °C}$  (= 273,15 K); Druck  $p_n = 1 \text{ atm}$  (= 101,325 kPa)

**Hinweis** Standardbedingungen sollten nicht verwechselt werden mit den *Standardzuständen* von Substanzen, die in Abschn. 2.5 vorgestellt werden.

Das Molvolumen eines idealen Gases bei Standardbedingungen beträgt  $24,79 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$  (siehe auch Illustration 1.1). Dieser Wert bedeutet, dass 1 mol eines idealen Gases bei Standardbedingungen (SATP) ein Volumen von ungefähr 25 Litern einnimmt (was einem Würfel von ca. 30 cm Kantenlänge entspricht). Bei Normbedingungen (STP) beträgt das Molvolumen eines idealen Gases lediglich  $22,41 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$  (siehe auch Selbsttest 1.1).

#### 1.1.2 Anwendungen der Zustandsgleichung des idealen Gases

Im Anschluss werden wir zwei grundlegende Anwendungen der Zustandsgleichung des idealen Gases (Gl. (1.5a)) besprechen:

1. die Berechnung des Drucks eines Gases bei gegebenen Werten für Temperatur, Stoffmenge und Volumen.

## 10 | 1 Die Eigenschaften der Gase

2. die Berechnung von Druckänderungen als Folge einer Änderung der Bedingungen.

Berechnungen dieser Art sind die Grundlage für weitergehende Überlegungen. Meteorologen beispielsweise stellen solche Überlegungen an, um die Änderungen in der Atmosphäre zu verstehen, die wir *Wetter* nennen (siehe „Anwendung 1: Umweltwissenschaft – Die Bedeutung der Gasgesetze für das Wetter“).

**Beispiel 1.1: Berechnung eines Gasdrucks**

Bestimmte Bakterien, die an den Wurzeln mancher Hülsenfrüchte leben, können den Stickstoff aus der Atmosphäre in eine für Pflanzen verwertbare Form umwandeln. Ein Chemiker, der dieses Phänomen untersucht, benötigt den Druck in Kilopascal, der von 1,25 g gasförmigem Stickstoff in einem Glaskolben mit einem Volumen von 250 cm<sup>3</sup> bei 20 °C hervorgerufen wird.

**Vorgehensweise** Wir müssen das ideale Gasgesetz (Gl. (1.5a)) so umformen, dass wir für die unbekannte Größe (den Druck  $p$ ) einen Ausdruck erhalten, in den wir die bekannten Werte einsetzen können:

$$p = \frac{nRT}{V} .$$

Um diesen Ausdruck anwenden zu können, benötigen wir die Stoffmenge an Stickstoffmolekülen (in mol), die wir aus der angegebenen Masse und der Molmasse über den Zusammenhang  $n = m/M$  erhalten. Weiterhin müssen wir die Temperatur in Kelvin umrechnen, indem wir 273,15 zur Celsius-Temperatur addieren. Ein bezüglich der Einheiten von Druck und Volumen (kPa bzw. cm<sup>3</sup>) geeigneter Wert von  $R$  kann Tab. 1.1 entnommen werden (bedenken Sie dabei, dass 10<sup>3</sup> cm<sup>3</sup> = 1 dm<sup>3</sup> ist).

**Lösung** Die Stoffmenge an N<sub>2</sub>-Molekülen (Molmasse 28,02 g mol<sup>-1</sup>) beträgt

$$\begin{aligned} n_{\text{N}_2} &= \frac{m}{M_{\text{N}_2}} = \frac{1,25 \text{ g}}{28,02 \text{ g mol}^{-1}} \\ &= \frac{1,25}{28,02} \text{ mol} = 0,0446 \text{ mol} . \end{aligned}$$

Die Temperatur der Probe ist

$$\begin{aligned} T/\text{K} &= 20 + 273,15 , \\ \text{also: } T &= (20 + 273,15) \text{ K} = 293,15 \text{ K} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich der Druck gemäß  $p = nRT/V$  zu

$$\begin{aligned} p &= \overbrace{0,0446 \text{ mol}}^n \times \\ &\quad \frac{\overbrace{8,31447 \times 10^3 \text{ cm}^3 \text{ kPa K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}^R \times \overbrace{293,15 \text{ K}}^T}{\underbrace{250 \text{ cm}^3}_V} \\ &= \frac{0,0446 \times 8,31447 \times 10^3 \times 293,15}{250} \text{ kPa} \\ &= 435 \text{ kPa} . \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass sich auch Einheiten wie gewöhnliche Zahlen herauskürzen. Hätte das Ergebnis für den Druck in einer anderen Einheit angegeben werden sollen, verwendet man einfach den entsprechenden Wert für  $R$  aus Tab. 1.1.

**Hinweis** Es ist sinnvoll, die Berechnung des Zahlenwerts erst ganz am Ende durchzuführen, und zwar in einem einzigen Schritt. Auf diese Weise werden Rundungsfehler minimiert.

**Selbsttest 1.2**

Berechnen Sie den Druck, den Kohlendioxidgas mit einer Masse von 1,22 g in einem Glaskolben mit einem Volumen von 500 cm<sup>3</sup> bei 37 °C erzeugt.

[Antwort: 143 Pa]

In manchen Fällen kennen wir den Druck eines Gases unter bestimmten Bedingungen und sollen nun den Druck der gleichen Probe unter anderen Bedingungen angeben. Dazu wenden wir die Zustandsgleichung des idealen Gases wie folgt an. Wenn Anfangsdruck, Anfangstemperatur und Anfangsvolumen durch  $p_1$ ,  $T_1$  und  $V_1$  gegeben sind, dann folgt nach einer Division durch die Temperatur auf beiden Seiten von Gl. (1.5a)

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = nR .$$

Wenn wir jetzt eine neue Temperatur  $T_2$  und ein neues Volumen  $V_2$  vorgeben, ergibt sich mit  $p_2$  auch ein neuer Druck. Nun schreiben wir Gl. (1.5a) in der Form

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = nR .$$

Da  $R$  eine Konstante ist und sich die Stoffmenge des Gases nicht geändert hat, stimmen die Werte von  $nR$  auf der rechten Seite beider Gleichungen überein. Deshalb können wir beide Gleichungen zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} . \quad (1.10)$$

Wir können diesen Ausdruck umformen, um eine unbekannte Größe (beispielsweise  $p_2$ ) aus den bekannten Größen zu berechnen, zum Beispiel:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \times \frac{T_2}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} \times \frac{T_2}{T_1} \times p_1$$

und

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \times \frac{T_2}{p_2} = \frac{p_1}{p_2} \times \frac{T_2}{T_1} \times V_1 .$$

### Illustration 1.2: Die kombinierte Gasgleichung

Gegeben sei eine Gasprobe mit einem Ausgangsvolumen von  $15 \text{ cm}^3$ , die von  $25$  auf  $1000^\circ\text{C}$  erhitzt wurde und deren Druck von  $10,0$  auf  $150,0 \text{ kPa}$  erhöht wurde. Damit ergibt sich für das Endvolumen:

$$V_2 = \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\substack{10,0 \text{ kPa} \\ 150,0 \text{ kPa}}} \times \underbrace{\frac{T_2}{T_1}}_{\substack{(1000 + 273,15) \text{ K} \\ (25 + 273,15) \text{ K}}} \times \underbrace{V_1}_{15 \text{ cm}^3} \\ = 4,3 \text{ cm}^3 .$$

### Selbsttest 1.3

Berechnen Sie den Druck eines Gases, dessen Volumen von  $20$  auf  $10 \text{ dm}^3$  komprimiert wird, und das von  $100,0$  auf  $25^\circ\text{C}$  abgekühlt wird. Der Ausgangsdruck vor der Kompression betrage  $1 \text{ bar}$ .

[Antwort:  $1,60 \text{ bar}$ ]

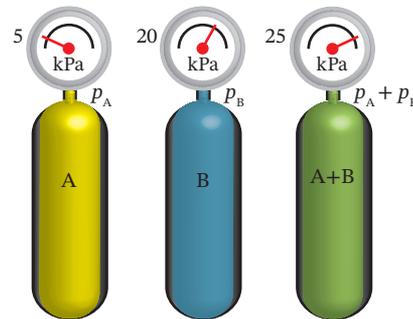
### 1.1.3 Mischungen von Gasen: Der Partialdruck

Im frühen neunzehnten Jahrhundert leitete John Dalton aus einer Reihe von Experimenten einen Zusammenhang ab, den wir als **Dalton'sches Gesetz** kennen:

*Der Druck einer Mischung idealer Gase entspricht der Summe der Drücke, den jedes Gas bei gleicher Temperatur allein in dem Gefäß ausüben würde:*

$$p = p_A + p_B + \dots \quad (1.11)$$

$p_J$  ist hierbei der Druck, den ein Gas  $J$  ( $J = A, B, \dots$ ) bei gleicher Temperatur ohne Vorhandensein der anderen Gase in dem Gefäß hervorrufen würde. Das Dalton'sche Gesetz gilt genau genommen nur für Mischungen idealer Gase und nur dann auch für Mischungen realer Gase, wenn die Drücke so niedrig sind, dass man ideales Verhalten annehmen kann. In



**Abb. 1.4** Die Partialdrücke  $p_A$  und  $p_B$  entsprechen den Drücken, die die beiden idealen Gase A und B jeweils einzeln im gleichen Gefäß (also bei gleichem Volumen) und bei gleicher Temperatur ausüben. Der Gesamtdruck einer Mischung aus A und B ergibt sich bei konstanter Temperatur aus der Summe der beiden Partialdrücke.

guter Näherung ist es jedoch in den meisten Fällen anwendbar. Abbildung 1.4 illustriert das Dalton'sche Gesetz.

Der **Partialdruck**  $p_J$  eines Gases (real oder ideal) ist definiert als

$$p_J = x_J \times p . \quad (1.12)$$

Die Größe  $x_J$  wird als **Stoffmengenanteil** (in der älteren Literatur auch als *Molenbruch*) bezeichnet. Der Stoffmengenanteil der Komponente  $J$  gibt das Verhältnis der Stoffmenge an Molekülen dieser Komponente zur Gesamtstoffmenge an. Wenn eine Mischung  $n_A$  Moleküle A,  $n_B$  Moleküle B usw. enthält, wobei  $n_J$  die Stoffmenge der Komponente  $J$  symbolisiert, dann beträgt der Stoffmengenanteil an  $J$  (mit  $J = A, B, \dots$ )

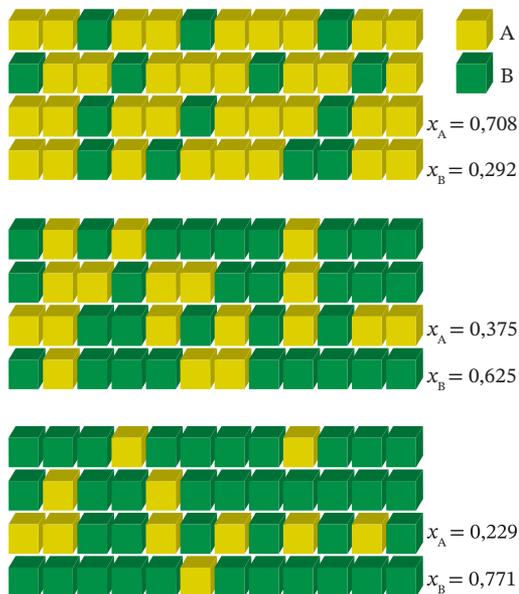
$$\begin{aligned} & \text{Stoffmengenanteil der Komponente } J \\ &= \frac{\text{Stoffmenge der Komponente } J}{\text{gesamte Stoffmenge aller Moleküle}} \quad (1.13a) \\ x_J &= \frac{n_J}{n} = \frac{n_J}{n_A + n_B + \dots} . \end{aligned}$$

Der Stoffmengenanteil ist eine dimensionslose Größe, da sich die Einheit Mol in Zähler und Nenner herauskürzt. Für eine **binäre Mischung** (eine Mischung aus zwei Komponenten) vereinfacht sich der allgemeine Ausdruck zu

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} , \quad x_B = \frac{n_B}{n_A + n_B} , \quad x_A + x_B = 1 . \quad (1.13b)$$

Ist nur Komponente A vorhanden, dann gilt  $x_A = 1$  und  $x_B = 0$ . Ist hingegen nur Komponente B vorhanden, dann gilt  $x_B = 1$  und  $x_A = 0$ . Wenn eine Mischung mit gleichen Stoffmengen an A und B vorliegt, gilt  $x_A = \frac{1}{2}$  und  $x_B = \frac{1}{2}$  (siehe Abb. 1.5).

## 12 | 1 Die Eigenschaften der Gase

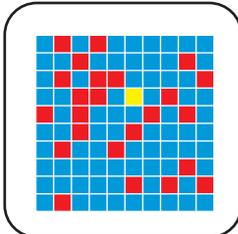


**Abb. 1.5** Stoffmengenanteile der Substanzen A und B in binären Mischungen verschiedener Zusammensetzung. Die einzelnen Felder (84 Quadrate) symbolisieren Mischungen aus insgesamt 48 Molekülen: Gelbe Quadrate stehen für ein einzelnes Molekül A, grüne Quadrate für ein einzelnes Molekül B.

### Beispiel 1.2: Berechnung von Partialdrücken

Eine Probe trockener Luft mit der Masse 100,0 g besteht zu 75,5 g aus  $N_2$ , zu 23,2 g aus  $O_2$  und zu 1,3 g aus Ar. Geben Sie die Stoffmengenanteile sowie die Partialdrücke der drei einzelnen Gase bei einem Luftdruck von 100 kPa an.

**Vorgehensweise** Um die Stoffmengenanteile berechnen zu können, müssen wir zunächst aus den Massen der einzelnen Gase die Stoffmengen (in mol) berechnen. Hierzu benötigen wir die Molmassen  $M_J$  für jede Substanz  $J$ , sowie den Zusammenhang  $n_J = m_J/M_J$ , wobei  $m_J$  die Masse der Substanz  $J$  in der Probe ist. Durch Einsetzen der Werte in Gl. (1.13a) lassen sich die Stoffmengenanteile berechnen, und mit diesen Werten können wir dann mithilfe von Gl. (1.12) die Partialdrücke berechnen.



**Lösung** Die Stoffmengen von  $N_2$ ,  $O_2$  und Ar betragen

$$n_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} = \frac{75,5 \text{ g}}{28,0 \text{ g mol}^{-1}} = 2,696 \dots \text{ mol}$$

$$n_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} = \frac{23,2 \text{ g}}{32,0 \text{ g mol}^{-1}} = 0,725 \dots \text{ mol}$$

$$n_{Ar} = \frac{m_{Ar}}{M_{Ar}} = \frac{1,3 \text{ g}}{39,9 \text{ g mol}^{-1}} = 0,032 \dots \text{ mol}$$

Die gesamte Stoffmenge  $n$  ist

$$n = 2,696 \dots \text{ mol} + 0,725 \dots \text{ mol} + 0,032 \dots \text{ mol} = 3,454 \dots \text{ mol} .$$

Der Stoffmengenanteil der  $N_2$ -Moleküle ist, gemäß Gl. (1.13a),

$$x_{N_2} = \frac{n_{N_2}}{n} = \frac{2,696 \dots \text{ mol}}{3,454 \dots \text{ mol}} = 0,781 .$$

Berechnet man diese Werte nun in gleicher Weise für die anderen beiden Komponenten, ergibt sich für  $O_2$  ein Stoffmengenanteil von 0,210 und für Ar 0,0094. Bei dem angegebenen Druck von 100 kPa folgt aus Gl. (1.12) ein Partialdruck für Stickstoff von

$$p_{N_2} = x_{N_2} \times p = 0,781 \times (100 \text{ kPa}) = 78,1 \text{ kPa} .$$

Für die anderen beiden Komponenten ergibt sich in analoger Weise

$$p_{O_2} = 21,0 \text{ kPa} \quad \text{und} \quad p_{Ar} = 0,94 \text{ kPa} .$$

Wenn wir ideales Verhalten voraussetzen, so würde jedes einzelne dieser Gase nach Überführung in einen Behälter gleicher Größe unter einem Druck stehen, der dem jeweils berechneten Partialdruck entspricht.

### Selbsttest 1.4

Der Partialdruck des Luftsauerstoffs spielt eine wichtige Rolle für den Sauerstoffgehalt und damit das Leben im Wasser sowie für die Absorption des Sauerstoffs durch das Blut beim Atmen. Berechnen Sie die Partialdrücke in einer Gasprobe, die aus 2,50 g Sauerstoff und 6,43 g Kohlendioxid bei einem Gesamtdruck von 88 kPa besteht.

[Antwort: 31 kPa, 57 kPa]

Für eine Mischung idealer Gase können wir den Partialdruck der Komponente  $J$  als ihren Beitrag zum Gesamtdruck identifizieren. Daher erhalten wir durch Einsetzen von  $p = nRT/V$  in Gl. (1.12)

$$p_J = x_J \times p = x_J \times \frac{nRT}{V} = \frac{n_J RT}{V} .$$

Somit erzeugt die Stoffmenge  $n_J$  der Komponente  $J$  in einem ansonsten leeren Gefäß den Druck  $p_J = n_J RT/V$ . Das bedeutet, dass der Partialdruck der Komponente  $J$  gemäß der Definition in Gl. (1.12) genau dem Druck des Gases  $J$  im Dalton'schen Gesetz entspricht, wenn sich alle Gase in der Mischung ideal verhalten. Auch wenn sich die Gase nicht ideal verhalten, sind deren Partialdrücke durch Gl. (1.12) gegeben. Diese Definition kann also auf alle Gase angewendet werden. Somit gilt auch für reale Gase, dass die Summe aller Partialdrücke dem Gesamtdruck entspricht, da die Summe aller Stoffmengenanteile den Wert 1 ergibt. Allerdings ist in diesem Fall der Partialdruck eines einzelnen Gases nicht mehr der Druck, den das Gas ohne das Vorhandensein der anderen Gase ausüben würde.

## Schlüsselkonzepte

1. Eine physikalische Größe bezeichnet man als **extensiv**, wenn ihr Wert der Summe der Einzelwerte entspricht, durch die sie geteilt werden kann. Anderenfalls handelt es sich um eine **intensiv** Größe.
2. Eine **Zustandsgleichung** ist eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen dem Druck, dem Volumen, der Temperatur und der Stoffmenge einer Substanz herstellt.
3. Die **Zustandsgleichung des idealen Gases**,  $pV = nRT$ , basiert auf dem Boyle'schen Gesetz ( $p \propto 1/V$ ), dem Charles'schen Gesetz ( $V \propto T$ ) und dem Avogadro'schen Prinzip ( $V \propto n$ ).
4. Das **Dalton'sche Gesetz** besagt, dass der Gesamtdruck einer Mischung idealer Gase der Summe der Drücke entspricht, den jedes Gas bei gleicher Temperatur allein in dem Gefäß ausüben würde.
5. Der **Partialdruck** eines Gases ist definiert als  $p_J = x_J \times p$ , wobei  $x_J$  der Stoffmengenanteil des Gases  $J$  in der Mischung und  $p$  der Gesamtdruck ist.

### Anwendung 1: Umweltwissenschaft – Die Bedeutung der Gasgesetze für das Wetter

Die Atmosphäre ist die mit Abstand größte Gasmenge, die uns zugänglich ist. Alle Bestandteile dieser Gas Mischung sind in Tab. A1 aufgeführt. Ihre Zusammensetzung wird innerhalb gewisser Grenzen durch Diffusion und Konvektion in Form von Winden (insbesondere von *Wirbeln*, also lokalen Turbulenzen) konstant gehalten. Druck und Temperatur hingegen hängen von der Höhe und von regionalen Einflüssen ab. Dies gilt besonders für die Troposphäre (die „Wetterschicht“), die un-

terste Schicht der Erdatmosphäre mit einer Höhe von etwa 11 km.

Auf Höhe des Meeresspiegels beträgt die Temperatur im Durchschnitt  $15^\circ\text{C}$ , in 11 km Höhe beim Übergang zur nächsthöheren Schicht der Atmosphäre, der Tropopause, ist sie bereits auf  $-57^\circ\text{C}$  gefallen. Wird die Temperatur in Kelvin angegeben, fällt diese Temperaturänderung weniger auf. Die Temperatur liegt zwischen 288 und 216 K, ihr Mittelwert beträgt 268 K. Wenn wir annehmen, dass über die gesamte Höhe der Troposphäre diese mittlere Temperatur herrscht, dann besteht folgender Zusammenhang zwischen dem Druck  $p$  und der Höhe  $h$ :

$$p = p_0 e^{-h/H}.$$

Diese Gleichung wird *barometrische Höhenformel* genannt.  $p_0$  bezeichnet den Druck auf Höhe des Meeresspiegels.  $H$  ist eine Konstante, die mit der mittleren Molmasse  $M$  und der durchschnittlichen Temperatur  $T$  über die Beziehung  $H = RT/Mg$  zusammenhängt. Der Wert von  $H$  beträgt ungefähr 8 km. Diese Formel berücksichtigt das Ergebnis des „Wettstreits“ zwischen der potenziellen Energie der Gasmoleküle im Schwerfeld der Erde und den Mischungseffekten, die durch thermische Bewegungen hervorgerufen werden; sie wurde auf Basis einer Boltzmann-Verteilung abgeleitet (siehe Einleitung dieser Anwendung, sowie Abschn. 12.1). Abbildung A1 zeigt, wie der Luftdruck gemäß der barome-

Tab. A1 Zusammensetzung der Erdatmosphäre.

