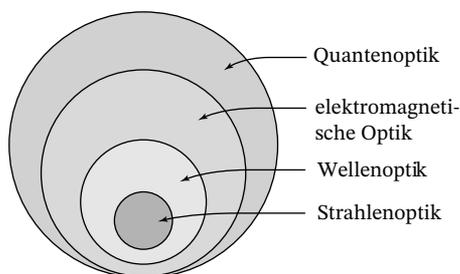


## 1 Strahlenoptik

Licht kann als elektromagnetische Welle beschrieben werden, die denselben theoretischen Prinzipien folgt wie alle anderen Formen elektromagnetischer Strahlung, beispielsweise Radiowellen oder Röntgenstrahlen. Diese Beschreibung von Licht führt zur sogenannten **elektromagnetischen Optik**. Elektromagnetische Strahlung besteht aus zwei gekoppelten *Vektor*wellen für das elektrische und das magnetische Feld. Viele optische Erscheinungen können aber auch im Rahmen einer vereinfachten *skalaren* Wellentheorie behandelt werden, in der Licht durch eine skalare Wellenfunktion beschrieben wird. Diese genäherte Methode zur Beschreibung von Licht heißt skalare Wellenoptik oder einfach **Wellenoptik**.

Wenn sich Lichtwellen um und durch Objekte bewegen, deren Abmessungen viel größer sind als die Wellenlänge des Lichts, tritt die Wellennatur des Lichts nicht unmittelbar in Erscheinung und sein Verhalten kann durch die Annahme erklärt werden, dass sich einzelne Strahlen nach bestimmten geometrischen Regeln ausbreiten. Dieses Modell wird als **Strahlenoptik** bezeichnet. Mathematisch betrachtet ist die Strahlenoptik der Grenzfall der Wellenoptik für unendlich kleine Wellenlängen.



**Abb. 1.1** Die Quantenoptik beschreibt praktisch alle optischen Erscheinungen. Die elektromagnetische Theorie des Lichts (elektromagnetische Optik) gibt die umfassendste Beschreibung von Licht im Rahmen der klassischen Optik. Die Wellenoptik ist wiederum eine skalare Näherung für die elektromagnetische Optik. Strahlenoptik ist schließlich der Grenzfall der Wellenoptik für sehr kleine Wellenlängen.

Die elektromagnetische Optik umfasst somit die Wellenoptik und diese die Strahlenoptik, wie Abb. 1.1 illustriert. Strahlenoptik und Wellenoptik sind Näherungen; ihre Berechtigung beruht darauf, dass sie in ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich Ergebnisse liefern, die eine gute bis sehr gute Annäherung an die Ergebnisse der exakten elektromagnetischen Theorie bieten.

Die elektromagnetische Optik gibt die umfassendste Beschreibung des Lichts im Rahmen der **klassischen Optik**; manche optische Erscheinungen sind aber grundsätzlich quantenmechanischer Natur und können nicht klassisch erklärt werden. Zu ihrer Beschreibung ist eine Quantenversion der elektromagnetischen Theorie nötig, die sogenannte **Quantenelektrodynamik**. Soweit nur auf optische Erscheinungen Bezug genommen wird, wird diese Theorie auch als **Quantenoptik** bezeichnet.

Die verschiedenen optischen Theorien entwickelten sich historisch mehr oder weniger sukzessiv in der Reihenfolge Strahlenoptik → Wellenoptik → elektromagnetische Optik → Quantenoptik. Diese Folge ordnet die Theorien gleichzeitig nach steigender Komplexität und Vollkommenheit; ihre Entwicklung wurde nötig, um immer raffiniertere und genauere optische Experimente theoretisch zu erklären. In der Praxis ist die Theorie der Wahl stets die einfachste, die eine bestimmte Erscheinung erklären kann – allerdings ist es nicht immer einfach, *a priori* zu entscheiden, welches Modell dafür das richtige ist. Glücklicherweise hilft Erfahrung hier oft weiter.

Aus pädagogischen Gründen folgen die ersten Kapitel in diesem Buch der angegebenen historischen Entwicklung. Jede Theorie des Lichts startet mit einem Satz von Postulaten (die ohne Beweis angegeben werden), aus denen eine Vielzahl von Ergebnissen entwickelt werden. Die Postulate einer Theorie tauchen in der Theorie der nächsten Ebene jeweils in Spezialfällen wieder auf. In diesem Kapitel beginnen wir mit der Strahlenoptik.

**In diesem Kapitel ...**

Strahlenoptik ist die einfachste Theorie des Lichts. Dabei wird Licht durch einzelne Strahlen beschrieben, die sich nach bestimmten geometrischen Regeln durch optische Medien bewegen. Aus diesem Grund wird die Strahlenoptik auch als **geometrische Optik** bezeichnet. Strahlenoptik ist eine Näherung. Obwohl sie die meisten alltäglichen Erscheinungen im Zusammenhang mit Licht gut beschreibt, gibt es auch viele Phänomene, die sie nicht erklären kann (wie die restlichen Kapitel dieses Buches eindrucksvoll belegen).