Verbindung	Anteil in	
	Volumenprozent	Massenprozent
Stickstoff, N <sub>2</sub>	78,08	75,53
Sauerstoff, O <sub>2</sub>	20,95	23,14
Argon, Ar	0,93	1,28
Kohlendioxid, CO <sub>2</sub>	0,031	0,047
Wasserstoff, H <sub>2</sub>	$5,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-4}$
Neon, Ne	$1,8 \times 10^{-3}$	$1,3 \times 10^{-3}$
Helium, He	$5,2 \times 10^{-4}$	$7,2 \times 10^{-5}$
Methan, CH <sub>4</sub>	$2,0 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-4}$
Krypton, Kr	$1,1 \times 10^{-4}$	$3,2 \times 10^{-4}$
Stickstoffmonoxid, NO	$5,0 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{-6}$
Xenon, Xe	$8,7 \times 10^{-6}$	$3,9 \times 10^{-5}$
Ozon, O <sub>3</sub> : Sommer	$7,0 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{-5}$
Winter	$2,0 \times 10^{-6}$	$3,3 \times 10^{-6}$

## 14 | 1 Die Eigenschaften der Gase

trischen Höhenformel mit steigender Höhe abnimmt. Der Kurvenverlauf gibt die wirklichen Druckverhältnisse in der Atmosphäre recht gut wieder, selbst in Regionen deutlich oberhalb der Troposphäre. Die barometrische Höhenformel besagt, dass Druck und Dichte der Luft in einer Höhe  $h = H \times \ln(2)$  (etwa 6 km) halb so groß wie auf Höhe des Meeresspiegels sind.

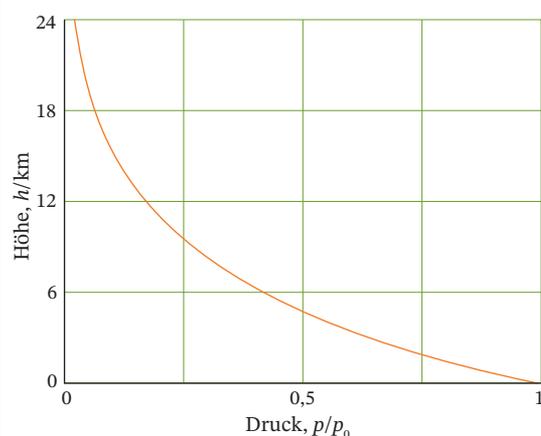


Abb. A1 Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe gemäß der barometrischen Höhenformel.

Regionale Veränderungen von Druck, Temperatur und Zusammensetzung in der Troposphäre bestimmen unser „Wetter“. Wir wollen im Folgenden einige typische Vorgänge betrachten, die zu diesen Änderungen beitragen. Heiße Luft hat bei gleichem Druck eine geringere Dichte als kalte Luft und steigt deshalb nach oben. Mit zunehmender Höhe nimmt der Druck ab und die Luft expandiert adiabatisch (d. h. ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung), so dass ihre Temperatur sinkt (siehe Abschn. 1.3.6). Da kalte Luft nicht so viel Wasser aufnehmen kann wie warme Luft, entstehen aus der überschüssigen Luftfeuchtigkeit Wolken. Eine starke Bewölkung kann also mit aufsteigender Luft, ein klarer Himmel oftmals mit absteigender Luft erklärt werden. Luftbewegungen in großer Höhe können dazu führen, dass die Zahl der Gasmoleküle pro Volumeneinheit in manchen Regionen über den durchschnittlichen Wert steigt, in anderen dafür unter diesen Wert fällt. Auf diese Weise entstehen Hochdruckgebiete („Hochs“ oder Antizyklonen) und Tiefdruckgebiete („Tiefs“ oder Zyklonen). Auf einer typischen Wetterkarte (siehe Abb. A2) werden die entsprechenden Gebiete mit den Buchstaben H und T bezeichnet. Die eingezeichneten Linien verbinden Orte, an denen der gleiche Druck herrscht, und werden *Isobaren* genannt. Die Regionen der Erde, in denen wir bevorzugt Hoch- oder Tiefdruckgebiete vorfinden, heißen *Hochdruckgürtel* bzw. *Tiefdruckrinnen*.

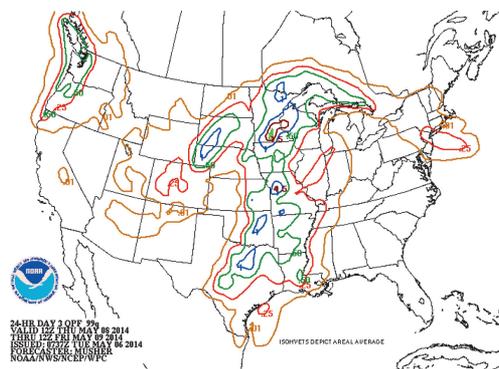


Abb. A2 Typische Wetterkarte am Beispiel des Festlands von Nordamerika vom 6. Mai 2014.

Horizontale Druckunterschiede verursachen Luftströme, die wir *Winde* nennen. Aufgrund der Rotation der Erde von Westen nach Osten werden Winde auf der nördlichen Erdhalbkugel nach rechts, auf der südlichen Erdhalbkugel hingegen nach links abgelenkt. In der Summe werden die Winde also nach Westen abgelenkt, während sie von Gebieten langsamer Rotation (an den Polen) in Richtung der Gebiete mit schnellerer Rotation (am Äquator) strömen. In großer Höhe bewegen Winde sich nahezu parallel zu den Isobaren. Die Tiefdruckgebiete liegen auf der Nordhalbkugel links, auf der Südhalbkugel rechts der Windrichtung (siehe Abb. A3). Nahe der Erdoberfläche sind die Windgeschwindigkeiten geringer. Daher verläuft die Windrichtung dort senkrecht zu den Isobaren vom Hoch- zum Tiefdruckgebiet. Die unterschiedlichen Windrichtungen führen dazu, dass die Luft auf der nördlichen Hemisphäre spiralförmig im Uhrzeigersinn aus einem Hoch heraus und gegen den Uhrzeigersinn in ein Tief hinein strömt.

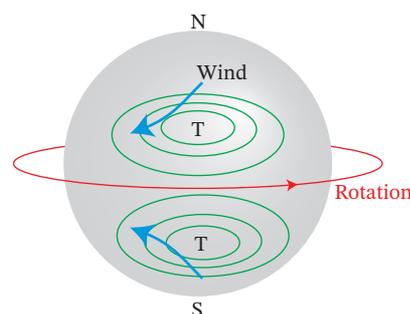


Abb. A3 Horizontale Strömungsrichtung der Luft relativ zu einem Tiefdruckgebiet auf der nördlichen und auf der südlichen Erdhalbkugel.

Der Gasverlust von Hochdruckgebieten durch Winde wird ausgeglichen, indem Luft in großer Höhe nachströmt und anschließend nach unten absinkt. Wir wissen bereits, dass dieser Vorgang für die Abnahme der Bewölkung bis hin zu einem wolkenlosen Himmel ver-

antwortlich ist. Ferner nehmen Dichte und Temperatur der Luft mit abnehmender Höhe zu. Aus diesem Grund sind Hochdruckgebiete mit hohen Temperaturen auf der Erdoberfläche verbunden. Im Winter kann es passieren, dass die kalte Luft nahe der Erdoberfläche ein komplettes Absinken der Luft aus großer Höhe verhindert. Dann befindet sich eine warme Luftschicht

über einer kalten Luftschicht. Wir sprechen in so einem Fall von einer *Inversionslage*. Auch an Orten mit einer besonderen geographischen Lage wie beispielsweise Los Angeles ist ein Luftaustausch unter Umständen nur eingeschränkt möglich. Dies kann zu einer Zunahme der Konzentration photochemischer Schadstoffe, auch *Smog* genannt, in der kalten Luftschicht führen.

## 1.2 Die kinetische Gastheorie

### Motivation

Eine wichtige Aufgabe in der Physikalischen Chemie ist die Entwicklung von strengen Theorien, die auch experimentell überprüfbare quantitative Aussagen erlauben, aus einfachen qualitativen Modellvorstellungen. Die kinetische Gastheorie ist ein exzellentes Beispiel für diese Vorgehensweise, und sie liefert darüber hinaus eine wichtige Erkenntnis für die Diskussion von Reaktionsgeschwindigkeiten in der Gasphase (siehe Abschn. 6.4).

### Schlüsselideen

Ein Gas besteht aus Molekülen von vernachlässigbar geringer Größe, die sich kontinuierlich und ungeordnet bewegen. Stoßen Moleküle zusammen, gehorchen diese Kollisionen den Gesetzen der klassischen Mechanik.

### Voraussetzungen

Sie sollten mit dem Verhalten idealer Gase vertraut sein, wie es durch das ideale Gasgesetz beschrieben wird (siehe Abschn. 1.1), sowie mit der Definition von Druck als eine Kraft, die auf eine Fläche wirkt. Diejenigen Gesetze der klassischen Mechanik, die Sie zum Verständnis benötigen, sind in „Toolkit 3: Impuls und Kraft“ angegeben, und die Eigenschaften von Exponentialfunktionen werden in „Toolkit 4: Exponential- und Gaußfunktionen“ beschrieben.

Die **kinetische Gastheorie** ist ein Beispiel dafür, wie aus Beobachtungen der Zustandsänderungen idealer Gase ein Modell abgeleitet werden kann, das Vorhersagen über das Verhalten der einzelnen Gasmoleküle zulässt. Die Theorie basiert auf drei Annahmen:

1. Ein Gas besteht aus Molekülen, die sich kontinuierlich und ungeordnet bewegen.

2. Die Größe eines Moleküls (der Moleküldurchmesser) ist vernachlässigbar gering im Vergleich zur Strecke, die im Mittel zwischen zwei Stößen zurückgelegt wird.
3. Die Moleküle wechselwirken nicht miteinander, außer bei elastischen Stößen.

Bei einem „elastischen“ Stoß bleibt die Translationsenergie der Moleküle vor und nach der Kollision unverändert (es wird also keine Energie zur Anregung von Vibrationen oder Rotationen verwendet). Sofern die Annahme zutrifft, dass zwei Moleküle, solange sie nicht zusammen stoßen, nicht miteinander wechselwirken, hat dies zur Konsequenz, dass die potenzielle Energie der Moleküle (ihre Lageenergie) nicht von ihren gegenseitigen Abständen abhängt. Sie kann daher gleich null gesetzt werden. Die Gesamtenergie einer Gasprobe ergibt sich aus der Summe der kinetischen Energien (der Bewegungsenergien) aller Moleküle. Daraus folgt, dass die Gesamtenergie eines Gases umso größer ist, je schneller sich die Moleküle bewegen, das heißt, je größer die Summe der kinetischen Energien aller Moleküle ist.

### 1.2.1 Der Druck eines Gases

Im Rahmen der kinetischen Gastheorie kann der konstante Druck eines Gases auf die Zusammenstöße der Moleküle mit der Gefäßwand zurückgeführt werden. Jeder Stoß ruft kurzzeitig eine Kraft auf die Wand hervor. Da jedoch viele Milliarden Stöße pro Sekunde stattfinden, wirkt im Grunde eine konstante Kraft auf die Wand. Daher übt das Gas auch einen konstanten Druck aus. Auf der Grundlage dieses Modells kann ein Zusammenhang zwischen Druck, Molmasse  $M$  und Volumen  $V$  eines Gases hergeleitet werden (siehe auch Herleitung 1.1):

$$p = \frac{nMc^2}{3V} . \quad (1.14)$$

$c$  ist die **quadratisch gemittelte Geschwindigkeit** der Moleküle. Diese Größe ist definiert als die Quadratwurzel aus dem Mittelwert der Quadrate der Geschwindigkeiten  $v$  der einzelnen Moleküle. Wenn also

## 16 | 1 Die Eigenschaften der Gase

ein Gas aus  $N$  Molekülen mit den Geschwindigkeiten  $v_1, v_2, \dots, v_N$  besteht, dann quadrieren wir alle Geschwindigkeiten, bilden die Summe über alle Quadrate und teilen diese Summe durch die Gesamtzahl aller Moleküle, um den Mittelwert (bezeichnet mit  $\langle \dots \rangle$ ) zu erhalten. Im letzten Schritt berechnen wir dann die Quadratwurzel des Mittelwerts:

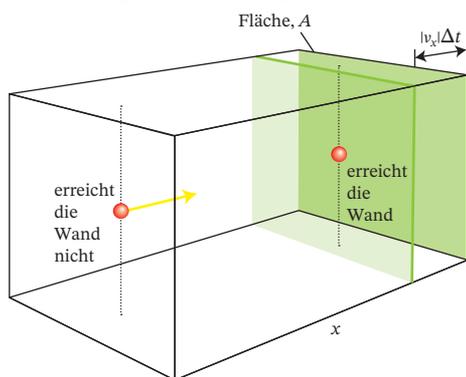
$$c = \langle v^2 \rangle^{1/2} = \left( \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} \right)^{1/2}. \quad (1.15)$$

**Herleitung 1.1: Die kinetische Gastheorie**

Die Entwicklung eines Modells besteht gewöhnlich aus einer Reihe von Schritten; jeder Schritt basiert auf einer klaren Vorstellung des zu Grunde liegenden physikalischen Bilds, in diesem Fall also auf der Vorstellung eines Gases als einer Ansammlung von Massenpunkten, die sich kontinuierlich und ungeordnet bewegen. Die entscheidenden quantitativen Beziehungen, die wir benötigen, sind die Gleichungen der klassischen Mechanik (siehe „Toolkit 3: Impuls und Kraft“).

**Schritt 1: Berechnung der Änderung des Impulses eines Teilchens beim Stoß auf die Wand.**

Betrachten wir zunächst die Anordnung in Abb. H1. Ein Teilchen mit der Masse  $m$  bewegt sich mit einer Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  parallel zur  $x$ -Achse ( $v_x > 0$  entspricht einer Bewegung nach rechts und  $v_x < 0$  einer Bewegung nach links). Wenn dieses Teilchen mit der rechten Wand zusammenstößt und dabei reflektiert wird, dann ändert sich dessen Impuls von  $+m|v_x|$  vor dem Stoß auf  $-m|v_x|$



**Abb. H1** Modell für die Berechnung des Drucks eines idealen Gases gemäß der kinetischen Gastheorie. Der Übersichtlichkeit halber ist hier nur die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit dargestellt (die beiden anderen Komponenten ändern sich nicht, wenn das Molekül mit der Wand zusammenstößt). Alle Moleküle innerhalb der schattierten Fläche erreichen die Wand im Zeitintervall  $\Delta t$ , wenn sie in Richtung Wand fliegen.

nach dem Stoß (wenn es sich mit der gleichen Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung bewegt). Die Betragsstriche bedeuten, dass das Vorzeichen des umschlossenen Wertes immer positiv ist, also z. B.  $|-3| = 3$ . Die  $x$ -Komponente des Impulses ändert sich daher bei jedem Stoß um  $2m|v_x|$  (die  $y$ - und die  $z$ -Komponente ändern sich nicht). Wenn nun in einem Zeitintervall  $\Delta t$  viele Moleküle mit der Wand zusammenstoßen, dann entspricht die Gesamtänderung des Impulses dem Produkt aus der Impulsänderung für ein einzelnes Molekül und der Anzahl der Moleküle, die die Wand innerhalb des Zeitintervalls erreichen.

**Schritt 2: Berechnung der Anzahl der Stöße auf die Wand im Zeitintervall  $\Delta t$ .**

Da ein Molekül mit der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  im Zeitintervall  $\Delta t$  eine Entfernung von  $|v_x|\Delta t$  parallel zur  $x$ -Achse zurücklegen kann, stoßen alle Moleküle innerhalb eines Abstands  $|v_x|\Delta t$  mit der Wand zusammen, vorausgesetzt, sie fliegen in Richtung Wand. Wenn die Wand die Fläche  $A$  hat, werden somit alle Teilchen im Volumen  $A \times |v_x|\Delta t$  die Wand erreichen (wenn sie in Richtung Wand fliegen). Die Teilchendichte, die Anzahl der Teilchen dividiert durch das Gesamtvolumen, beträgt  $nN_A/V$  ( $n$  ist die Gesamtstoffmenge aller Moleküle im Behälter,  $V$  ist das Volumen des Behälters und  $N_A$  ist die Avogadro-Konstante). Daher ergibt sich die Anzahl der Moleküle im Volumen  $A|v_x|\Delta t$  zu  $(nN_A/V) \times A|v_x|\Delta t$ . Zu jedem Zeitpunkt bewegt sich die eine Hälfte der Teilchen von links nach rechts und die andere Hälfte von rechts nach links, so dass die mittlere Stoßzahl auf die Wand im Zeitintervall  $\Delta t$  durch den Ausdruck  $\frac{1}{2}nN_A A|v_x|\Delta t/V$  gegeben ist.

**Schritt 3: Berechnung der Kraft, die im Zeitintervall  $\Delta t$  auf die Wand ausgeübt wird.**

Die Gesamtänderung des Impulses im Zeitintervall  $\Delta t$  ergibt sich aus dem Produkt der Zahl der Stöße auf die Wand und der Impulsänderung  $2m|v_x|$  für ein einzelnes Molekül:

$$\begin{aligned} \text{Impulsänderung} &= \overbrace{\frac{nN_A A|v_x|\Delta t}{2V}}^{\text{Anzahl der Stöße}} \times \overbrace{2m|v_x|}^{\text{Impulsänderung bei einem Stoß}} \\ &= \frac{\overbrace{n m N_A A v_x^2 \Delta t}^M}{V} = \frac{n M A v_x^2 \Delta t}{V}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Beziehung  $M = mN_A$  verwendet. Nun können wir die Kraft als zeitliche

Änderung des Impulses berechnen:

$$\text{Kraft} = \frac{\text{Impulsänderung}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{nMAv_x^2}{V}.$$

**Schritt 4:** Berechnung des Drucks, der durch diese Kraft auf die Wand ausgeübt wird.

Somit ergibt sich der Druck als Quotient aus Kraft und Fläche (also nach Division durch  $A$ ) zu

$$\text{Druck} = \frac{nMv_x^2}{V}.$$

Da sich nicht alle Moleküle mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen, entspricht der messbare Druck  $p$  dem Mittelwert dieser Größe (bezeichnet mit  $\langle \dots \rangle$ ). Somit gilt

$$p = \frac{nM \langle v_x^2 \rangle}{V}.$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen dem Druck und der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit  $c$  ableiten. Für die Geschwindigkeit  $v$  eines einzelnen Moleküls gilt  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Da die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit als  $c = \langle v^2 \rangle^{1/2}$  definiert ist (siehe Gl. (1.15)), ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} c^2 &= \langle v^2 \rangle \\ &= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle. \end{aligned}$$

Da sich die Moleküle aber völlig regellos bewegen, sind alle drei Mittelwerte identisch. Somit gilt  $c^2 = 3\langle v_x^2 \rangle$  beziehungsweise  $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}c^2$ . Gleichung (1.14) ergibt sich nun unmittelbar, wenn wir diese Beziehung in  $p = nM\langle v_x^2 \rangle/V$  einsetzen.

### Toolkit 3: Impuls und Kraft

Die **Geschwindigkeit**  $v$  eines Teilchens ist definiert als die Änderung der Position pro Zeit. Die **gerichtete Geschwindigkeit**  $\mathbf{v}$  (engl.: „velocity“) ist eine vektorielle Größe, und besitzt somit sowohl einen Betrag als auch eine Richtung. Teilchen können sich im dreidimensionalen Raum durchaus mit derselben Geschwindigkeit, jedoch in unterschiedliche Richtungen bewegen. Die gerichtete Geschwindigkeit kann als Vektorpfeil dargestellt werden, wobei der Betrag (die „Länge“) des Vektors die Geschwindigkeit  $v$ , und die Richtungskomponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  die Vektorkoor-

dinaten entlang der jeweiligen Raumachse bezeichnen (Abb. T1). Dabei handelt es sich um gerichtete Komponenten:  $v_x = +5 \text{ m s}^{-1}$  bedeutet, dass sich ein Körper entlang der  $x$ -Achse („nach rechts“) bewegt, wohingegen  $v_x = -5 \text{ m s}^{-1}$  bedeutet, dass sich der Körper in die entgegengesetzte Richtung („nach links“) bewegt. Die „Länge“ des Vektorpfeils (die Geschwindigkeit  $v$ ) gehorcht dabei dem Satz des Pythagoras, d. h. der Betrag der Hypotenuse ergibt sich aus dem Quadrat der einzelnen Komponenten des Vektors gemäß:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

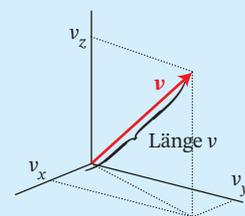


Abb. T1

Die Konzepte der klassischen Mechanik finden ihren Ausdruck in der Definition des **Impulses**  $\mathbf{p}$  eines Teilchens, der definiert ist als

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Der Impuls berücksichtigt also ebenfalls die Geschwindigkeit als vektorielle Größe (mit Ausbreitungsrichtung). Teilchen derselben Masse, die sich mit identischer Geschwindigkeit  $v$  bewegen, jedoch in unterschiedliche Raumrichtungen, besitzen also auch unterschiedliche Impulse.

Die **Beschleunigung**  $\mathbf{a}$  (engl.: „acceleration“) ist die Änderung der (gerichteten) Geschwindigkeit pro Zeit. Ein Teilchen beschleunigt, wenn sich die Geschwindigkeit seiner Bewegung erhöht. Ebenso spricht man von einer Beschleunigung des Teilchens, wenn der Betrag seiner Geschwindigkeit zwar unverändert bleibt, sich jedoch seine Bewegungsrichtung ändert.

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist die Beschleunigung eines Teilchens der Masse  $m$  proportional zu der Kraft, die auf das Teilchen wirkt:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Da  $m\mathbf{v}$  der Impuls ist, und  $\mathbf{a}$  die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, entspricht  $m\mathbf{a}$  der zeitlichen Änderung des Impulses. Anders formuliert können wir also feststellen, dass die Kraft, die auf ein beschleunigtes Teilchen wirkt, gleich der Änderungsrate des Impulses ist. Das zweite Newton'sche Axiom zeigt, dass die Beschleunigung in derselben Raumrichtung verläuft wie

die Kraft, die auf ein Teilchen wirkt. In einem isolierten System, auf das keine externen Kräfte einwirken, findet also keinerlei Beschleunigung statt. Diese Feststellung ist nichts anderes als der **Impulserhaltungssatz**: der Impuls eines Teilchens bleibt konstant erhalten, solange keine (externe) Kraft auf ihn einwirkt.

Auf den ersten Blick scheint die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit ein eher sonderbares Maß für die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle zu sein. Die Bedeutung dieser Größe wird jedoch klar, wenn wir den Zusammenhang zwischen der Masse  $m$ , der Geschwindigkeit  $v$  und der kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  eines Moleküls betrachten:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ . Das bedeutet, dass die mittlere kinetische Energie  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ , der Mittelwert der kinetischen Energien aller Moleküle, durch den Ausdruck  $\frac{1}{2}mc^2$  gegeben ist. Daraus folgt unmittelbar

$$c = \left( \frac{2\langle E_{\text{kin}} \rangle}{m} \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Das bedeutet, dass  $c$  als Maß für die mittlere kinetische Energie der Gasmoleküle verstanden werden kann. Ein etwas anschaulicheres Maß für die Geschwindigkeiten auf molekularer Ebene ist die **mittlere Geschwindigkeit**  $\bar{c}$  der Moleküle:

$$\bar{c} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_N}{N}. \quad (1.17)$$

Für eine sehr große Zahl an Molekülen ist die mittlere Geschwindigkeit etwas kleiner als die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit. Der exakte Zusammenhang lautet

$$\bar{c} = \left( \frac{8}{3\pi} \right)^{1/2} c \approx 0,921c. \quad (1.18)$$

Für einfache Abschätzungen oder qualitative Betrachtungen können wir beide Größen als Maß für die durchschnittliche Geschwindigkeit verwenden. Für genaue quantitative Berechnungen hingegen müssen wir streng zwischen quadratisch gemittelter und mittlerer Geschwindigkeit unterscheiden.

### Illustration 1.3: Quadratisch gemittelte Werte

Bei einer Radarkontrolle wurden folgende Geschwindigkeiten gemessen: 45,0 (5), 47,0 (7), 50,0 (9), 53,0 (4), 57,0 (1) km h<sup>-1</sup>. Die Zahl der Autos mit der jeweiligen Geschwindigkeit ist in Klammern angegeben. Die *quadratisch gemittelte Geschwindigkeit*  $c$

der Autos ist gemäß Gl. (1.15) gegeben:

$$c = \left\{ \frac{5 \times (45,0 \text{ km h}^{-1})^2 + 7 \times (47,0 \text{ km h}^{-1})^2 + \dots + 5 \times (57,0 \text{ km h}^{-1})^2}{5 + 7 + \dots + 5} \right\}^{1/2} = 50,2 \text{ km h}^{-1}$$

### Selbsttest 1.5

Berechnen Sie die *mittlere Geschwindigkeit*  $\bar{c}$  der Autos (nach Gl. (1.18)).

[Antwort: 46,2 km h<sup>-1</sup>]

### 1.2.2 Die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle

Wir formen nun Gl. (1.14) so um, dass die Ähnlichkeit zur Zustandsgleichung des idealen Gases ( $pV = nRT$ ) ersichtlich ist:

$$pV = \frac{1}{3}nMc^2. \quad (1.19)$$

Wir wollen nun annehmen, dass die aus der kinetischen Gastheorie abgeleitete Gl. (1.14) tatsächlich die Zustandsgleichung des idealen Gases ist. Dann können wir die rechte Seite dieser Gleichung mit  $nRT$  gleichsetzen und erhalten

$$\frac{1}{3}nMc^2 = nRT.$$

Nach Division durch  $n$  auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich unmittelbar

$$\frac{1}{3}Mc^2 = RT.$$

Diese Beziehung ist sehr nützlich, denn wir können nun einen Ausdruck für die **quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Gasmoleküle** in Abhängigkeit von der Temperatur und der Molmasse des Gases angeben, indem wir zunächst  $c = 3RT/M$  berücksichtigen und auf beiden Seiten die Quadratwurzel ziehen:

$$c = \left( \frac{3RT}{M} \right)^{1/2}. \quad (1.20a)$$

Kombinieren wir diesen Ausdruck mit Gl. (1.18), erhalten wir für die **mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle**

$$\bar{c} = \left( \frac{8}{3\pi} \right)^{1/2} \times \left( \frac{3RT}{M} \right)^{1/2} = \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{1/2}. \quad (1.20b)$$

**Illustration 1.4: Die quadratisch gemittelte und die mittlere Geschwindigkeit von Molekülen**

Setzt man in Gl. (1.20a) die Molmasse von  $\text{O}_2$  ( $32,0 \text{ g mol}^{-1}$ , entspricht  $3,20 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$  in SI-Basiseinheiten) und eine Temperatur von  $298 \text{ K}$  ( $25^\circ\text{C}$ ) ein, so ergibt sich eine quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von

$$c_{\text{O}_2} = \left\{ \frac{\overbrace{3 \times 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}^R \times \overbrace{298 \text{ K}}^T}{\underbrace{3,20 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}}_M} \right\}^{1/2}$$

$$= 482 \text{ m s}^{-1}.$$

Um die Einheiten einfacher kürzen zu können, wurde hierbei  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$  berücksichtigt, und  $M$  wurde in SI-Basiseinheiten angegeben. Dieses Vorgehen ist häufig hilfreich zur einfacheren Berechnung der Werte. Für die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich nach Gl. (1.18)

$$\bar{c}_{\text{O}_2} = 0,921 \times 482 \text{ m s}^{-1} = 444 \text{ m s}^{-1}.$$

Eine analoge Berechnung der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit von  $\text{N}_2$  ergibt  $c = 515 \text{ m s}^{-1}$ . Die Schallgeschwindigkeit in Luft hat einen vergleichbar großen Wert ( $346 \text{ m s}^{-1}$  bei  $25^\circ\text{C}$ ). Dieser Sachverhalt ist leicht zu verstehen, denn Schallwellen sind Druckänderungen, die durch Molekülbewegungen übertragen werden. Daher können wir erwarten, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schallwelle ungefähr der mittleren Molekülgeschwindigkeit entspricht, die sie benötigen, um dabei ihre Position zu verändern.

**Selbsttest 1.6**

Berechnen Sie die *quadratisch gemittelte Geschwindigkeit*  $c$  von  $\text{H}_2$  bei  $25^\circ\text{C}$ .

[Antwort:  $1920 \text{ m s}^{-1}$ ]

Aus den Gln. (1.20a) und (1.20b) kann ein wichtiger Zusammenhang abgeleitet werden:

*Sowohl die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit als auch die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle sind zur Quadratwurzel der Temperatur proportional.*

Daher führt eine Verdopplung der Temperatur (auf der Kelvin-Skala) zu einer Erhöhung der mittleren und quadratisch gemittelten Geschwindigkeit um jeweils den Faktor  $2^{1/2} = 1,414$ .

**Illustration 1.5: Einfluss der Temperatur auf die Geschwindigkeit von Molekülen**

Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von Molekülen sei bezeichnet mit  $c(T)$ . Die Abkühlung der Luft von  $25^\circ\text{C}$  ( $298 \text{ K}$ ) auf  $0^\circ\text{C}$  ( $273 \text{ K}$ ) verringert die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle um den Faktor

$$\frac{c(273 \text{ K})}{c(298 \text{ K})} = \left( \frac{273 \text{ K}}{298 \text{ K}} \right)^{1/2} = 0,957, \quad \text{mit } c \propto T^{1/2}.$$

An einem kalten Tag ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Luftmoleküle etwa 4 % geringer als an einem warmen Tag.

**Selbsttest 1.7**

Um welchen Faktor ändert sich die mittlere Geschwindigkeit der Luftmoleküle?

[Antwort: um denselben Faktor 0,957]

**1.2.3 Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung**

Bisher haben wir uns nur mit der *mittleren* Geschwindigkeit der Moleküle in einem Gas befasst. Die Moleküle bewegen sich jedoch nicht alle mit der gleichen Geschwindigkeit: Manche besitzen eine geringere als die durchschnittliche Geschwindigkeit, während sich andere kurzzeitig deutlich schneller bewegen. Stöße der Moleküle untereinander führen gewöhnlich zu Änderungen der einzelnen Geschwindigkeiten. So kann ein langsames Molekül durch einen Zusammenstoß mit einem schnellen Molekül deutlich an Geschwindigkeit gewinnen, während das schnellere Molekül abgebremst wird. Die Vielzahl der Stöße bewirkt eine ständige Umverteilung der Geschwindigkeiten, denn jedes Molekül in einem Gas stößt unter Normalbedingungen etwa einmal pro Nanosekunde ( $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ) auf ein anderes Molekül.

Der mathematische Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit  $P$  (engl.: „probability“), die uns den Anteil der Moleküle in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich angibt, wird **Geschwindigkeitsverteilung** genannt. So können wir ausrechnen, dass bei  $20^\circ\text{C}$  von 1000  $\text{O}_2$ -Molekülen 19 Moleküle eine Geschwindigkeit zwischen  $300$  und  $310 \text{ m s}^{-1}$  besitzen ( $P = 19/1000 = 0,019$ ) und 21 Moleküle eine Geschwindigkeit zwischen  $400$  und  $410 \text{ m s}^{-1}$  ( $P = 21/1000 = 0,021$ ). Die genaue Form der Verteilung wurde von James Clerk Maxwell gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts abgeleitet und wird deshalb **Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung** (auch *Max-*

## 20 | 1 Die Eigenschaften der Gase

well-Boltzmann-Verteilung) genannt. Der mathematische Ausdruck, der den Anteil  $P$  aller Moleküle in einem schmalen Geschwindigkeitsbereich zwischen  $v$  und  $v + \Delta v$  angibt (zum Beispiel zwischen 300 und 310  $\text{m s}^{-1}$ , entsprechend  $v = 300 \text{ m s}^{-1}$  und  $\Delta v = 10 \text{ m s}^{-1}$ ), lautet

$$P(v, v + \Delta v) = \rho(v)\Delta v \quad \text{mit}$$

$$\rho(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/(2RT)}. \quad (1.21a)$$

$\rho$  ist der griechische Buchstabe Rho. Die oben angegebenen Werte wurden mithilfe von Gl. (1.21a) berechnet. Einen Überblick zu Exponentialfunktionen finden Sie in „Toolkit 4: Exponential- und Gaußfunktionen“.

**Toolkit 4: Exponential- und Gaußfunktionen**

Eine **Exponentialfunktion** der Form  $e^{-ax}$  hat an der Stelle  $x = 0$  den Wert 1. Mit zunehmendem  $x$  nimmt der Funktionswert immer weiter ab und geht im Grenzfall  $x \rightarrow \infty$  gegen null. Diese Funktion geht mit zunehmendem  $x$  umso schneller gegen null, je größer der Wert von  $a$  ist.

Die Exponentialfunktion  $e^{-ax^2}$  wird auch **Gaußfunktion** genannt. Auch diese Funktion hat an der Stelle  $x = 0$  den Wert 1 und geht mit zunehmendem  $x$  gegen null. Im Vergleich zur Funktion  $e^{-ax}$  nimmt die Gaußfunktion bei kleinen  $x$ -Werten langsamer und bei größeren  $x$ -Werten schneller ab.

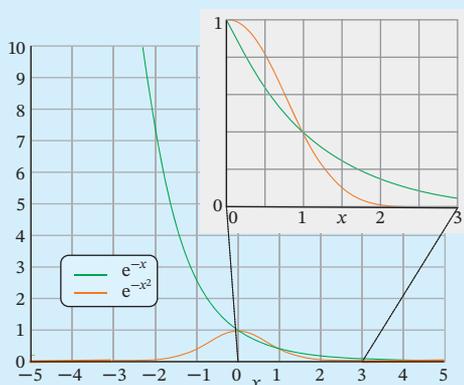


Abb. T1

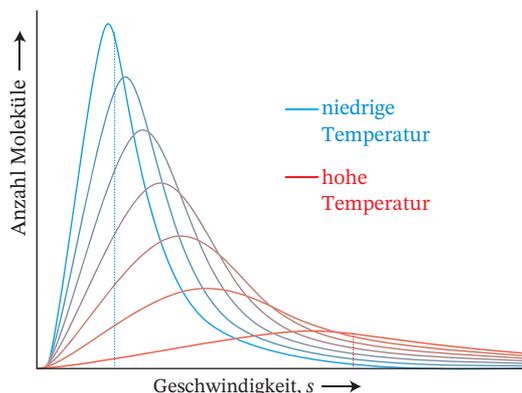
In Abb. T1 sind die Kurvenverläufe beider Funktionstypen dargestellt, und auch ihr Verhalten bei negativen Werten für  $x$  ist gezeigt. Beide Funktionen haben an der Stelle  $x = 0$  den Wert 1, die Exponentialfunktion geht jedoch für  $x \rightarrow -\infty$  gegen unendlich. Die Gaußfunktion verläuft in ihrem Maximum bei  $x = 0$  symmetrisch zur  $x$ -Achse und nähert sich dann schnell dem Wert null an für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Beachten Sie, dass die Funktion  $\rho(v)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, nicht die Wahrscheinlichkeit selbst. Die Wahrscheinlichkeit, mit der Moleküle eine Geschwindigkeit besitzen, die im Bereich  $v$  bis  $v + \Delta v$  liegt, ist gegeben durch das Produkt aus  $\rho(v)$  und des Betrages von  $\Delta v$ . Streng genommen ist Gl. (1.21a) nur dann gültig, wenn der Geschwindigkeitsbereich  $\Delta v$  unendlich klein gewählt wird, geschrieben als *Differenzial*  $dv$ , denn nur in diesem Fall kann  $\rho(v)$  im untersuchten Bereich als konstant angesehen werden. Daher lautet die formale mathematische Schreibweise von Gl. (1.21a)

$$P(v, v + dv) = \rho(v) dv. \quad (1.21b)$$

Obwohl Gl. (1.21a) kompliziert erscheint, kann man einige wichtige Merkmale doch relativ leicht erkennen. In der Physikalischen Chemie müssen wir in der Lage sein, den Sinngehalt einer Formel zu erfassen. Die Fähigkeit, qualitative und quantitative Zusammenhänge aus einer mathematischen Formel abzulesen, ist wesentlich wichtiger als die bloße Kenntnis der Formel selbst. In diesem Sinn wollen wir Gl. (1.21a) Schritt für Schritt analysieren.

- Da  $P(v, v + \Delta v)$  proportional zum betrachteten Geschwindigkeitsbereich  $\Delta v$  ist, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Geschwindigkeit innerhalb dieses Bereiches liegt, mit dem Betrag von  $\Delta v$  an. Wenn wir also den Bereich  $\Delta v$  um eine Geschwindigkeit herum verdoppeln (wobei er aber stets schmal bleiben muss), verdoppelt sich auch der Anteil der Moleküle, die in diesem Geschwindigkeitsbereich liegen.
- Gleichung (1.21a) enthält als Faktor die abfallende Exponentialfunktion  $e^{-Mv^2/2RT}$ . Als Konsequenz muss der Anteil der Moleküle mit extrem großer Geschwindigkeit sehr klein sein, da die Funktion  $e^{-ax^2}$  für große Werte von  $ax^2$  sehr klein wird.
- Der Faktor  $M/2RT$  im Exponenten von  $e^{-Mv^2/2RT}$  ist groß für Gase mit einer großen Molmasse  $M$ , und für große Werte von  $M$  geht die Exponentialfunktion schneller gegen null. Daher ist es unwahrscheinlich, schwere Moleküle mit einer sehr hohen Geschwindigkeit zu finden.
- Das Gegenteil ist der Fall, wenn eine hohe Temperatur  $T$  herrscht: Dann ist der Faktor  $M/2RT$  im Exponenten klein, was zu einem relativ langsamen Abfall der Exponentialfunktion gegen null mit steigendem  $v$  führt. Das bedeutet, dass wir bei höherer Temperatur auch einen größeren Anteil sehr schneller Moleküle erwarten können.
- Der Faktor  $v^2$  vor der Exponentialfunktion geht für abnehmende Werte von  $v$  gegen null. Daher wird



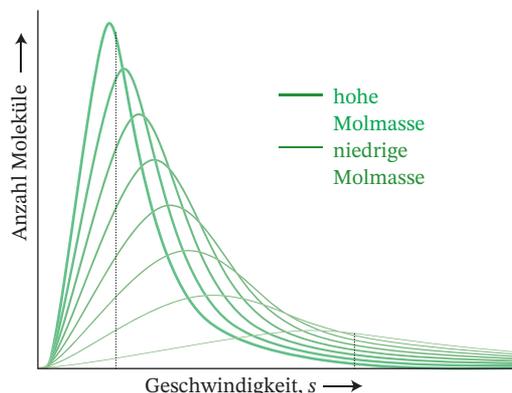
**Abb. 1.6** Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung für Gase mit gleicher Molmasse bei unterschiedlichen Temperaturen. Mit steigender Temperatur wächst die Breite der Verteilung, zudem wird die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit, deren Wert für zwei Fälle durch die Lage der vertikalen Linie angezeigt wird, zu höheren Werten hin verschoben.

stets nur ein sehr kleiner Anteil der Moleküle eine sehr geringe Geschwindigkeit besitzen.

- Die restlichen Faktoren in Gl. (1.21a) (der Klammerausdruck sowie der Faktor  $4\pi$ ) sorgen dafür, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül mit einer beliebigen Geschwindigkeit im gesamten Geschwindigkeitsbereich von null bis unendlich zu finden, gleich 1 ist.

In Abb. 1.6 sind die Maxwell'schen Verteilungen für ein bestimmtes Gas (also für eine konstante Molmasse  $M$ ) bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Wir sehen, dass sich nur ein geringer Anteil aller Moleküle mit sehr kleiner oder sehr großer Geschwindigkeit bewegt, wie wir bereits aus Gl. (1.21a) folgern konnten. Ferner können wir erkennen, dass mit steigender Temperatur der Anteil an Molekülen mit sehr großen Geschwindigkeiten deutlich zunimmt und dass der abfallende Teil der Verteilung zu höheren Geschwindigkeiten hin verschoben ist. Dieser Zusammenhang spielt eine wichtige Rolle für die Geschwindigkeit chemischer Reaktionen in der Gasphase (siehe Abschn. 6.4), denn es hängt auch von den Energien (und damit den Geschwindigkeiten) der Moleküle ab, ob ein Zusammenstoß zu einer Reaktion führt.

Abbildung 1.7 zeigt die Maxwell'schen Verteilungen für Gase mit unterschiedlichen Molmassen bei konstanter Temperatur. Wir sehen, dass sich schwere Moleküle bei gleicher Temperatur im Durchschnitt mit geringeren Geschwindigkeiten fortbewegen als leichte Moleküle. Weiterhin ist die Verteilung für schwere Moleküle merklich schmaler, was dazu führt, dass die Geschwindigkeiten der allermeisten Moleküle nahe bei der mittleren Geschwindigkeit liegen. Im Gegensatz dazu besitzen leichte Moleküle (wie etwa  $H_2$ ) eine



**Abb. 1.7** Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung für Gase mit unterschiedlichen Molmassen bei konstanter Temperatur. Für Gase mit geringer Molmasse liegt eine breite Geschwindigkeitsverteilung vor, so dass sich ein bedeutender Anteil aller Moleküle mit einer viel größeren als der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit bewegt. Für Gase mit hoher Molmasse hingegen ist die Verteilung der Geschwindigkeiten deutlich schmaler, so dass die Geschwindigkeit eines sehr großen Teils aller Moleküle nahe bei der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit liegt, deren Werte für zwei Fälle durch die vertikalen Linien angezeigt werden.

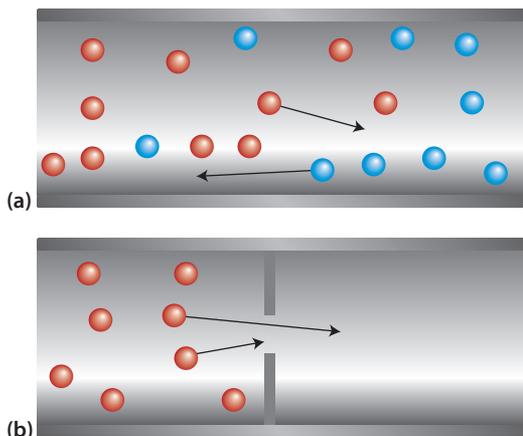
hohe mittlere Geschwindigkeit, und die Verteilung ihrer Geschwindigkeiten ist sehr breit: Viele Moleküle bewegen sich deutlich schneller als der Durchschnitt, viele aber auch deutlich langsamer. Diese Tatsache ist von Bedeutung für die Zusammensetzung der Atmosphäre von Planeten, denn ein signifikanter Teil aller leichten Moleküle besitzt eine genügend hohe Geschwindigkeit, um der Gravitationsanziehung zu entfliehen. Das ist einer der Gründe für den geringen Anteil an Wasserstoff ( $H_2$ , Molmasse  $M = 2,02 \text{ g mol}^{-1}$ ) und Helium ( $He$ ,  $M = 4,00 \text{ g mol}^{-1}$ ) in der Erdatmosphäre.

#### 1.2.4 Diffusion und Effusion

Als **Diffusion** bezeichnen wir einen Vorgang, bei dem sich die Moleküle unterschiedlicher Stoffe im Laufe der Zeit aufgrund ihrer Eigenbewegung vermischen, und zwar ohne mechanische Einwirkung (z. B. durch Rühren). Wenn zwei Festkörper Kontakt untereinander haben, diffundieren die Atome des einen Festkörpers in den anderen und umgekehrt, allerdings nur äußerst langsam. Die Diffusion der Atome eines festen Stoffs in ein flüssiges Lösungsmittel geht deutlich schneller vonstatten, muss jedoch oft durch Umrühren oder Schütteln beschleunigt werden (dann handelt es sich aber nicht mehr um eine reine Diffusion). Mit Abstand am schnellsten findet Diffusion von Gasen statt. Das erklärt die weitgehend einheitliche Zusammensetzung der Atmosphäre. Gase werden aus ei-

## 22 | 1 Die Eigenschaften der Gase

ner Vielzahl örtlich begrenzter Quellen an die Atmosphäre abgegeben. Die Gasmoleküle diffundieren von der Quelle weg und verteilen sich im Laufe der Zeit in der Umgebung. Im Allgemeinen wird der Vermischungsprozess durch Luftbewegungen beschleunigt. Das Entweichen eines Gases aus einem Gefäß durch ein kleines Loch, zum Beispiel aus einem Reifen oder einem aufgeblasenen Ballon, bezeichnet man als **Effusion** (siehe Abb. 1.8).



**Abb. 1.8** (a) Der Begriff Diffusion bezeichnet die Ausbreitung von Molekülen einer Substanz in einen Raum, der ursprünglich von einer anderen Substanz eingenommen wurde. Durch die Bewegung der Moleküle beider Substanzen diffundiert jede Substanz in die jeweils andere hinein. (b) Der Begriff Effusion bezeichnet das Entweichen von Molekülen aus einem Gefäß durch ein kleines Loch.

Die Diffusions- und Effusionsraten von Gasen nehmen mit steigender Temperatur zu, denn beide Prozesse werden durch Molekülbewegungen hervorgerufen. Aus dem gleichen Grund steigt die Geschwindigkeit beider Prozesse mit abnehmender Molmasse der Gase an. Eine einfache mathematische Abhängigkeit von der Molmasse finden wir aber nur für die Effusionsrate, da bei der Effusion im Normalfall nur eine Molekülsorte betrachtet wird, während an einer diffusionsbedingten Vermischung mindestens zwei unterschiedliche Gase beteiligt sind. Mit der Diffusion werden wir uns erst in Abschn. 6.7 eingehender befassen.

Aus experimentellen Beobachtungen zur Abhängigkeit der Effusionsrate eines Gases von seiner Molmasse leitete Thomas Graham 1833 das **Graham'sche Effusionsgesetz** ab:

*Bei konstantem Druck und konstanter Temperatur ist die Effusionsrate eines Gases umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Molmasse des Gases:*

$$\text{Effusionsrate} \propto \frac{1}{M^{1/2}}. \quad (1.22)$$

Die Effusionsrate entspricht der Anzahl an Molekülen (der Stoffmenge in mol), die pro Sekunde aus dem Gefäß entweicht, und sie ist proportional zur Fläche der Öffnung, durch die die Moleküle entweichen: im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Fläche der Öffnungen grundsätzlich identisch ist, wenn wir zwei Effusionsraten miteinander vergleichen.

**Illustration 1.6: Das Graham'sche Effusionsgesetz**

Das Verhältnis der Effusionsraten von molekularem Wasserstoff (Molmasse  $M = 2,016 \text{ g mol}^{-1}$ ) und Kohlendioxid ( $M = 44,01 \text{ g mol}^{-1}$ ) beträgt unter der Voraussetzung, dass beide Gase den gleichen Druck und die gleiche Temperatur aufweisen,

$$\begin{aligned} \frac{\text{Effusionsrate von H}_2}{\text{Effusionsrate von CO}_2} &= \left( \frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{H}_2}} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{44,01 \text{ g mol}^{-1}}{2,016 \text{ g mol}^{-1}} \right)^{1/2} \\ &= 4,672. \end{aligned}$$

Die *Masse* des im gleichen Zeitraum aus dem Gefäß entweichenden Kohlendioxids ist größer als die Masse des entweichenden Wasserstoffs, denn obwohl etwa fünfmal so viele Wasserstoffmoleküle pro Zeiteinheit das Gefäß verlassen, ist die Masse eines Moleküls Kohlendioxid mehr als zwanzigmal so groß ist wie die eines Wasserstoffmoleküls.

**Hinweis** Wenn Sie nur den Begriff *Rate* verwenden, sollten Sie stets angeben, welche Größe sich zeitlich ändert, denn der Begriff *Rate* allein ist nicht eindeutig. In diesem Fall handelt es sich um eine Änderung der Stoffmenge beziehungsweise der Zahl der Moleküle. Der Begriff *Effusionsrate* bezeichnet genau diese Größe.

**Selbsttest 1.8**

Nehmen Sie an, dass 5,0 g Argon durch Effusion entweichen. Welche Masse Stickstoff würde unter denselben Bedingungen entweichen?

[Antwort: 4,2 g]

Die hohe Effusionsrate von Gasen mit einer sehr kleinen Molmasse wie Wasserstoff und Helium ist der Grund dafür, warum diese sehr leicht durch poröse Gefäßwände (zum Beispiel aus Gummi) entweichen. Die unterschiedlichen Effusionsraten durch poröse Barrieren macht man sich auch bei der Herstellung von Kernbrennstäben aus Uran zu Nutze, bei der das seltenere, spaltbare Isotop  $^{235}\text{U}$  (Anteil 0,720 %) vom wesentlich häufigeren  $^{238}\text{U}$  getrennt wird. Dabei

wird das Uran in die leicht flüchtige, feste Verbindung Uranhexafluorid überführt. Die unterschiedlichen Effusionsraten von  $^{235}\text{UF}_6$  und  $^{238}\text{UF}_6$  führen nun zu einer Anreicherung des leichteren Isotops. Da allerdings das Verhältnis der Molmassen beider Substanzen lediglich 1,008 beträgt, ist die Effusionsrate von  $^{235}\text{UF}_6$  nur um den Faktor  $1,008^{1/2} = 1,004$  größer. Aus diesem Grund sind tausende solcher Effusionsprozesse notwendig, um eine signifikante Anreicherung zu erzielen.

Das Graham'sche Effusionsgesetz ergibt sich in einfacher Weise aus der kinetischen Gastheorie, denn die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{c}$  der Gasmoleküle ist nach Gl. (1.20a) umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Molmasse. Da die Effusionsrate, die Zahl der pro Zeiteinheit durch ein Loch austretenden Moleküle, proportional zur Anzahl der Moleküle ist, die diese Öffnung erreichen (und damit auch proportional zu deren Geschwindigkeit), ist die Effusionsrate ebenfalls umgekehrt proportional zu  $M^{1/2}$ .

### 1.2.5 Intermolekulare Stöße

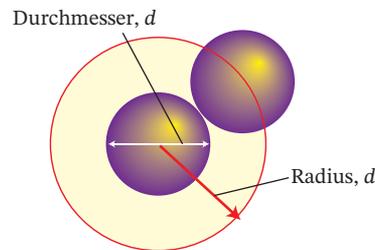
Die Strecke, die ein Molekül im Durchschnitt zwischen zwei Stößen zurücklegt, wird **mittlere freie Weglänge**  $\lambda$  (lambda) genannt. Die mittlere freie Weglänge der Moleküle in Flüssigkeiten entspricht nur einem Bruchteil ihres eigenen Durchmessers, da sie unmittelbar auf ein benachbartes Molekül treffen, sobald sie ihre Position auch nur einen Bruchteil ihres eigenen Durchmessers verändern. In Gasen hingegen kann die mittlere freie Weglänge mehrere hundert Moleküldurchmesser betragen. Wenn wir uns die Moleküle in einem Gas als Tennisbälle vorstellen, dann wäre die mittlere freie Weglänge typischerweise in etwa so groß wie die Länge eines Tennisplatzes. Wie wir in der folgenden Herleitung 1.2 sehen werden, beträgt die mittlere freie Weglänge eines Moleküls in einem idealen Gas

$$\lambda = \frac{kT}{2^{1/2}\sigma p} \quad (1.23)$$

wobei  $\sigma$  (sigma) den **Stoßquerschnitt** bezeichnet, also diejenige Fläche eines Moleküls, die am Stoß beteiligt ist. Wenn wir nun einen Stoß definieren als ein Ereignis, bei dem sich zwei Moleküle bis auf einen bestimmten Abstand  $d$  nähern, dem Moleküldurchmesser (also das Zweifache ihres Radius), dann gilt  $\sigma = \pi d^2$  (siehe Abb. 1.9).

#### Herleitung 1.2: Die mittlere freie Weglänge

Zur Berechnung der mittleren freien Weglänge gehen wir davon aus, dass ein Molekül im Verlauf sei-



**Abb. 1.9** Um das Stoßverhalten der Moleküle eines idealen Gases quantitativ beschreiben zu können, betrachtet man die Moleküle als Zentren von Kugeln mit dem Durchmesser  $d$ . Ein Molekül stößt mit einem anderen zusammen, wenn sich letzteres in einem Zylinder mit dem Radius  $d$  befindet und sich beide Moleküle parallel zur Zylinderachse aufeinander zu bewegen. Der Stoßquerschnitt eines Moleküls entspricht der Querschnittsfläche  $\pi d^2$  des Zylinders.

ner Bewegung durch den Raum mehrfach mit anderen Molekülen zusammenstößt. Es gilt

$$\lambda = \frac{\text{mittlere zurückgelegte Weglänge}}{\text{mittlere Anzahl der Stöße}}$$

Sowohl den Zähler als auch der Nenner in dieser Gleichung müssen wir nun durch mathematische Terme ausdrücken, die physikalische Größen enthalten. Beide Komponenten hängen von der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle ab.

#### Schritt 1: Formulierung des Zählers.

Diese Formulierung ist einfach: innerhalb eines Zeitintervalls  $\Delta t$  legt ein Molekül die Wegstrecke  $l = \bar{c}\Delta t$  zurück.

#### Schritt 2: Formulierung des Nenners.

Im selben Zeitintervall  $\Delta t$  durchläuft das Molekül einen Zylinder mit dem Volumen  $\sigma\bar{c}\Delta t$ . Sofern sich ein weiteres Molekül innerhalb des Zylinders befindet, kommt es zum Stoß. Wenn wir die Partikelzahldichte des Gases mit  $N$  bezeichnen, dann ergibt sich die Anzahl der Kollisionen aus dem Produkt aus dem durchlaufenen Volumen mal Partikelzahldichte, also  $\sigma\bar{c}\Delta tN$ . Allerdings müssen wir berücksichtigen, dass sich nicht nur das stoßende Molekül bewegt, sondern auch dessen Stoßpartner. Daher sollten wir genauer anstelle von  $\bar{c}$  von der mittleren *relativen* Geschwindigkeit der Moleküle  $\bar{c}_{\text{rel}}$  sprechen, und für die Anzahl der Stöße schreiben:  $\sigma\bar{c}_{\text{rel}}\Delta tN$ .

#### Schritt 3: Formulierung der Partikelzahldichte.

Die Partikelzahldichte ist  $N = N/V$ . Aus dem idealen Gasgesetz,  $pV = nRT$  mit  $n = N/N_A$  ( $N_A$  ist die Avogadro-Konstante), ergibt sich, dass  $n/V = p/RT$  ist. Daraus folgt  $N/V = nN_A/V = pN_A/RT$ . Wenn wir noch bedenken, dass  $R = N_A k$  ist (mit der Boltzmann-Konstanten  $k$ ), dann ergibt sich  $N = p/kT$ .

**Schritt 4:** Berechnung der mittleren relativen Geschwindigkeit.

Es existiert eine einfache Beziehung zwischen der mittleren Geschwindigkeit und der mittleren relativen Geschwindigkeit: um sie zu finden, müssen wir die Molmasse eines Moleküls in Gl. (1.20b) durch die *reduzierte* (molare) Masse ersetzen. Wie wir an anderer Stelle noch sehen werden, wird die reduzierte Molare Masse  $\mu$  in Gleichungen verwendet, in denen die relative Bewegung von Partikeln betrachtet wird. Für Partikel der Massen  $m_A$  bzw.  $m_B$  gilt

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

Für zwei Moleküle mit identischen Massen  $m$  gilt daher für die reduzierte Masse  $\mu = \frac{1}{2}m$ , und die reduzierte molare Masse ist  $\frac{1}{2}M$ . Mit Gl. (1.20b) folgt, dass

$$\bar{c}_{\text{rel}} = \left( \frac{8RT}{\pi \times \frac{1}{2}M} \right)^{1/2} = 2^{1/2} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{1/2} = 2^{1/2} \bar{c}$$

und daher ergibt sich die mittlere Anzahl der Stöße im Zeitintervall  $\Delta t$  zu  $2^{1/2} \sigma \bar{c} \Delta t N$ .

**Schritt 5:** Kombination der Terme für Zähler und Nenner.

Für die mittlere freie Weglänge ergibt sich schließlich

$$\lambda = \frac{\bar{c} \Delta t}{2^{1/2} \sigma \Delta t N} = \frac{1}{2^{1/2} \sigma N} = \frac{kT}{2^{1/2} \sigma p}.$$

Dies entspricht Gl. (1.23).

Die Stoßrate eines Moleküls, also die mittlere Anzahl der Stöße pro Molekül und Zeiteinheit, wird als **Stoßzahl**  $z$  bezeichnet. Der Kehrwert der Stoßzahl  $1/z$  entspricht der Zeit, die ein Molekül im Durchschnitt zwischen zwei Stößen im freien Flug zurücklegt. Wenn ein Molekül beispielsweise im Mittel zehnmal pro Sekunde mit anderen Molekülen zusammenstößt, dann hat die Stoßzahl den Wert  $10 \text{ s}^{-1}$  und die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen beträgt  $\frac{1}{10} \text{ s}$ . Bei 1 atm und Raumtemperatur stößt ein Molekül etwa eine Milliarde Mal pro Sekunde mit anderen Molekülen zusammen ( $z = 10^9 \text{ s}^{-1}$ ), daher beträgt die Zeit zwischen zwei Stößen unter diesen Bedingungen im Durchschnitt etwa 1 ns.

Wenn wir die mittlere freie Weglänge  $\lambda$ , also die im Mittel während eines freien Flugs zurückgelegte Strecke, durch die Zeit  $1/z$  zwischen zwei Stößen dividieren, sollten wir eine mittlere Geschwindigkeit der Moleküle erhalten. Es folgt, dass die mittlere freie Weglänge

und die Stoßzahl wie folgt zusammenhängen:

$$\bar{c}_{\text{rel}} = \frac{\overbrace{\text{mittlere freie Weglänge}}^{\lambda}}{\underbrace{\text{Zeit zwischen zwei Stößen}}_{1/z}} = \frac{\lambda}{1/z} = \lambda z \quad (1.24)$$

Mit der Definition für  $\lambda$  aus Gl. (1.23) und  $\bar{c}_{\text{rel}} = 2^{1/2} \bar{c}$  (siehe Herleitung 1.2) ergibt sich

$$z = \frac{\bar{c}_{\text{rel}}}{\lambda} = \frac{2^{1/2} \bar{c}}{\frac{kT^{1/2}}{2} \sigma p} = \frac{2 \sigma p \bar{c}}{kT}$$

und daher, durch Kombination mit Gl. (1.20b), für die Stoßzahl (ideales Gas):

$$z = \frac{2 \sigma p}{kT} \left( \frac{8RT}{\pi M} \right)^{1/2}. \quad (1.25)$$

**Illustration 1.7: Die mittlere freie Weglänge**

Mit den Angaben aus Tab. 1.3 und Gl. (1.23) können wir die mittlere freie Weglänge von  $\text{O}_2$ -Molekülen bei Standardtemperatur und Standarddruck (SATP, 25 °C, 1 bar) berechnen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\overbrace{1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}}^k \times \overbrace{298 \text{ K}}^T}{2^{1/2} \times \underbrace{0,40 \times 10^{-18} \text{ m}^2}_{\sigma} \times \underbrace{1,00 \times 10^5 \text{ Pa}}_p} \\ &= \frac{1,381 \times 10^{-23} \times 298 \text{ J}}{2^{1/2} \times 0,40 \times 10^{-18} \times 1,00 \times 10^5 \text{ Pa m}^2} \\ &= 7,3 \times 10^{-8} \text{ m} = 73 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Wir haben hier die Beziehungen  $1 \text{ J} = 1 \text{ Pa m}^3$  und  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$  verwendet. Unter diesen Bedingungen beträgt die Stoßzahl  $8,6 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ . Das bedeutet, jedes Molekül stößt 8,6 Milliarden Mal pro Sekunde mit einem anderen zusammen.

**Selbsttest 1.9**

Wie groß ist die Stoßzahl für  $\text{Cl}_2$ -Moleküle in einer Chlorgas-Probe unter denselben Bedingungen?

[Antwort:  $10 \text{ ns}^{-1}$ ]

Auch an dieser Stelle wollen wir einige wichtige Zusammenhänge aus den Ausdrücken für  $\lambda$  und  $z$  (Gln. (1.23) bis (1.25)) ableiten:

- Aus der Proportionalität  $\lambda \propto 1/p$  ergibt sich: *Die mittlere freie Weglänge nimmt ab, wenn der Druck zunimmt.*

Tab. 1.3 Stoßquerschnitte einiger Atome und Moleküle.

Spezies	$\sigma/\text{nm}^2$
Argon, Ar	0,36
Ethen, C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	0,64
Benzol, C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	0,88
Methan, CH <sub>4</sub>	0,46
Chlor, Cl <sub>2</sub>	0,93
Kohlendioxid, CO <sub>2</sub>	0,52
Wasserstoff, H <sub>2</sub>	0,27
Helium, He	0,21
Stickstoff, N <sub>2</sub>	0,43
Sauerstoff, O <sub>2</sub>	0,40
Schwefeldioxid, SO <sub>2</sub>	0,58

$$1 \text{ nm}^2 = 10^{-18} \text{ m}^2.$$

Eine Zunahme des Drucks bedeutet, dass bei konstanter Temperatur in einem bestimmten Volumen mehr Moleküle vorhanden sind. Dadurch reduziert sich die mittlere freie Weglänge, denn das einzelne Molekül trifft häufiger auf andere Moleküle und legt zwischen zwei Stößen eine kürzere Strecke zurück. So sinkt beispielsweise die mittlere freie Weglänge von O<sub>2</sub>-Molekülen von 73 auf 36 nm, wenn der Druck bei 25 °C von 1,0 auf 2,0 bar verdoppelt wird.

- Aus der Proportionalität  $\lambda \propto 1/\sigma$  ergibt sich: *Die mittlere freie Weglänge nimmt mit zunehmendem Stoßquerschnitt der Moleküle ab.*

Wenn die Moleküle einen größeren Stoßquerschnitt besitzen, nimmt die Wahrscheinlichkeit für Kollisionen mit anderen Molekülen zu, folglich verringert sich auch die mittlere freie Weglänge. Der Stoßquerschnitt  $\sigma$  von Benzolmolekülen (0,88 nm<sup>2</sup>) ist etwa viermal so groß wie der von Heliumatomen (0,21 nm<sup>2</sup>), bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ist deshalb die mittlere freie Weglänge von Benzolmolekülen viermal kürzer (siehe Tab. 1.3).

- Aus der Proportionalität  $z \propto p$  ergibt sich: *Die Stoßzahl steigt, wenn der Druck zunimmt.*

Bei gleicher Temperatur benötigt ein Molekül in einem dichteren, komprimierten Gas weniger Zeit, bis es auf ein benachbartes Molekül trifft. Dadurch erhöht sich bei zunehmendem Druck die Stoßzahl. So führt die Verdopplung des Drucks von Sauerstoffgas auch zu einer Verdopplung der Stoßzahl der O<sub>2</sub>-Moleküle, z. B. von  $8,6 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$  unter SATP-Bedingungen (siehe Illustration 1.7) auf  $17 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$  bei Erhöhung des Drucks auf 2,0 bar (und konstanter Temperatur).

- Aus den Proportionalitäten  $z \propto c$  und  $c \propto 1/M^{1/2}$  ergibt sich: *Schwere Moleküle stoßen pro Zeiteinheit*

seltener mit anderen zusammen als leichte Moleküle, sofern ihr Stoßquerschnitt identisch ist.

Schwere Moleküle bewegen sich bei gleicher Temperatur im Mittel langsamer als leichte Moleküle. Daher ist auch ihre Stoßzahl geringer, d. h. sie kollidieren seltener mit anderen Molekülen.

### Schlüsselkonzepte

1. Die **kinetische Gastheorie** berücksichtigt ausschließlich die kinetische Energie der Gasmoleküle.
2. Wichtige Ergebnisse dieses Modells sind die abgeleiteten Beziehungen für den Druck und die **quadratisch gemittelte Geschwindigkeit**.
3. Sowohl die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit als auch die mittlere Geschwindigkeit von Molekülen sind proportional zur Quadratwurzel der Temperatur, und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Molmasse.
4. Die **Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung** gibt für jede beliebige Temperatur den Anteil der Moleküle eines Gases an, die Geschwindigkeiten innerhalb eines bestimmten Bereiches besitzen.
5. Das **Graham'sche Effusionsgesetz** besagt, dass bei vorgegebenem Druck und Temperatur die Effusionsrate eines Gases umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der molaren Masse der Gasmoleküle ist.
6. Die **Stoßzahl** ist definiert als die Anzahl der Kollisionen eines Moleküls innerhalb eines Zeitintervalls geteilt durch die Dauer dieses Intervalls.
7. Die **mittlere freie Weglänge** ist die durchschnittliche Wegstrecke, die ein Molekül zwischen zwei Stößen zurücklegt.

### 1.3 Reale Gase

#### Motivation

Reale Gase weichen in ihrem Verhalten von der Modellvorstellung des idealen Gases ab, und es ist wichtig diese real existierenden Eigenschaften beschreiben zu können. Diese Abweichungen vom idealen Verhalten erlauben es, einen tiefer greifenden Einblick in die Natur der Wechselwirkungen zwischen Molekülen zu gewinnen. Die Berücksichtigung und Beschreibung dieser Wechselwirkungen ist darüber hinaus ein exzellentes Beispiel für die Verfeinerung von theoretischen Modellvorstellungen in der Physikalischen Chemie.

**Schlüsselideen**

Anziehungs- und Abstoßungskräfte zwischen Gasmolekülen sind die Ursache für das nicht-ideale Verhalten der Isothermen und das kritische Verhalten realer Gase.

**Voraussetzungen**

Dieser Abschnitt baut auf unserer Diskussion der idealen Gase in Abschn. 1.1 auf, und wir werden daraus weitergehende Überlegungen ableiten. Hierzu benötigen wir ein neues mathematisches Werkzeug, die Differenzialrechnung, die es uns ermöglicht, Wendepunkte im Verlauf von Kurven zu identifizieren. Dieses wichtige mathematische Verfahren wird in „Toolkit 5: Differenzialrechnung“ vorgestellt.

Bei unseren Überlegungen in Abschn. 1.2 zur kinetischen Gastheorie haben wir vorausgesetzt, dass in einem idealen Gas die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  der Gasmoleküle wesentlich größer als ihr Durchmesser  $d$  ist;  $d$  betrachten wir dabei als denjenigen Abstand, bei dem sich die Moleküle miteinander in Kontakt befinden sollen:

*Bedingung für das ideale Verhalten eines Gases:  $\lambda \gg d$ .*

Aufgrund des großen mittleren Abstands der Moleküle trägt in einem idealen Gas nur die kinetische Energie der molekularen Bewegung zur Gesamtenergie bei, während die potenzielle Energie aus intermolekularen Wechselwirkungen keinen Beitrag liefert. In der Realität treten solche Wechselwirkungen bei hinreichend kleinem Abstand der Moleküle auf, daher ist die Vernachlässigung der potenziellen Energie nur eine Näherung, und wir müssen unser Modell erweitern. In der Physikalischen Chemie bauen komplexe Theorien häufig auf einfacheren Modellvorstellungen auf, die sukzessive verfeinert werden, um sie mit den beobachteten Ergebnissen weitergehender Experimente in Einklang zu bringen.

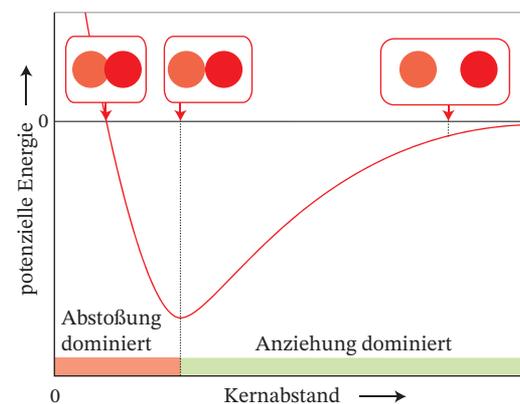
**1.3.1 Intermolekulare Wechselwirkungen**

Wir können zwei verschiedene Formen der Wechselwirkung zwischen Molekülen unterscheiden, anziehende und abstoßende. Moleküle mit vergleichsweise großem Abstand (einige Moleküldurchmesser) ziehen einander an. Dies ist die Ursache dafür, dass Gase bei niedrigen Temperaturen zu Flüssigkeiten kondensieren. Unterschreitet die Temperatur eines Gases einen bestimmten Wert, dann reicht die kinetische Energie der Moleküle nicht mehr aus, um den Anziehungskräften der Nachbarn entgegenzuwirken, und die Mo-

leküle halten sich gegenseitig fest. Wenn zwei Moleküle hingegen miteinander in engen Kontakt kommen, stoßen sie einander ab. Die abstoßende Wechselwirkung ist der Grund dafür, dass Flüssigkeiten und Festkörper ein definiertes Volumen besitzen und nicht in einen winzigen Punkt zusammenfallen.

Intermolekulare Wechselwirkungen – die Anziehung und Abstoßung von Molekülen – tragen zur potenziellen Energie und damit auch zur Gesamtenergie eines Gases bei. Wenn sich Moleküle einander nähern, kommt es zu einer anziehenden Wechselwirkung und, damit verbunden, zu einer Absenkung der Gesamtenergie: Anziehende Wechselwirkungen leisten einen *negativen* Beitrag zur Gesamtenergie. Bei hinreichend kleinem Abstand der Moleküle setzen abstoßende Wechselwirkungen ein, die zu einer Erhöhung der Gesamtenergie führen und somit einen *positiven* Beitrag leisten. Abbildung 1.10 zeigt den allgemeinen Verlauf der intermolekularen potenziellen Energie in Abhängigkeit vom Abstand. Anziehende Wechselwirkungen (negativer Beitrag zur Gesamtenergie) sind im Bereich größerer Abstände dominant, abstoßende Wechselwirkungen (positiver Beitrag zur Gesamtenergie) im Bereich kleiner Abstände.

Die Wechselwirkungen der Moleküle untereinander haben auch einen Einfluss auf die makroskopischen Eigenschaften und damit die Zustandsgleichungen der Gase. So entspricht beispielsweise der Verlauf von Isothermen realer Gase nicht der Vorhersage des Boyle'schen Gesetzes. Dies trifft insbesondere für hohe Drücke und tiefe Temperaturen zu, denn bei diesen Bedingungen spielen die Wechselwirkungen eine



**Abb. 1.10** Abhängigkeit der potenziellen Energie vom Abstand zweier Moleküle. Eine große positive potenzielle Energie bei sehr kleinen Abständen ist ein Anzeichen für stark abstoßende Wechselwirkungen. Bei etwas größeren Abständen (einige Moleküldurchmesser) dominieren anziehende Wechselwirkungen und die potenzielle Energie ist negativ. Sind die Moleküle weit voneinander entfernt, so wechselwirken sie nicht mehr miteinander, und die potenzielle Energie ist null.

besonders große Rolle. Abbildung 1.11 zeigt einige experimentell bestimmte Isothermen von Kohlendioxid. Obwohl die gemessenen Isothermen denjenigen des idealen Gases (Abb. 1.1) bei hohen Temperaturen (und niedrigen Drücken, außerhalb des in Abb. 1.11 gezeigten Ausschnitts) durchaus ähneln, sind doch erhebliche Unterschiede für Temperaturen unter 50 °C und Drücke oberhalb von 1 bar vorhanden.

### 1.3.2 Die kritische Temperatur

Um den genauen Verlauf der Isothermen in Abb. 1.11 zu verstehen, befassen wir uns mit der Isotherme bei 20 °C und folgen ihrem Verlauf von Punkt A bis F:

- Am Punkt A ist das Kohlendioxid gasförmig, und die Kurve verläuft wie die Isotherme eines idealen Gases.

#### Toolkit 5: Differenzialrechnung

Die **erste Ableitung** einer Funktion  $y(x)$  wird symbolisiert mit  $dy/dx$ . Sie gibt die Steigung der Funktion an jedem Punkt der Kurve an (Abb. T1). Ein positiver Wert für die erste Ableitung bedeutet einen Anstieg der Kurve von links nach rechts (bei größer werdendem  $x$ ); ein negativer Wert für die erste Ableitung bedeutet einen Abfall der Kurve; wenn die erste Ableitung null ist, besitzt die Kurve an der untersuchten Stelle ein Maximum oder ein Minimum (und verläuft parallel zur  $x$ -Achse).

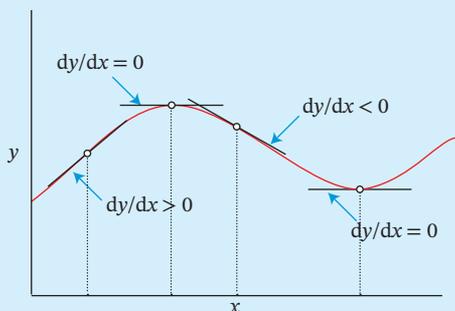


Abb. T1

Eine wichtige Beziehung zur Bildung der ersten Ableitung einer Funktion ist:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

Wenn die betrachtete Funktion die allgemeine Form  $y = mx^2 + b$  besitzt, folgt daraus für die erste Ableitung – da sowohl  $m$  als auch  $b$  Konstanten sind:  $dy/dx = 2mx$ . In diesem Fall vergrößert sich also die Steigung mit steigendem  $x$  immer weiter. Die oben angegebene Beziehung für  $dx^n/dx$  gilt auch, wenn  $n$  negativ ist, wie in folgendem Beispiel (die erste Ableitung für die Funktion  $1/x$  nach  $x$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x} &= \frac{d(1/x)}{dx} = \frac{d(x^{-1})}{dx} = \frac{\overbrace{n}^{n=-1}}{-x} \cdot \overbrace{-2}^{n-1} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Die ersten Ableitungen für zwei wichtige Funktionen lauten:

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax} \quad \frac{d}{dx} e^{f(x)} = \left( \frac{df(x)}{dx} \right) e^{f(x)}$$

Zwei weitere, fundamentale Ergebnisse sind:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{a+bx} = -\frac{b}{(a+bx)^2} \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{(a+bx)^2} = -\frac{2b}{(a+bx)^3}$$

Die Ergebnisse für komplexere Funktionen werden in „Toolkit 11: Ableitungsregeln“ in Abschn. 4.1 besprochen.

Die **zweite Ableitung** einer Funktion erhalten wir, wenn das Ergebnis der ersten Ableitung *erneut* abgeleitet wird, geschrieben  $d^2y/dx^2$ . Beispiel: die erste Ableitung der Funktion  $y = mx^2 + b$  lautet  $2mx$ , die zweite Ableitung derselben Funktion ist  $2m$ . Für die Übungen in diesem Buch sollten Sie wissen, dass

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{a+bx} = \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{b}{(a+bx)^2} \right\} = \frac{2b^2}{(a+bx)^3}$$

ist. Ein positiver Wert für die zweite Ableitung bedeutet, dass die Funktion an der untersuchten Stelle ein *Minimum* besitzt (Kurvenverlauf U-förmig); ein negativer Wert bedeutet hingegen, dass die Funktion dort ein *Maximum* besitzt (Kurvenverlauf ∩-förmig). Wenn die zweite Ableitung null ist, liegt ein *Wendepunkt* vor, an dem die „Biegung“ der Kurve ihre Richtung ändert (Abb. T2).

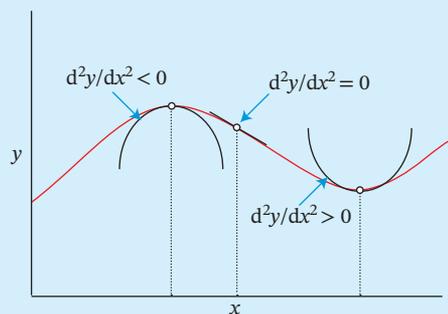
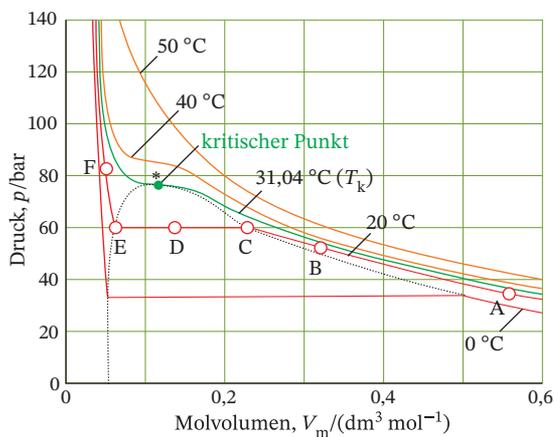


Abb. T2

## 28 | 1 Die Eigenschaften der Gase



**Abb. 1.11** Experimentell bei unterschiedlichen Temperaturen bestimmte Isothermen von Kohlendioxid. Die kritische Isotherme ist die Isotherme bei der kritischen Temperatur  $T_k = 31,04\text{ °C}$ .

- Komprimieren wir das Gas in einem Gefäß mit beweglichem Kolben so lange, bis wir auf der Isotherme den Punkt B erreichen, so steigt der Druck in guter Näherung gemäß dem Boyle'schen Gesetz.
- Wir können die Kompression fortsetzen, bis das Gas schließlich den Zustand C erreicht.
- Ab jetzt können wir den Kolben in das Gefäß hindrücken, ohne dass sich der Druck ändert (in Abb. 1.11 wird dieser Vorgang durch eine horizontale Linie zwischen den Punkten C und E dargestellt).
- Um das Volumen der Substanz von Punkt E nach Punkt F weiter zu reduzieren, muss der Druck ganz erheblich erhöht werden.

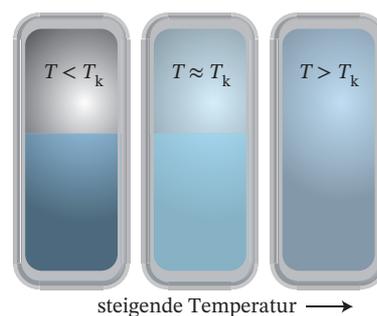
Dieses Verhalten entspricht genau den Erwartungen bei Kondensation eines Gases von Punkt C bis hin zu einer Flüssigkeit am Punkt E. Wenn die Gefäßwände durchsichtig wären, dann könnten wir den gesamten Kondensationsprozess beobachten:

- Am Punkt C beginnt das Gas damit sich zu verflüssigen.
- Die Kondensation ist abgeschlossen, wenn Punkt E erreicht wird, und der Kolben befindet sich auf der Flüssigkeitsoberfläche.
- Für die weitere Kompression der (jetzt flüssigen) Substanz vom Punkt E weiter zu Punkt F sind erheblich größere Druckänderungen erforderlich. Dies zeigt, welche Kräfte überwunden werden müssen, um eine Flüssigkeit auch nur um einen geringen Betrag zu komprimieren.

Betrachten wir nun die intermolekularen Wechselwirkungen, die eine Erklärung für das beobachtete Verhalten liefern:

- Die Abnahme des Volumens zwischen C und E hat eine Verkleinerung der intermolekularen Abstände zur Folge, was zu einer deutlichen Verstärkung der anziehenden Wechselwirkungen und somit zum Übergang in den flüssigen Aggregatzustand führt.
- Im Übergang von E nach F wird versucht, Moleküle, die bereits in engem Kontakt zueinander stehen, noch weiter zu komprimieren und die immer stärker werdenden Abstoßungskräfte zwischen den Molekülen zu überwinden.

Im Verlauf der Kondensation (beispielsweise im Zustand D) liegt die Substanz sowohl als Gas als auch als Flüssigkeit vor. Beide Aggregatzustände sind durch eine deutlich sichtbare Oberfläche voneinander getrennt (Abb. 1.12). Auch bei geringfügig höheren Temperaturen (zum Beispiel bei  $30\text{ °C}$ ) ist es möglich, durch eine Erhöhung des Drucks eine Änderung des Aggregatzustands herbeizuführen. Die Umwandlung tritt jedoch erst bei größeren Drücken auf. Zudem ist es schwieriger, die Trennfläche genau zu erkennen, denn die Dichte des Gases ist wegen des hohen Drucks fast genauso groß wie die Dichte der Flüssigkeit. Bei einer Temperatur von  $31,04\text{ °C}$  ( $304,19\text{ K}$ ) scheint sich das Kohlendioxid-Gas kontinuierlich in den kondensierten Zustand umzuwandeln, und es ist keine Trennfläche zwischen den beiden Aggregatzuständen zu erkennen. Diese Temperatur wird als **kritische Temperatur**  $T_k$  bezeichnet. Sobald die Temperatur einer Substanz mindestens so groß ist wie ihre kritische Temperatur, liegt unabhängig vom Druck immer eine einzige Materieform vor, es gibt also keine Trennung mehr zwischen Flüssigkeit und Gas. *Ein Gas kann nur dann durch Druckerhöhung zu einer Flüssig-*



**Abb. 1.12** Wird eine Flüssigkeit in einem abgedichteten Behälter erhitzt, nimmt die Dichte der flüssigen Phase ab, die Dichte der Gasphase nimmt zu (linker und mittlerer Behälter; die Dichteänderung der jeweiligen Phase ist durch unterschiedliche Schattierungen angedeutet). Wenn die kritische Temperatur erreicht ist, sind die Dichten beider Phasen gleich, und die Grenzfläche verschwindet (rechter Behälter). Ein solcher Behälter muss hohen Drücken und Temperaturen standhalten können: Der Dampfdruck von Wasser beträgt bei der kritischen Temperatur von  $373\text{ °C}$  bereits  $218\text{ atm}$ .

Tab. 1.4 Kritische Temperaturen einiger Gase.

	Kritische Temperatur $T_k/^\circ\text{C}$
<i>Edelgase</i>	
Helium, He	-268 (5,2 K)
Neon, Ne	-229
Argon, Ar	-123
Krypton, Kr	-64
Xenon, Xe	17
<i>Halogene</i>	
Chlor, Cl <sub>2</sub>	144
Brom, Br <sub>2</sub>	311
<i>Kleine anorganische Moleküle</i>	
Ammoniak, NH <sub>3</sub>	132
Kohlendioxid, CO <sub>2</sub>	31
Wasserstoff, H <sub>2</sub>	-240
Stickstoff, N <sub>2</sub>	-147
Sauerstoff, O <sub>2</sub>	-118
Wasser, H <sub>2</sub> O	374
<i>Organische Verbindungen</i>	
Benzol, C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	289
Methan, CH <sub>4</sub>	-83
Tetrachlormethan, CCl <sub>4</sub>	283

keit kondensiert werden, wenn die Temperatur des Gases unterhalb der kritischen Temperatur liegt.

Wenn wir uns in Abb. 1.11 auf die **kritische Isotherme** – also diejenige Isotherme bei der kritischen Temperatur  $T_k$  – konzentrieren, erkennen wir, dass die Volumina der Substanz in den Zuständen C und E identisch sind und in einem einzelnen Punkt, dem sogenannten **kritischen Punkt**, zusammen treffen. Den zugehörigen Druck nennt man den **kritischen Druck**  $p_k$ , und das zugehörige Volumen das **kritische molare Volumen**  $V_k$  der Substanz. Zusammen mit der kritischen Temperatur  $T_k$  (siehe Tab. 1.4) nennt man diese drei Größen auch die **kritischen Konstanten** einer Substanz. Aus Tab. 1.4 können wir z. B. entnehmen, dass Stickstoffgas oberhalb einer Temperatur von 126 K (-147 °C) nicht verflüssigt werden kann. Die kritische Temperatur wird gelegentlich verwendet, um zwischen den Begriffen „Dampf“ und „Gas“ zu unterscheiden:

- Wir bezeichnen die Gasphase einer Substanz als **Dampf**, wenn ihre Temperatur *unterhalb der kritischen Temperatur* liegt. Dampf kann durch Kompression alleine verflüssigt werden.
- Wir bezeichnen die Gasphase einer Substanz als **Gas**, wenn ihre Temperatur *oberhalb der kritischen Temperatur* liegt. Gas kann durch Kompression alleine *nicht* verflüssigt werden.

Daher ist Sauerstoff bei Raumtemperatur ein echtes Gas, während es sich bei der Gasphase von Wasser bei Raumtemperatur um einen Dampf handelt.

Wenn wir ein Gas bei einer Temperatur oberhalb der kritischen Temperatur komprimieren, erhalten wir ein dichtes fluides Medium, das sich in vieler Hinsicht wie eine Flüssigkeit verhält – seine Dichte beispielsweise ist vergleichbar mit der einer Flüssigkeit, und es kann als Lösungsmittel wirken. Trotzdem kann man das Fluid nicht als Flüssigkeit ansehen, denn es füllt einen Behälter stets vollständig aus (wie ein Gas), und es ist nicht durch eine deutlich sichtbare Oberfläche von der Gasphase getrennt. Es handelt sich aber aufgrund der hohen Dichte auch nicht um ein Gas. Ein solches Medium nennt man **überkritisches Fluid**. Einige Stoffe im überkritischen Zustand werden in technischen Prozessen als Lösungsmittel eingesetzt. So dient überkritisches Kohlendioxid (scCO<sub>2</sub>) zur Extraktion des Coffeins aus Kaffee. Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass es keine unerwünschten, möglicherweise giftigen Rückstände gibt. Gegenwärtig sind überkritische Fluide auch deshalb von großem Interesse, weil sie bei gewissen technischen Verfahren anstelle von Fluorchlorkohlenwasserstoffen (FCKW) eingesetzt werden können, denn FCKW sind für ihren schädigenden Einfluss auf die Umwelt bekannt. Da (überkritisches) Kohlendioxid entweder direkt aus der Atmosphäre oder (durch Fermentation) aus erneuerbaren organischen Quellen gewonnen werden kann, wird die Nettobelastung der Atmosphäre durch Kohlendioxid nicht weiter erhöht.

### 1.3.3 Der Kompressionsfaktor

Eine nützliche Größe zur Charakterisierung realer Gase ist der **Kompressionsfaktor**  $Z$ . Er ist definiert als das Verhältnis der Molvolumina eines realen und eines idealen Gases bei gleicher Temperatur und gleichem Druck:

$$Z = \frac{V_m}{V_m^{\text{ideal}}} \quad (1.26a)$$

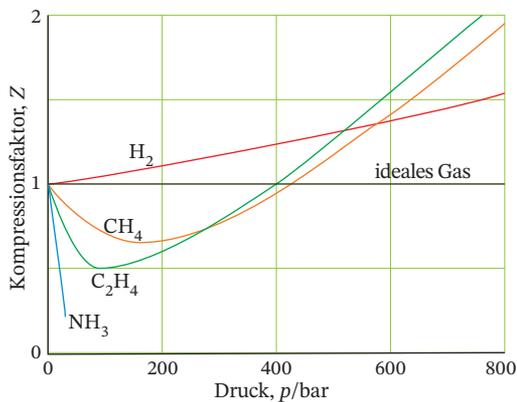
In einem idealen Gas ist  $V_m = V_m^{\text{ideal}}$ , also gilt stets  $Z = 1$ . Daher ist die Abweichung des Kompressionsfaktors  $Z$  von 1 ein Maß für die Abweichung des Verhaltens eines Gases von der Idealität.

Das Molvolumen eines idealen Gases ist nach Gl. (1.9b) in Abschn. 1.1 gegeben mit  $V_m^{\text{ideal}} = RT/p$ , daher lässt sich die Definition von  $Z$  umschreiben zu

$$Z = \frac{V_m}{V_m^{\text{ideal}}} = \frac{V_m}{RT/p} = \frac{pV_m}{RT} \quad (1.26b)$$

Abbildung 1.13 zeigt, wie sich der Kompressionsfaktor verschiedener realer Gase in Abhängigkeit vom

## 30 | 1 Die Eigenschaften der Gase



**Abb. 1.13** Druckabhängigkeit des Kompressionsfaktors  $Z$  für verschiedene Gase bei  $0\text{ °C}$ . Für das ideale Gas gilt unabhängig vom Druck stets  $Z = 1$ . Bei dieser Temperatur zeigt von den hier aufgeführten Gasen nur Wasserstoff im gesamten Druckbereich ein positives Abweichen vom idealen Verhalten. Alle anderen Gase weichen bei hohen Drücken ebenfalls positiv, bei niedrigen Drücken hingegen negativ vom idealen Verhalten ab. Negative Abweichungen vom Verhalten des idealen Gases sind eine Folge der Dominanz anziehender Wechselwirkungen, bei positiven Abweichungen dominieren abstoßende Wechselwirkungen. Der Verlauf der Kurve  $Z(p)$  hängt von der Temperatur ab.

Druck ändert. Bei niedrigen Drücken ist der Kompressionsfaktor einiger Gase (zum Beispiel Methan, Ethan und Ammoniak) kleiner als 1; das bedeutet, die Molvolumina dieser Gase sind bei gleicher Temperatur und gleichem Druck kleiner als das Molvolumen des idealen Gases. Für diese Gase dominieren bei moderaten Drücken anziehende Wechselwirkungen, die eine Verringerung der intermolekularen Abstände und damit auch des Gesamtvolumens verursachen. Der Kompressionsfaktor aller Gase ist bei hohen Drücken stets größer als 1, für manche Gase (Wasserstoff in Abb. 1.13) sogar im gesamten Druckbereich. Der Verlauf der Kurve  $Z(p)$  hängt von der Temperatur ab. Bei  $Z > 1$  ist das Molvolumen des realen Gases bei gleicher Temperatur und gleichem Druck größer als das Molvolumen des idealen Gases. Bei hohen Drücken sind die intermolekularen Abstände klein, daher dominieren abstoßende Wechselwirkungen, die eine weitere Kompression des Gases erschweren. Bei Wasserstoffmolekülen sind die anziehenden Wechselwirkungen so schwach, dass bereits bei geringen Drücken die abstoßenden Wechselwirkungen dominieren.

#### Illustration 1.8: Der Kompressionsfaktor

Ein Gas nehme bei  $T = 250\text{ K}$  und  $p = 15\text{ atm}$  ein molares Volumen  $V_m$  ein, das um 12 % *geringer* ist als man es bei idealem Verhalten erwarten würde. Also ist

$$\frac{V_m - V_m^{\text{ideal}}}{V_m^{\text{ideal}}} = -\frac{12}{100}.$$

Daraus folgt

$$\frac{V_m}{V_m^{\text{ideal}}} - 1 = -0,12, \quad \text{also} \\ Z = \frac{V_m}{V_m^{\text{ideal}}} = 1 - 0,12 = 0,88.$$

Da  $Z = 0,88 < 1$  ist, können wir schließen, dass anziehende Wechselwirkungen in der Gasprobe dominieren.

#### Selbsttest 1.10

Ein Gas nehme bei  $T = 350\text{ K}$  und  $p = 12\text{ atm}$  ein molares Volumen  $V_m$  ein, das um 12 % *größer* ist als man es bei idealem Verhalten erwarten würde. Berechnen Sie den Kompressionsfaktor unter diesen Bedingungen, sowie das Molvolumen des Gases. Dominieren in der Gasprobe anziehende oder abstoßende Wechselwirkungen?

[Antwort:  $Z = 1,12$ ;  $V_m = 2,7\text{ dm}^3\text{ mol}^{-1}$ ; Abstoßung ist dominant]

#### 1.3.4 Die Virialgleichung

Wir können die Abweichung des Kompressionsfaktors  $Z$  vom „idealen“ Wert 1 dazu verwenden, eine *empirische*, also eine auf experimentellen Befunden basierende, Zustandsgleichung aufzustellen. Wir wollen annehmen, dass sich  $Z$  für reale Gase als eine Summe sehr vieler Terme, beginnend mit dem Summanden 1, darstellen lässt:

$$Z = 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \quad (1.27a)$$

Die Koeffizienten  $B$ ,  $C$ , ... werden als **Virialkoeffizienten** bezeichnet:  $B$  ist der zweite Virialkoeffizient,  $C$  der dritte usw. Der erste Virialkoeffizient ( $A$ ) ist gleich 1. Das Wort „virial“ ist vom lateinischen Wort „vis“ (Kraft) abgeleitet, und soll die Bedeutung der intermolekularen Kräfte für das Verhalten der Gase zum Ausdruck bringen. Die Virialkoeffizienten  $B$ ,  $C$  usw. werden gelegentlich auch mit den Symbolen  $B_2$ ,  $B_3$  usw. bezeichnet. Die Koeffizienten sind von Gas zu Gas verschieden und hängen von der Temperatur ab. Es ist in der Physikalischen Chemie weit verbreitet, ein unter gewissen Einschränkungen gültiges Gesetz (hier  $Z = 1$  für Gase bei sehr großen Molvolumina) als Näherung eines komplizierteren und universelleren Zusammenhangs anzusehen. In vielen Fällen kann der Gültigkeitsbereich des einfachen Gesetzes durch zusätzliche Terme schrittweise erweitert werden.

Der wichtigste zusätzliche Term auf der rechten Seite von Gl. (1.27a) ist der zweite Term, der proportional zu  $1/V_m$  ist, denn unter den meisten Bedingungen (bei geringem Druck) kann der Term  $C/V_m^2$  wegen  $C/V_m^2 \ll B/V_m$  vernachlässigt werden. Dann bestimmt im Wesentlichen der zweite Virialkoeffizient die Abhängigkeit des Kompressionsfaktors vom Druck bzw. Molvolumen. Es gilt

$$Z = 1 + \frac{B}{V_m} \quad (1.27b)$$

Aus den Verläufen der Kurven in Abb. 1.13 können wir auf die Vorzeichen der Virialkoeffizienten  $B$  und  $C$  schließen. Wir können folgern, dass  $B$  für Wasserstoff wegen  $Z > 1$  positiv, für Methan, Ethan und Ammoniak hingegen wegen  $Z < 1$  negativ ist. Das gilt natürlich nur für diejenige Temperatur, die den dargestellten Kurven zu Grunde liegt. Mit zunehmendem Druck und damit abnehmendem  $V_m^2$  steigt der Einfluss des dritten Summanden  $C/V_m^2$ . Für positive Werte von  $C$  ist daher der Kompressionsfaktor bei hohen Drücken für alle Gase größer als 1 (Abb. 1.13). Um die Virialkoeffizienten eines Gases zu bestimmen, muss zunächst der Kompressionsfaktor in Abhängigkeit vom Druck oder Molvolumen gemessen werden. Anschließend kann ein Satz von Virialkoeffizienten durch mathematische Anpassungsverfahren so bestimmt werden, dass der Verlauf von  $Z$  über den gesamten Druck- bzw. Volumenbereich möglichst gut wiedergegeben wird.

Die Virialkoeffizienten hängen von der Temperatur ab. Bei der sogenannten **Boyle-Temperatur**  $T_B$  wird  $B = 0$ , dann vereinfacht sich Gl. (1.27b) zu  $Z = 1$  und das Gas zeigt über einen engen Bereich von Molvolumina ideales Verhalten. Die Boyle-Temperatur von Stickstoff ist 327,2 K (54,1 °C), und für Kohlendioxid 714,8 K (441,6 °C). Bei der Boyle-Temperatur sind die anziehenden und abstoßenden Wechselwirkungen gleich groß und heben sich daher gegenseitig auf.

Wir wollen nun Gl. (1.27a) in Form einer Zustandsgleichung angeben. Durch Kombination mit Gl. (1.26b),  $Z = pV_m/(RT)$ , erhalten wir

$$\frac{pV_m}{RT} = 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots$$

Wenn wir beide Seiten mit  $RT/V_m$  multiplizieren und zusätzlich  $V_m$  durch  $V/n$  ersetzen, ergibt sich folgender Ausdruck für  $p$ :

$$p = \frac{nRT}{V} \left( 1 + \frac{nB}{V} + \frac{n^2C}{V^2} + \dots \right). \quad (1.28)$$

Gleichung (1.28) wird **Virialgleichung** genannt. Bei sehr geringen Drücken sind wegen des entsprechend

großen Molvolumens die Terme  $nB/V$  und  $n^2C/V^2$  sehr klein und können, wie auch alle noch folgenden Summanden, vernachlässigt werden. Daher geht die Virialgleichung im Grenzfall sehr kleiner Drücke ( $p \rightarrow 0$ ) in die Zustandsgleichung des idealen Gases über (vgl. Gl. (1.5b)).

#### Illustration 1.9: Die Virialgleichung

Das Molvolumen von  $\text{NH}_3$  beträgt  $1,00 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$  bei  $p = 36,2 \text{ bar}$  und  $T = 473 \text{ K}$ . Wenn wir davon ausgehen, dass bei diesen Bedingungen die Virialgleichung als  $p = (RT/V_m)(1 + B/V_m)$  geschrieben werden kann, gilt

$$B = \left( \frac{pV_m}{RT} - 1 \right) V_m.$$

Daraus ergibt sich folgender Wert für den zweiten Virialkoeffizienten  $B$ :

$$B = \left( \frac{36,2 \text{ bar} \times 1,00 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}}{8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \times 473 \text{ K}} - 1 \right) \times 1,00 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} \\ = -79,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1} = -79,5 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

(Beachten Sie, dass die Einheit J im Nenner gegen  $\text{Pa m}^3 = \text{J}$  im Zähler gekürzt wurde.)

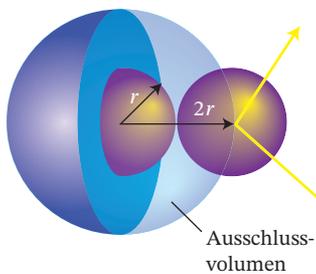
#### Selbsttest 1.11

Der zweite Virialkoeffizient für  $\text{NH}_3$  beträgt  $B = -45,6 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  bei  $T = 573 \text{ K}$ . Berechnen Sie bei dieser Temperatur den Druck, bei dem das Molvolumen von Ammoniak  $1,00 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$  beträgt.

[Antwort: 45,5 bar]

#### 1.3.5 Die van-der-Waals-Gleichung

Die Virialgleichung ist eine äußerst zuverlässige Zustandsgleichung. Ihr Nachteil besteht darin, wenig anschaulich zu sein. Wir können nicht auf den ersten Blick erkennen, warum Gase vom idealen Verhalten abweichen oder zu Flüssigkeiten kondensieren. Im Jahr 1873 formulierte der holländische Physiker Johannes van der Waals die nach ihm benannte genäherte Zustandsgleichung. Die **van-der-Waals-Gleichung** ist keine exakte Zustandsgleichung, zeigt jedoch in sehr anschaulicher Weise, wie die intermolekularen Wechselwirkungen zu Abweichungen vom idealen Verhalten beitragen, und ist ein weiteres Beispiel für eine mathematische, quantitativ nach-



**Abb. 1.14** Wird ein Molekül als eine Kugel mit dem Radius  $r$  und dem Volumen  $V_{\text{Molekül}} = \frac{4}{3}\pi r^3$  behandelt, dann können sich zwei Moleküle maximal bis auf den Abstand  $2r$  annähern. Das bedeutet, dass eine Kugel um ein Molekül mit dem Radius  $2r$  und dem Volumen  $8V_{\text{Molekül}}$  für andere Moleküle nicht zugänglich ist (siehe auch Herleitung 1.3).

prüfbare Beziehung auf der Basis eines tragfähigen Modells.

Aufgrund der abstoßenden Wechselwirkung können zwei Moleküle einander nicht beliebig nahe kommen, das heißt, ein bestimmter intermolekularer Abstand kann nicht unterschritten werden. Das einzelne Molekül kann sich also nicht innerhalb des gesamten Volumens  $V$  frei bewegen. Wir müssen daher  $V$  um einen bestimmten Wert reduzieren. Das zu subtrahierende Volumen ist proportional zur Zahl der Moleküle und zum Volumen, das jedes einzelne Molekül ausschließt, also für andere Moleküle unzugänglich macht (Abb. 1.14). Wir können somit den Einfluss der abstoßenden Kräfte berücksichtigen, indem wir in der Zustandsgleichung des idealen Gases  $V$  durch  $V - nb$  ersetzen. Die Proportionalitätskonstante  $b$  beschreibt den Zusammenhang zwischen der Volumenabnahme und der Stoffmenge des Gases. Wie wir in der folgenden Herleitung 1.3 zeigen werden, hängt  $b$  mit dem Volumen eines einzelnen Moleküls wie folgt zusammen:

$$b \approx 4V_{\text{Molekül}}N_A. \quad (1.29)$$

#### Herleitung 1.3: Das Ausschlussvolumen eines Gases

Das Volumen einer Kugel mit dem Radius  $R$  ist  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . Wenn wir Moleküle als starre Kugeln betrachten, wie in Abb. 1.14 gezeigt, können sich zwei Moleküle nur bis auf einen Abstand von  $2r$  annähern, denn  $V_{\text{Molekül}} = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Daher beträgt das Ausschlussvolumen  $\frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8(\frac{4}{3}\pi r^3)$ , bzw.  $8V_{\text{Molekül}}$ . Das Ausschlussvolumen bezogen auf ein einzelnes Molekül beträgt exakt die Hälfte, also  $4V_{\text{Molekül}}$ . Damit ergibt sich das Ausschlussvolumen für ein Mol Gasmoleküle zu  $b \approx 4V_{\text{Molekül}}N_A$ , was Gl. (1.29) entspricht.

Wir erhalten auf diesem Weg aus  $p = nRT/V$  eine modifizierte Form der Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$p = \frac{nRT}{V - nb}.$$

Diese Zustandsgleichung entspricht noch nicht der kompletten van-der-Waals-Gleichung, da der Einfluss anziehender Wechselwirkungen nicht berücksichtigt ist. Wir können sie aber bereits zur Beschreibung des Verhaltens von Gasen verwenden, wenn die abstoßenden Wechselwirkungen dominant sind. Bei niedrigen Drücken ist das Gesamtvolumen  $V$  des Gases sehr viel größer als das Ausschlussvolumen der Moleküle. Diesen Sachverhalt geben wir in der Form  $V \gg nb$  an. Das bedeutet, dass  $nb$  gegen  $V$  im Nenner des Bruchs vernachlässigt werden kann, so dass sich wieder die Zustandsgleichung des idealen Gases ergibt.

**Hinweis** Es ist immer sinnvoll zu überprüfen, ob wir ein bekanntes Gesetz erhalten, wenn wir eine aufgestellte Gleichung durch plausible physikalische Näherungen vereinfachen.

Während abstoßende Wechselwirkungen einen Einfluss auf das Volumen haben, in dem sich die Moleküle frei bewegen können, bewirken anziehende Wechselwirkungen eine Veränderung des Drucks. Wir wollen annehmen, dass die anziehende Kraft auf ein einzelnes Molekül proportional zur Konzentration  $n/V$  des Gases ist. Die Moleküle werden durch anziehende Wechselwirkungen abgebremst und prallen daher seltener und mit geringerer Wucht auf die Wände des Gefäßes. Wir können also erwarten, dass sich der Druck um einen Betrag verringert, der proportional zum *Quadrat* der molaren Konzentration ist: Beide Effekte – die Zahl der Stöße auf die Wand nimmt ab, gleichzeitig werden die Stöße schwächer – tragen jeweils einen Faktor  $n/V$  zur Verringerung des Drucks bei. Um den Zusammenhang in Form einer Gleichung angeben zu können, führen wir die Proportionalitätskonstante  $a$  ein und erhalten

$$\text{Druckabnahme} = a \times \left(\frac{n}{V}\right)^2.$$

Wir fassen nun unsere Teilergebnisse zu einer Zustandsgleichung zusammen, die die Einflüsse von abstoßenden und anziehenden Wechselwirkungen berücksichtigt:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \left(\frac{n}{V}\right)^2. \quad (1.30a)$$

Dies ist die **van-der-Waals-Gleichung**. Um die Ähnlichkeit zur Zustandsgleichung des idealen Gases

$pV = nRT$  deutlich zu machen, können wir sie umformen, indem wir den zweiten Term auf der rechten Seite durch Addition auf die linke Seite bringen, was  $p + an^2/V^2$  ergibt, und dann auf beiden Seiten der Gleichung mit  $V - nb$  multiplizieren:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT. \quad (1.30b)$$

Wir haben die van-der-Waals-Gleichung anhand physikalischer Überlegungen aus der Zustandsgleichung des idealen Gases abgeleitet. Hierzu haben wir das Eigenvolumen der Moleküle sowie den Einfluss der intermolekularen Kräfte betrachtet. Die van-der-Waals-Gleichung kann auch auf andere Art hergeleitet werden, aber der von uns eingeschlagene Weg ist sehr anschaulich. Er hat darüber hinaus den Vorteil, dass wir die **van-der-Waals-Konstanten**  $a$  und  $b$  einführen konnten, ohne ihnen eine konkrete physikalische Bedeutung zuschreiben zu müssen. In der Tat sind  $a$  und  $b$  eher als empirische Parameter aufzufassen, das heißt, es ist nicht möglich, diese Parameter quantitativ auf molekulare Eigenschaften zurückzuführen. Die van-der-Waals-Konstanten sind von Gas zu Gas verschieden, jedoch im Unterschied zu den Virialkoeffizienten von der Temperatur unabhängig. In Tab. 1.5 sind die van-der-Waals-Konstanten einiger Gase angegeben. Aus der Art, wie wir die van-der-Waals-Gleichung abgeleitet haben, folgt:

- Die van-der-Waals-Konstante  $a$  (der Parameter für die anziehenden Wechselwirkungen) sollte groß sein für Moleküle, die einander stark anziehen.
- Die van-der-Waals-Konstante  $b$  (der Parameter für die abstoßenden Wechselwirkungen) sollte groß sein für Moleküle, die eine große Ausdehnung besitzen.

Tab. 1.5 Van-der-Waals-Konstanten einiger Gase.

Substanz	$a$ ( $10^2 \text{ kPa dm}^6 \text{ mol}^{-2}$ )	$b$ ( $10^{-2} \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ )
Luft	1,4	0,039
Ammoniak, $\text{NH}_3$	4,225	3,71
Argon, Ar	1,355	3,20
Kohlendioxid, $\text{CO}_2$	3,658	4,29
Ethan, $\text{C}_2\text{H}_6$	5,580	6,51
Ethen, $\text{C}_2\text{H}_4$	4,612	5,82
Helium, He	0,0346	2,38
Wasserstoff, $\text{H}_2$	0,2452	2,65
Stickstoff, $\text{N}_2$	1,370	3,87
Sauerstoff, $\text{O}_2$	1,382	3,19
Xenon, Xe	4,192	5,16

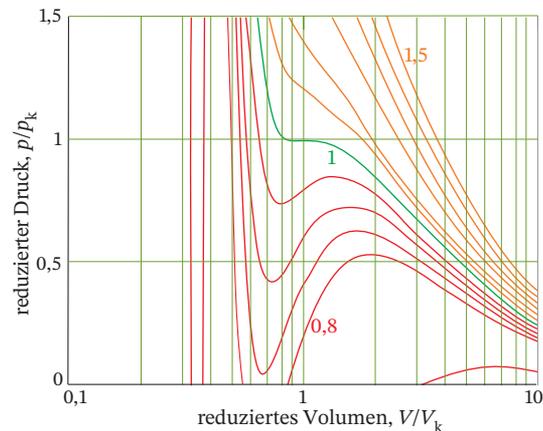
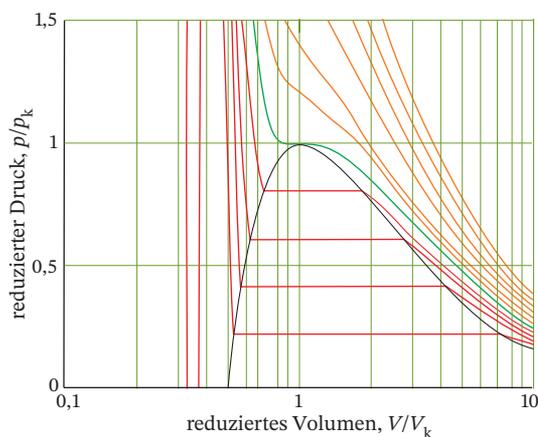


Abb. 1.15 Berechnete van-der-Waals-Isothermen. Druck und Volumen sind auf den Achsen in Einheiten des kritischen Drucks  $p_k$  ( $p_k = a/(27b^2)$ ) bzw. des kritischen Volumens  $V_k$  ( $V_k = 3b$ ) angegeben. Die zu den einzelnen Isothermen gehörigen Temperaturen sind in der Form  $T/T_k$  ( $T_k = 8a/(27Rb)$ ) angegeben. Die zu  $T/T_k = 1$  gehörige Isotherme ist die kritische Isotherme, also die Isotherme bei der kritischen Temperatur.

In Abb. 1.15 sind einige Isothermen gezeigt, die mithilfe der van-der-Waals-Gleichung für unterschiedliche Temperaturen berechnet wurden. Durch einen Vergleich mit experimentell bestimmten Isothermen (Abb. 1.11) können wir beurteilen, wie gut diese Näherungsgleichung das Verhalten realer Gase beschreibt. Alles in allem werden die gemessenen Isothermen recht gut reproduziert, abgesehen von dem wellenartigen Verlauf, den die genäherten Isothermen unterhalb der kritischen Temperatur zeigen. Man nennt diesen Abschnitt einer Isotherme **van-der-Waals-Schleife**. Das von den van-der-Waals-Schleifen vorhergesagte Verhalten ist physikalisch unsinnig, da innerhalb bestimmter Bereiche eine Erhöhung des Drucks zu einer Volumenzunahme führen müsste. Deshalb kann man die van-der-Waals-Schleifen durch geeignete horizontale Linien ersetzen (Abb. 1.16). Die van-der-Waals-Konstanten in Tab. 1.5 wurden durch eine Anpassung der berechneten Kurven an die Verläufe gemessener Isothermen bestimmt.

Aus Abschn. 1.3.1 wissen wir bereits, dass der Verlauf der Isothermen realer Gase umso besser der Zustandsgleichung des idealen Gases entspricht, je höher die Temperatur und je geringer der Druck ist. Wir wollen nun prüfen, ob die van-der-Waals-Gleichung diesen Sachverhalt richtig wiedergibt. Wenn wir auf der rechten Seite von Gl. (1.30a) einen hinreichend hohen Wert für  $T$  einsetzen, ist der zweite Term sehr viel kleiner als der erste und kann daher vernachlässigt werden. Ferner ist bei genügend kleinen Drücken das Ausschlussvolumen  $nb$  deutlich kleiner als das Volumen  $V$  des Gases, so dass wir den Nenner im



**Abb. 1.16** Die physikalisch sinnlosen van-der-Waals-Schleifen können durch horizontale Linien ersetzt werden, die die Schleifen in zwei gleich große Flächen einteilen. Die Isothermen, die sich nach dieser Korrektur ergeben, ähneln sehr stark den experimentellen Isothermen.

ersten Term durch  $V$  ersetzen können. Die van-der-Waals-Gleichung geht somit für hohe Temperaturen und niedrige Drücke in die Zustandsgleichung des idealen Gases ( $p = nRT/V$ ) über. Dies liegt daran, dass bei sehr hohen Temperaturen die kinetische Energie der Moleküle bei weitem die potenzielle Energie der Wechselwirkungen übersteigt. Außerdem ist das Volumen eines Gases unter diesen Bedingungen ebenfalls sehr groß, und die Moleküle verbringen derart viel Zeit im stoßfreien Flug, dass ihr Eigenvolumen vernachlässigt werden kann.

Der Virialkoeffizient  $B$  (siehe Abschn. 1.3.4) kann ebenfalls mit den van-der-Waals-Konstanten in Verbindung gebracht werden. Zunächst schreiben wir die ideale Gasgleichung (Gl. (1.5b)) wie folgt um:

$$\begin{aligned} p &= \frac{nRT}{V - nb} - a \left( \frac{n}{V} \right)^2 = \frac{nRT}{V} \left( \frac{V}{V - nb} - \frac{na}{RTV} \right) \\ &= \frac{nRT}{V} \left( \frac{1}{1 - nb/V} - \frac{a}{RTV/n} \right) \\ &= \frac{nRT}{V} \left( \frac{1}{1 - b/V_m} - \frac{a}{RTV_m} \right). \end{aligned}$$

Wenn wir nun annehmen, dass  $b/V_m \ll 1$  ist und wir darüber hinaus die Näherung  $1/(1 - x) \approx 1 + x$  berücksichtigen (siehe „Toolkit 6: Reihenentwicklung und Näherungen“), dann erhalten wir mit  $x = b/V_m$ :

$$p = \frac{nRT}{V} \left( 1 + \frac{b - a/RT}{V_m} \right).$$

Durch Vergleich dieses Ausdrucks mit der Virialgleichung (Gl. (1.28)) erhalten wir

$$B = b - \frac{a}{RT}. \quad (1.31)$$

Der Virialkoeffizient  $B$  ist positiv, wenn  $b > a/RT$  gilt (Abstoßung dominiert), und er ist negativ für  $b < a/RT$  (Anziehung dominiert), wie bereits zu Beginn angenommen. Die Boyle-Temperatur (bei der  $B = 0$  ist) stellt sich ein, wenn  $b = a/RT$  ist (abstoßende und anziehende Wechselwirkungen sind gleich groß). Das ist der Fall bei  $T_B = a/Rb$ .

### 1.3.6 Die Verflüssigung von Gasen

Ein Gas kondensiert zur Flüssigkeit, wenn es auf eine Temperatur unterhalb des Siedepunkts, dessen Lage vom Druck abhängt, abgekühlt wird. Wenn wir beispielsweise Chlorgas bei einem Druck von 1 atm verflüssigen wollen, müssen wir es auf eine Temperatur unterhalb von  $-34^\circ\text{C}$  abkühlen. Das kann durch ein Kältebad aus Trockeneis (festes Kohlendioxid) erreicht werden. Da die Temperatur des Kältebads die Siedetemperatur des Gases unterschreiten muss, ist dieses einfache Verfahren bei Gasen mit niedrigen Siedepunkten wie Sauerstoff ( $-183^\circ\text{C}$ ) oder Stickstoff ( $-196^\circ\text{C}$ ) praktisch nicht mehr durchführbar.

Ein alternatives technisches Verfahren beruht auf der Wirkung intermolekularer Kräfte. Aus Abschn. 1.2 wissen wir bereits, dass die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle eines Gases proportional zur Quadratwurzel der Temperatur ist (Gl. (1.20a),  $\bar{c} \propto T^{1/2}$ ). Eine Verringerung dieser Geschwindigkeit hat daher eine Abnahme der Temperatur zur Folge. Wenn wir die Molekülgeschwindigkeiten so weit erniedrigen, dass sich die Teilchen aufgrund der anziehenden Wechselwirkungen nicht mehr voneinander lösen können, geht das Gas in den flüssigen Aggregatzustand über.

Um den physikalischen Hintergrund dieses Verfahrens besser verstehen zu können, stellen wir uns zunächst einen Ball vor, der in die Luft geworfen wird: Der Ball wird wegen der Erdanziehung mit zunehmender Höhe langsamer, und seine kinetische Energie wird in potenzielle Energie umgewandelt. Wir wissen bereits, dass auch Moleküle einander anziehen. Diese Wechselwirkung beruht zwar nicht auf der Gravitationswechselwirkung, aber der Effekt ist derselbe. Wie der Ball mit zunehmender Entfernung zur Erde langsamer wird, sollten auch die Geschwindigkeiten der Moleküle abnehmen, wenn diese sich voneinander entfernen. Wenn wir ein Gas expandieren lassen, nimmt das Volumen zu, und daher steigt auch der Abstand der Moleküle untereinander. Wenn wir verhindern, dass bei diesem Vorgang Wärme von außen zugeführt wird, nimmt die Temperatur des Gases ab. Wenn dem Gas ein größeres Volumen zur Verfügung gestellt wird, müssen sich die einzelnen Moleküle von den anziehenden Kräften ihrer Nachbarmoleküle lö-

sen, um das gesamte Volumen ausfüllen zu können. Das erfordert jedoch eine Umwandlung von kinetischer in potenzielle Energie und führt somit zu einer Verlangsamung der Moleküle. Wegen der Abnahme der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle ist das Gas nun kälter als vor der Expansion.

Technisch realisiert man diesen Vorgang, indem man ein komprimiertes Gas durch ein „Drosselventil“, eine sehr feine Öffnung, strömen lässt. Aufgrund des Druckunterschieds expandiert das Gas und kühlt sich dabei ab. Dies wird als **Joule-Thomson-Effekt** bezeichnet. Der Effekt wurde zuerst von James Joule (ihm zu Ehren ist die Einheit der Energie benannt) und William Thomson (dem späteren Lord Kelvin) beobachtet und untersucht. Dieses Verfahren funktioniert nur für reale Gase, bei denen anziehende intermolekulare Wechselwirkungen dominieren. Wenn die Mo-

leküle im Wesentlichen einander abstoßen, wird bei einer Expansion des Gases potenzielle in kinetische Energie umgewandelt und die Geschwindigkeiten der Moleküle nehmen im Mittel zu. Daher führt der Joule-Thomson-Effekt für Gase mit einem Kompressionsfaktor  $Z > 1$  zur Erwärmung, wenn das Gas expandiert.

In der technischen Praxis zur Verflüssigung von Gasen lässt man dieses mehrere Expansions- und Kompressionsschritte in einer sogenannten *Linde-Kühlmaschine* (siehe Abb. 1.17) durchlaufen. In jedem Schritt wird das Gas immer weiter abgekühlt, strömt nun dem noch komprimierten Gas entgegen und kühlt dieses bereits vor der Expansion weiter ab. Nach mehreren Expansionschritten hat sich das Gas so weit abgekühlt, dass es zur Flüssigkeit kondensiert.

### Toolkit 6: Reihenentwicklung und Näherungen

Es ist möglich und oft äußerst nützlich, eine Funktion als Reihenentwicklung zu formulieren in der Form

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

wobei  $c_0, c_1, c_2, \dots$  konstante Koeffizienten sind. Die folgenden Reihen werden in der Physikalischen Chemie häufig benötigt; während (a) für alle  $x$  gilt, sind die Reihen in (b), (c) und (d) nur für  $|x| < 1$  wohldefiniert. Die hinter dem Rundungszeichen ( $\approx$ ) angegebenen Näherungen sind nur gültig, wenn  $x \ll 1$  ist (Abb. T1).

(a)  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \dots \approx 1 + x$

(b)  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots \approx 1 - x$

(c)  $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \approx x$

(d)  $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2}x$

Alle vier dieser Ausdrücke sind Spezialfälle der allgemeinen **Taylorreihe**. Ähnliche Näherungen für weitere Funktionen kann man über die Vorschrift

$$f(x) = f(0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 x^2 + \dots$$

gewinnen, wobei der tiefgestellte Index 0 bedeutet, dass die Ableitungen an der Stelle  $x = 0$  gebildet werden sollen.

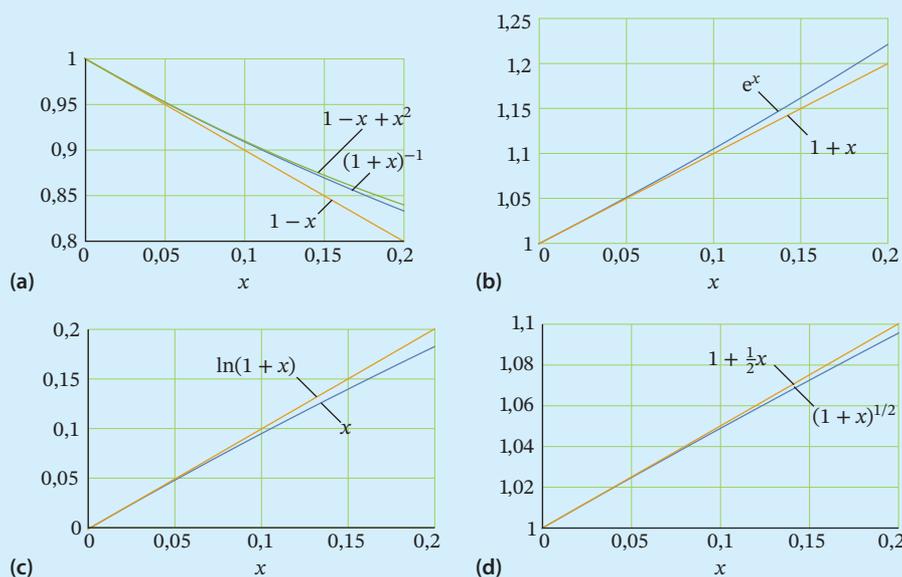
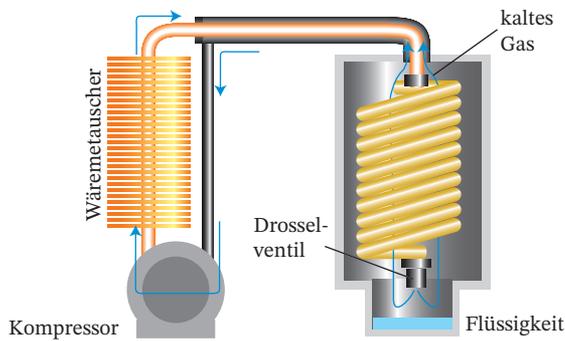


Abb. T1



**Abb. 1.17** Die Funktionsweise einer Linde-Kühlmaschine. Das komprimierte Gas wird vor der Expansion im Gegenstromverfahren abgekühlt, bevor es durch das Drosselventil strömt. Das bereits expandierte Gas übernimmt die Rolle des Kühlmittels. Auf diese Weise werden beim Expansionsschritt immer tiefere Temperaturen erreicht, bis schließlich die Verflüssigung des Gases eintritt.

### Schlüsselkonzepte

1. Das Ausmaß der Abweichungen eines Gases von idealem Verhalten wird im **Kompressionsfaktor** zusammengefasst.
2. Die **Virialgleichung** ist eine empirische Erweiterung des idealen Gasgesetzes, die das Verhalten realer Gase in einem bestimmten Bereich äußerer Bedingungen beschreibt.
3. Aus den Isothermen eines realen Gases lassen sich die Konzepte des **Dampfdrucks** und des **kritischen Verhaltens** ableiten.
4. Ein Gas kann alleine durch Erhöhung des Drucks verflüssigt werden, solange seine Temperatur unterhalb oder exakt bei seiner **kritischen Temperatur** liegt.
5. Die **van-der-Waals-Gleichung** ist eine theoretische Zustandsgleichung für reale Gase, die von den beiden **van-der-Waals-Konstanten**  $a$  bzw.  $b$  abhängt, die anziehende bzw. abstoßende intermolekulare Wechselwirkungen berücksichtigen.
6. Als **Joule-Thomson-Effekt** bezeichnet man das Abkühlen eines Gases, wenn es ohne Zufuhr von Wärme expandiert, nachdem es durch ein Drosselventil geströmt ist.

### Übungsteil Fokus 1 – Gase

#### Übungen

Behandeln Sie alle Gase als ideal, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes verlangt ist.

#### Abschnitt 1.1 – Das ideale Gas

**1.1.1** Geben Sie die Drücke (a) 108 kPa in Torr, (b) 0,975 bar in atm, (c) 22,5 kPa in atm, (d) 770 Torr in Pascal an.

**1.1.2** Welchen Druck übt gasförmiger Stickstoff mit einer Masse von 3,055 g bei 32 °C in einem Gefäß mit einem Volumen von 3,00 dm<sup>3</sup> aus?

**1.1.3** Eine Probe gasförmigen Neons mit einer Masse von 425 mg nimmt bei 77 K ein Volumen von 6,00 dm<sup>3</sup> ein. Wie groß ist der Druck des Gases?

**1.1.4** Überraschenderweise wirkt Stickstoffmonoxid (NO) im menschlichen Körper als Neurotransmitter. Um dieses Phänomen zu untersuchen, wird Stickstoffmonoxid in einem Gefäß mit einem Volumen von 300,0 cm<sup>3</sup> aufgefangen. Bei 14,5 °C beträgt der Druck des Gases 34,5 kPa. Wie groß ist die Stoffmenge an NO-Molekülen?

**1.1.5** In Haushaltsgeräten zur Erzeugung von Sprudelwasser werden Stahlzylinder eingesetzt, die mit Kohlendioxid gefüllt sind. Diese Zylinder haben ein Volumen von 250 cm<sup>3</sup>. Ein voller Zylinder hat eine Masse von 1,04 kg, und – wenn er leer ist – eine Masse von 0,74 kg. Wie groß ist der Druck des Kohlendioxidgases bei 20 °C?

**1.1.6** Man untersucht die Wirkung hoher Drücke auf (auch menschliche) Organismen, um beispielsweise mögliche Gefahren des Tiefseetauchens besser abschätzen zu können. Welcher Druck ist notwendig, um 1,00 dm<sup>3</sup> Luft bei 25 °C und 1,00 atm bei gleicher Temperatur auf ein Volumen von 100 cm<sup>3</sup> zu komprimieren?

**1.1.7** Behälter, die Gase unter Druck enthalten, sind gewöhnlich mit einem Warnhinweis ausgestattet, da sie unbedingt vor hohen Temperaturen geschützt werden müssen. Eine Sprühdose, deren Treibgas bei 18 °C einen Druck von 125 kPa ausübt, wird in ein Feuer geworfen. Wie groß ist der Druck des Gases, wenn die Temperatur der Dose auf 700 °C angestiegen ist?

**1.1.8** An Orten, die tief unter dem Meeresspiegel oder auf der Mondoberfläche liegen, müssen wir den zur Atmung benötigten Sauerstoff in komprimierter Form in Sauerstoffflaschen mit uns führen. Berechnen Sie den Druck von gasförmigem Sauerstoff, der ausgehend von einem Volumen von 7,20 dm<sup>3</sup> bei 101 kPa auf ein Volumen von 4,21 dm<sup>3</sup> komprimiert wird.

**1.1.9** Eine Probe Heliumgas nimmt bei 22,2 °C ein Volumen von 1,00 dm<sup>3</sup> ein. Auf welche Temperatur muss das Gas abgekühlt werden, wenn das Volumen auf 100 cm<sup>3</sup> verringert werden soll?

**1.1.10** Der Auftrieb eines Heißluftballons beruht darauf, dass sich die Luft in der Ballonhülle beim Erwärmen ausdehnt und dadurch ihre Dichte abnimmt. Auf welche Temperatur, ausgehend von 315 K, muss eine gegebene Luftmenge aufgeheizt werden, damit das Volumen um 25 % zunimmt?

**1.1.11** Auf Höhe des Meeresspiegels nimmt eine bestimmte Masse Luft bei einem Druck von 104 kPa und einer Temperatur von 21,1 °C ein Volumen von 2,0 m<sup>3</sup> ein. Wie groß ist das Volumen der gleichen Luftmasse in höheren Regionen der Atmosphäre bei Werten für Druck und Temperatur von (a) 52 kPa, -5,0 °C und (b) 880 Pa, -52,0 °C?

**1.1.12** Die Verschmutzung der Atmosphäre ist ein Problem, das in den letzten Jahren sehr viel Aufmerksamkeit erregt hat. Nun sind aber nicht alle Schadstoffe industriellen Ursprungs. Vulkanische Aktivitäten sind eine nicht zu vernachlässigende Quelle für Luftschadstoffe. Der Vulkan Kilauea auf Hawaii zum Beispiel emittiert 200 bis 300 t Schwefeldioxidgas pro Tag (1 t = 1000 kg). Wie groß ist das Volumen des täglich ausgestoßenen Gases, wenn es bei einer Temperatur von 800 °C und einem Druck von 1,0 atm abgegeben wird?

**1.1.13** Berechnen Sie die Stoffmengenanteile (Molenbrüche) der Komponenten einer Mischung aus 56 g Benzol (C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>) und 120 g Methylbenzol (Toluol, C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>CH<sub>3</sub>).

**1.1.14** Um die Atmosphäre eines anderen Planeten nachzubilden, wird eine Gasmischung aus 320 mg Methan, 175 mg Argon und 225 mg Stickstoff hergestellt. Bei 300 K beträgt der Partialdruck des Stickstoffs 15,2 kPa. Berechnen Sie (a) das Volumen und (b) den Gesamtdruck der Gasmischung.

### Abschnitt 1.2 – Die kinetische Gastheorie

**1.2.1** Berechnen Sie mithilfe der kinetischen Gastheorie die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von (a) N<sub>2</sub>-, (b) H<sub>2</sub>O-Molekülen in der Erdatmosphäre bei 273 K.

**1.2.2** Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit von (a) Heliumatomen und (b) CH<sub>4</sub>-Molekülen bei (i) 79 K, (ii) 315 K und (iii) 1500 K.

**1.2.3** Ein Synthesegas (auch „Syngas“ genannt) besteht aus einem Gemisch aus Wasserstoff und Kohlenmonoxid. Berechnen Sie die relative Rate, ausgedrückt in Molekülen pro Sekunde, mit der die H<sub>2</sub>- und CO-Moleküle aus einem Zylinder entweichen, der eine kleine Öffnung besitzt.

**1.2.4** In einem Zylinder befindet sich Gas zum Betrieb eines CO<sub>2</sub>-Lasers, ein Gemisch aus jeweils gleichen Anteilen von Kohlendioxid, Stickstoff und Helium. Wie groß ist die Masse des durch eine Öffnung entweichenden Stickstoffs bzw. Heliums, wenn im gleichen Zeitraum 1,0 g Kohlendioxid entwichen ist?

**1.2.5** Bei welchem Druck entspricht die mittlere freie Weglänge von Argonatomen ( $\sigma = 0,36 \text{ nm}^2$ ) bei 25 °C dem Durchmesser einer Kugel mit einem Volumen von 1,0 dm<sup>3</sup>?

**1.2.6** Für die Untersuchung photochemischer Prozesse in den oberen Schichten der Atmosphäre benötigen wir in der Regel die Stoßzahlen verschiedener Atome und Moleküle. In einer Höhe von 20 km betragen Temperatur und Druck 217 K bzw. 0,050 atm. Wie groß ist die mittlere freie Weglänge von N<sub>2</sub>-Molekülen ( $\sigma = 0,43 \text{ nm}^2$ ) unter diesen Bedingungen? Wie viele Stöße pro Sekunde finden in dieser Höhe zwischen den N<sub>2</sub>-Molekülen statt?

**1.2.7** Wie oft stößt ein Argonatom (Stoßquerschnitt  $\sigma = 0,36 \text{ nm}^2$ ) in 1,0 s bei einer Temperatur von 25 °C und einem Druck von (a) 10 bar, (b) 100 kPa und (c) 1,0 Pa mit anderen Atomen zusammen?

**1.2.8** Wie hängt die mittlere freie Weglänge der Moleküle von der Temperatur des Gases ab, wenn das Gasvolumen konstant bleibt?

**1.2.9** Die Ausbreitung von Abgasen durch die Atmosphäre wird im Wesentlichen durch Winde, teilweise aber auch durch die Diffusion der Moleküle hervorgerufen. Die Geschwindigkeit des letzteren Prozesses hängt davon ab, wie weit sich ein Molekül bewegt, bevor es mit einem anderen Molekül zusammenstößt. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge eines zweiatomigen Moleküls mit  $\sigma = 0,43 \text{ nm}^2$  in Luft bei 25 °C und (a) 10 bar, (b) 103 kPa und (c) 1,0 Pa.

### Abschnitt 1.3 – Reale Gase

**1.3.1** Der kritische Punkt von Ammoniakgas, NH<sub>3</sub>, liegt bei 111,3 atm, 72,5 cm<sup>3</sup> mol<sup>-1</sup> und 405,5 K. Berechnen Sie den Kompressionsfaktor am kritischen Punkt. Was lässt sich aus dem Ergebnis schließen?

**1.3.2** In der folgenden Tabelle sind die kritischen Konstanten für Methan, Ethan und Propan angegeben. Berechnen Sie aus diesen Daten die Kompressionsfaktoren am kritischen Punkt für diese drei Gase. Was können Sie aus den berechneten Werten erkennen?

	$p_k/\text{atm}$	$V_k/(\text{cm}^3 \text{ mol}^{-1})$	$T_k/\text{K}$
Methan, $\text{CH}_4$	45,6	98,7	190,6
Ethan, $\text{C}_2\text{H}_6$	48,6	260	562,7
Propan, $\text{C}_3\text{H}_8$	41,9	200	369,8

**1.3.3** Berechnen Sie mithilfe der Virialgleichung den Druck, den 1,00 mol  $\text{CH}_4$  bei 273 K in einem Volumen von  $1,00 \text{ dm}^3$  ausübt. Bei dieser Temperatur besitzt der zweite Virialkoeffizient  $B$  den Wert  $-53,6 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ . Gehen Sie davon aus, dass die Virialgleichung nach dem zweiten Term abbricht.

**1.3.4** Das Molvolumen von Sauerstoff,  $\text{O}_2$ , beträgt  $3,90 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$  bei 10,0 bar und  $200^\circ\text{C}$ . Gehen Sie davon aus, dass die Virialgleichung nach dem zweiten Term abbricht, und berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten  $B$  für Sauerstoff bei dieser Temperatur.

**1.3.5** Die Virialgleichung lässt sich in Abhängigkeit vom Druck auch schreiben als:  $Z = 1 + B'p + \dots$ . Die kritischen Konstanten für Wasser,  $\text{H}_2\text{O}$ , sind  $p_k = 218,3 \text{ atm}$ ,  $V_k = 55,3 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  und  $T_k = 647,4 \text{ K}$ . Gehen Sie davon aus, dass die oben angegebene Form der Virialgleichung nach dem zweiten Term abbricht, und berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten  $B'$  für Wasser bei der kritischen Temperatur.

**1.3.6** Berechnen Sie den Druck, den 1,0 mol  $\text{C}_2\text{H}_6$  ausübt, wenn Sie Ethan (a) als ideales Gas, (b) als van-der-Waals-Gas betrachten, und zwar jeweils unter den folgenden Bedingungen: (i) bei  $273,15 \text{ K}$  in  $22,414 \text{ dm}^3$ , (ii) bei  $1000 \text{ K}$  in  $100 \text{ cm}^3$ . Verwenden Sie zur Berechnung die Werte aus Tab. 1.5 in Abschn. 1.3.5.

**1.3.7** Wie zuverlässig sind die Werte, die Sie durch Anwendung der idealen Gasgleichung erhalten im Vergleich zur Anwendung der van-der-Waals-Gleichung? Berechnen Sie hierzu die Differenz der Drücke, die sich aus der van-der-Waals-Gleichung und der Zustandsgleichung des idealen Gases für 10,00 g Kohlendioxid in einem Gefäß mit einem Volumen von  $100 \text{ cm}^3$  bei  $25,0^\circ\text{C}$  ergeben.

**1.3.8** Ein Gas gehorcht der van-der-Waals-Gleichung mit der Konstante  $a = 0,50 \text{ m}^6 \text{ Pa mol}^{-2}$ . Das Volumen beträgt  $5,00 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$  bei  $273 \text{ K}$  und  $3,0 \text{ MPa}$ . Berechnen Sie aus diesen Angaben die van-der-Waals-Konstante  $b$ . Wie groß ist der Kompressionsfaktor dieses Gases bei den angegebenen Werten für Temperatur und Druck?

**1.3.9** Berechnen Sie die Boyle-Temperatur für Kohlenstoffdisulfid,  $\text{CS}_2$ , aus den gegebenen van-der-Waals-Konstanten  $a = 11,77 \text{ dm}^6 \text{ bar mol}^{-2}$ ,  $b = 0,07685 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ .

## Verständnisfragen

**1.1** Beschreiben Sie, wie die von Boyle, Charles und Avogadro durchgeführten Experimente zur Formulierung der Zustandsgleichung des idealen Gases führten.

**1.2** Erläutern Sie den Begriff „Partialdruck“ und beschreiben Sie, warum das Dalton'sche Gesetz ein Grenzgesetz ist.

**1.3** Erklären Sie mithilfe der kinetischen Gastheorie, warum der Anteil leichter Gase, wie  $\text{H}_2$  und  $\text{He}$ , in der Erdatmosphäre gering ist im Vergleich zu schwereren Gasen wie  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$  und  $\text{N}_2$ .

**1.4** Erklären Sie mithilfe einer molekularen Modellvorstellung die Temperaturabhängigkeit der Diffusions- und Effusionsraten von Gasen.

**1.5** Erläutern Sie die Abhängigkeit des Kompressionsfaktors von Druck und Temperatur. Beschreiben Sie, wie man aus dieser Abhängigkeit Informationen über die intermolekularen Wechselwirkungen in realen Gasen gewinnen kann.

**1.6** Welche Bedeutung haben die kritischen Konstanten eines Gases?

**1.7** Beschreiben Sie die einzelnen Schritte, die zur Aufstellung der van-der-Waals-Gleichung führen.

## Aufgaben

**1.1** Eine Taucherglocke hat an Deck eines Schiffs einen Luftraum von  $3,0 \text{ m}^3$ . Wie groß ist das Volumen des Luftraums in  $50 \text{ m}$  Wassertiefe, wenn die Wassertemperatur mit der Temperatur der Luft auf Höhe des Meeresspiegels übereinstimmt? Nehmen Sie eine mittlere Dichte des Meerwassers von  $1,025 \text{ g cm}^{-3}$  an.

**1.2** Wetterballons werden auch heute noch eingesetzt, um Informationen über die Atmosphäre und das Wetter zu erhalten. Im Jahr 1782 ließ Jacques Charles einen mit Wasserstoff gefüllten Ballon von Paris aus  $25 \text{ km}$  weit in die französische Landschaft fliegen. Wie groß ist die Dichte von Wasserstoff relativ zur Dichte der Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Druck? Welche Nutzlast kann von einem Ballon mit  $10 \text{ kg}$  Wasserstoff transportiert werden, wenn die Eigenmasse des Ballons vernachlässigt wird?

**1.3** Ein Wetterballon hat bei  $20^\circ\text{C}$  auf Höhe des Meeresspiegels einen Radius von  $1,5 \text{ m}$ . Nach Erreichen der maximalen Höhe dehnt sich der Ballon auf einen Radius von  $3,5 \text{ m}$  aus. Welcher Druck herrscht innerhalb des Ballons, wenn die Temperatur  $-25^\circ\text{C}$  beträgt?

**1.4** Wasser hat bei der Temperatur des Bluts einen Dampfdruck von 47 Torr. Wie groß ist der Partialdruck der trockenen Luft in der Lunge bei einem Gesamtdruck von 760 Torr?

**1.5** Trockene Luft besteht, bezogen auf die Masse, zu 75,53 % aus Stickstoff, und zu 23,14 % aus Sauerstoff. Der übrige Massenanteil setzt sich aus Edelgasen zusammen, hauptsächlich Argon. Wie groß sind die Stoffmengenanteile (Molenbrüche) der drei genannten Gase?

**1.6** Die Bestimmung der Dichte eines Gases oder Dampfes gibt in guter Näherung Aufschluss über seine Molmasse. Die Dichte einer gasförmigen Substanz in einem Glaskolben wurde bei 330 K und 25,2 kPa zu  $1,23 \text{ g dm}^{-3}$  bestimmt. Welche Molmasse besitzt das untersuchte Gas?

**1.7** Bei der experimentellen Bestimmung der Molmasse eines Gases wurden  $250 \text{ cm}^3$  der Substanz in einen Glaskolben überführt. Der Druck beträgt 152 Torr bei 298 K und die Masse des Gases wurde zu 33,5 mg bestimmt. Welche Molmasse besitzt das untersuchte Gas?

**1.8** Ein Behälter mit einem Volumen von  $22,4 \text{ dm}^3$  enthält 2,0 mol  $\text{H}_2$  und 1,0 mol  $\text{N}_2$  bei 273,15 K. Berechnen Sie (a) die Partialdrücke und (b) den Gesamtdruck der Gasmischung.

**1.9** Ein Glaskolben mit einem Volumen von  $1,0 \text{ dm}^3$  enthält  $1,0 \times 10^{23}$   $\text{H}_2$ -Moleküle. Wenn der Gasdruck 100 kPa beträgt, wie groß ist dann (a) die Temperatur des Gases und (b) die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle? (c) Wäre die Temperatur eine andere, wenn es sich um  $\text{O}_2$ -Moleküle handeln würde?

**1.10** Ein Methanmolekül kann als sphärische Kugel mit einem Radius von 0,38 nm angesehen werden. Wie viele Stöße erleidet jedes einzelne  $\text{CH}_4$ -Molekül, wenn sich eine Stoffmenge von 0,10 mol bei  $25^\circ\text{C}$  in einem Kolben von  $1,0 \text{ dm}^3$  Volumen befindet?

**1.11** Methanmoleküle,  $\text{CH}_4$ , können als sphärische Kugeln betrachtet werden, die einen Stoßquerschnitt von  $\sigma = 0,46 \text{ nm}^2$  besitzen. Geben Sie eine Näherung für den Wert der van-der-Waals-Konstante  $b$  an, indem Sie das molare Ausschlussvolumen der Methanmoleküle berechnen.

**1.12** Eine Probe von 0,200 mol  $\text{Cl}_2$  (g) befindet sich in einem Behälter mit  $250 \text{ cm}^3$  Volumen. Bei einer Temperatur von 500 K übt das Gas einen Druck von 3,06 MPa, und bei 1000 K von 6,54 MPa aus. Berechnen Sie die Werte der van-der-Waals-Konstanten  $a$  und  $b$  für Chlorgas.

**1.13** Die kritischen Konstanten hängen mit den van-der-Waals-Konstanten über folgende Beziehungen zusammen:  $p_k = a/(27b^2)$ ,  $V_k = 3b$  und  $T_k = 8a/(27Rb)$ . Für Ethan lauten die kritischen Konstanten  $p_k = 48,20 \text{ atm}$ ,  $V_k = 148 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  und  $T_k = 305,4 \text{ K}$ . Berechnen Sie die van-der-Waals-Konstanten für Ethangas und geben Sie einen Näherungswert für den Molekülradius an.

**1.14** Durch Messungen bei 273 K wurden die Virialkoeffizienten von Argon bestimmt zu  $B = -21,7 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$  und  $C = 1200 \text{ cm}^6 \text{ mol}^{-2}$ . Wie groß sind die Werte der korrespondierenden Konstanten  $a$  und  $b$  in der van-der-Waals-Gleichung?

### Projekte

Das Symbol ‡ bedeutet, dass die Anwendung von Differenzial- oder Integralrechnung erforderlich ist.

**1.1‡** Mithilfe der Differenzial- und Integralrechnung kann die Maxwell-Boltzmann-Verteilung,  $\rho(v)$ , detaillierter analysiert werden. (a) Die gemittelte Geschwindigkeit von Molekülen nach der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist gegeben durch das Integral  $\int_0^\infty v\rho(v) dv$ . Zeigen Sie mithilfe der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung, dass die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle in einem Gas mit der Molmasse  $M$  bei einer Temperatur  $T$  durch den Ausdruck  $(8RT/\pi M)^{1/2}$  gegeben ist. (Hinweis: Verwenden Sie ein Integral der Form  $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = n!/2a^{n+1}$ .) (b) Zeigen Sie durch Analyse des Integrals  $\int_0^\infty v^2\rho(v) dv$ , dass die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle in einem Gas mit der Molmasse  $M$  bei einer Temperatur  $T$  durch den Ausdruck  $(3RT/M)^{1/2}$  gegeben ist. (Hinweis: Verwenden Sie ein Integral der Form  $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)/2^{n+1} a^2)(\pi/a)^{1/2}$ .) (c) Die Geschwindigkeit, bei der die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung den maximalen Wert annimmt, ergibt sich aus der Bedingung  $d\rho(v)/dv = 0$ . Leiten Sie einen Ausdruck für die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Moleküle in einem Gas mit der Molmasse  $M$  bei einer Temperatur  $T$  her. (d) Berechnen Sie den Anteil aller  $\text{N}_2$ -Moleküle, die sich bei 500 K mit einer Geschwindigkeit zwischen 290 und  $300 \text{ m s}^{-1}$  bewegen.

**1.2** Die kinetische Gastheorie ist immer dann gültig, wenn die Größe der einzelnen Teilchen gegenüber ihrer mittleren freien Weglänge vernachlässigt werden kann. Das Verhalten der dichten Materie im Inneren der Sterne mit der kinetischen Gastheorie und dem Modell des idealen Gases korrekt beschreiben zu wollen, erscheint daher auf den ersten Blick eine völlig absurde Idee zu sein. Im Zentrum der Sonne

zum Beispiel ist die Dichte um den Faktor 150 größer als die Dichte des flüssigen Wassers, auf halbem Weg zur Sonnenoberfläche sind beide Dichten in etwa gleich groß. Nun liegt aber die Materie im Inneren der Sterne als *Plasma* vor. Dieser besondere Aggregatzustand zeichnet sich dadurch aus, dass Elektronen und Atomkerne getrennt voneinander vorliegen, es existieren also keine Atome mehr. Da die Sonne im Wesentlichen aus Wasserstoff und Helium besteht, liegen im Plasma der Sonne Teilchen mit der Größe von Wasserstoff- und Heliumkernen vor, deren Durchmesser ungefähr 10 fm beträgt. Eine mittlere freie Weglänge von 0,1 pm reicht dann aus, um das Kriterium für die Gültigkeit der kinetischen Gastheorie und der Zustandsgleichung des idealen Gases zu erfüllen. Wir können also (näherungsweise) die Gleichung  $pV = nRT$  als Zustandsgleichung zur Beschreibung des Sterninneren verwenden. (a) Berechnen Sie den Druck, der auf halbem Weg zum Zentrum der Sonne herrscht. Wenn wir annehmen, dass das Innere der Sonne zum allergrößten Teil aus ionisierten Wasserstoffatomen besteht, dann herrscht dort eine Temperatur von 3,6 MK und die Dichte der Sonne ist mit  $1,20 \text{ g cm}^{-3}$  etwas größer als die Dichte des flüssigen Wassers. (b) Kombinieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) mit dem Ausdruck, den die kinetische Gastheorie für den Druck liefert. Zeigen Sie, dass der Druck  $p$  des Plasmas mit der *Dichte der kinetischen Energie*,  $\rho_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}/V$ , der kinetischen Energie der Moleküle in einer Region geteilt durch das Volumen der betrachteten Region, über die Beziehung  $p = \frac{2}{3}\rho_{\text{kin}}$  zusammenhängt. (c) Wie groß ist die Dichte der kinetischen Energie auf halbem Weg zum Zentrum der Sonne? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Dichte der (translatorischen) kinetischen Energie in der Erdatmosphäre an einem warmen Tag (25 °C), die nur  $1,5 \times 10^5 \text{ J m}^{-3}$  ( $0,15 \text{ J cm}^{-3}$ ) beträgt. (d) In etwa 5 Milliarden Jahren wird sich unsere Sonne in einen Roten Riesen verwandeln. Dieser Vorgang ist unter anderem damit verbunden, dass sich die dann im Wesentlichen aus Helium bestehende Kugel im Zentrum der Sonne zusammenzieht und dabei sehr stark aufheizt. Das führt nicht nur dazu, dass die Fusionsrate steigt und der Wasserstoff schneller verbraucht wird, sondern auch zu Fusionsreaktionen, bei denen schwerere Atomkerne wie zum Beispiel Kohlenstoffkerne entstehen. Der äußere Teil der Sonne hinge-

gen bläht sich auf und kühlt ab. Nehmen Sie an, dass auf halbem Weg zum Zentrum des Roten Riesen eine Schicht vorliegt, die zum größten Teil aus völlig ionisierten Kohlenstoffatomen und Elektronen besteht und eine Dichte von  $1200 \text{ kg cm}^{-3}$  aufweist. Wie groß ist der Druck an dieser Stelle bei einer Temperatur von 3500 K? (e) Wie groß wäre der Druck bei gleicher Temperatur und Dichte, wenn der Rote Riese aus Teilaufgabe (d) aus neutralen Kohlenstoffatomen bestünde anstatt aus Kohlenstoffkernen und Elektronen?

**1.3** Durch Reihenentwicklung kann eine mathematische Funktion der Form  $(1 - x)^{-1}$  ausgedrückt werden als Potenzreihe  $1 + x + x^2 + \dots$ , solange  $x < 1$  ist. (a) Geben Sie die van-der-Waals-Gleichung in Form einer Virialentwicklung in Potenzen von  $1/V_m$  an. (b) Die *Boyle-Temperatur* ist definiert als diejenige Temperatur, bei der der zweite Virialkoeffizient  $B$  für ein van-der-Waals-Gas den Wert null annimmt. Verwenden Sie den in Teilaufgabe (a) abgeleiteten Ausdruck für  $B$ , um einen Ausdruck für die Boyle-Temperatur in Abhängigkeit von den van-der-Waals-Konstanten  $a$  und  $b$  abzuleiten. (c) Berechnen Sie die Boyle-Temperatur für Kohlendioxid,  $\text{CO}_2$ , ausgehend von den Werten  $a = 3,610 \text{ atm dm}^6 \text{ mol}^{-2}$  und  $b = 4,29 \times 10^{-2} \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ .

**1.4#** Mithilfe der Differenzial- und Integralrechnung kann eine Beziehung zwischen den kritischen Konstanten und den Parametern  $a$  und  $b$  eines van-der-Waals-Gases abgeleitet werden. Der kritische Punkt eines van-der-Waals-Gases entspricht genau dem Sattelpunkt der kritischen Isotherme. An diesem Punkt gelten somit die Bedingungen  $dp/dV_m = 0$  (die Steigung der Isotherme ist null) und  $d^2p/dV_m^2 = 0$  (die Krümmung der Isotherme ist null). (a) Berechnen Sie diese beiden Ableitungen mithilfe von Gl. (1.30a) und leiten Sie für die kritischen Größen jeweils einen Ausdruck in Abhängigkeit von den van-der-Waals-Konstanten her. (b) Zeigen Sie, dass der Kompressionsfaktor am kritischen Punkt den Wert  $\frac{3}{8}$  annimmt. (c) Für Stickstoffdioxid,  $\text{NO}_2$ , nehmen Sie die van-der-Waals-Konstanten folgende Werte an:  $a = 5,354 \text{ dm}^6 \text{ bar mol}^{-1}$  und  $b = 0,04424 \text{ dm}^3 \text{ mol}^{-1}$ . Berechnen Sie die Werte der kritischen Konstanten und zeigen Sie, dass der Kompressionsfaktor am kritischen Punkt den Wert  $\frac{3}{8}$  annimmt.