Die Strahlenoptik beschreibt den *Ort* und die *Richtung* von Lichtstrahlen. Sie ist gerade bei der Beschreibung der *Bildentstehung* nützlich, der Sammlung aller von einem gegebenen Punkt eines Gegenstands ausgehenden Lichtstrahlen durch ein optisches Element und ihre Zusammenführung auf den entsprechenden Punkt eines Bilds. Mithilfe der Strahlenoptik können wir Bedingungen angeben, die erfüllt sein müssen, damit Licht in einem bestimmten Medium wie beispielsweise einer Glasfaser geführt wird. In isotropen Medien zeigen die Lichtstrahlen stets in die Ausbreitungsrichtung der *optischen Energie*. Wir können Strahlenbündel konstruieren, in denen die Dichte der Strahlen proportional zur Energiedichte des Lichts ist. Wenn Licht beispielsweise von einer Punktquelle isotrop ausgestrahlt wird, dann ist die Energie der Lichtstrahlen in einem ausgewählten Kegel proportional zum Raumwinkel dieses Kegels. Lichtstrahlen können auf ihrem Weg durch ein optisches System verfolgt werden, um die optische Energie zu bestimmen, die durch einen gegebenen Querschnitt hindurchtritt.

Dieses Kapitel beginnt mit einem Satz von Postulaten, aus denen wir die einfachen Regeln ableiten werden, die die Ausbreitung von Lichtstrahlen durch optische Medien bestimmen. In Abschnitt 1.2 wenden wir diese Regeln auf einfache optische Elemente wie Spiegel oder ebene und sphärische Grenzflächen zwischen verschiedenen optischen Medien an. Die Ausbreitung von Strahlen in inhomogenen optischen Medien (mit variablem Brechungsindex) wird in Abschnitt 1.3 untersucht. Optische Elemente mit variablem Brechungsindex sind die Grundlage einer ganzen Technologie, die einen wichtigen Zweig der modernen Optik bildet.

Optische Komponenten sind oft entlang einer optischen Achse angeordnet, die mittig durch sie hindurchläuft. Strahlen, die nahe der optischen Achse und nahezu parallel zu ihr verlaufen, bezeichnet

man als **paraxiale Strahlen**. Wenn nur solche Strahlen Berücksichtigung finden, spricht man auch von **paraxialer Optik**. Die Veränderung des Ortes und des Winkels eines paraxialen Strahls auf seinem Weg durch ein optisches System kann mithilfe einer  $2 \times 2$ -Matrixalgebra sehr effizient beschrieben werden. Abschnitt 1.4 ist diesem algebraischen Werkzeug gewidmet, der sogenannten **Matrizenoptik**.

**1.1 Postulate der Strahlenoptik**

- Licht breitet sich in Form von Strahlen aus. Die Strahlen werden von Lichtquellen emittiert und können beobachtet werden, wenn sie einen optischen Detektor erreichen.
- Ein optisches Medium wird durch eine Größe  $n \geq 1$  charakterisiert, den **Brechungsindex**. Für den Brechungsindex gilt  $n = c_0/c$ , wobei  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im betrachteten Medium. Die Zeit, die das Licht benötigt, um eine Strecke  $d$  zurückzulegen, ist daher  $d/c = nd/c_0$ . Sie ist proportional zu dem Produkt  $nd$ , das auch als **optische Weglänge** bezeichnet wird.
- In einem inhomogenen Medium ist der Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  eine Funktion des Ortes  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Die optische Weglänge für einen gegebenen Weg zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  ist daher

$$\text{optische Weglänge} = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds, \quad (1.1)$$

wenn  $ds$  das differentielle Längenelement entlang des gewählten Weges ist. Die Zeit, die das Licht von  $A$  nach  $B$  benötigt, ist proportional zur optischen Weglänge.

- **Fermatsches Prinzip.** Zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  bewegen sich Lichtstrahlen so, dass die benötigte Zeit (bzw. die optische Weglänge) im Vergleich zu benachbarten Wegen ein Extremum annimmt. Mathematisch heißt das

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.2)$$

wobei das Symbol  $\delta$  als „Variation von“ zu lesen ist. Das bedeutet, dass die optische Weglänge als Funktion der Streckenführung entweder minimal oder maximal (oder ein Wendepunkt) sein muss. In der Regel entspricht sie einem Minimum, sodass folgende Aussage gilt:

Lichtstrahlen breiten sich entlang des Weges aus, der die kürzeste Zeit in Anspruch nimmt. ■

Manchmal wird diese Bedingung von mehr als einem Weg erfüllt; in diesen Fällen folgen die Lichtstrahlen allen Wegen gleichzeitig. Ein Beispiel für einen Fall, in dem die optische Weglänge maximal ist, ist in Aufgabe 1-1 gezeigt.

In diesem Kapitel nutzen wir die Postulate der Strahlenoptik, um die Regeln zu bestimmen, die für die Ausbreitung von Lichtstrahlen, ihre Reflexion oder Brechung an der Grenzfläche verschiedener Medien und ihre Transmission durch optische Komponenten gelten. Auf dieser Grundlage können wir ohne weitere Annahmen über die Natur des Lichts viele Ergebnisse für zahlreiche optische Systeme ableiten.

### 1.1.1 Ausbreitung in einem homogenen Medium

In einem homogenen Medium ist der Brechungsindex überall gleich, und folglich gilt dasselbe für die Lichtgeschwindigkeit. Der von Fermats Prinzip geforderte Weg der kürzesten Zeit ist folglich gleich der kleinsten optischen Weglänge. Fermats Prinzip reduziert sich in diesem Fall auf das seit dem Altertum bekannte **Prinzip von Hero**: Lichtstrahlen bewegen sich entlang des kürzesten Weges. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Gerade; also folgt: *Lichtstrahlen breiten sich in einem homogenen Medium geradlinig aus* (Abb. 1.2).

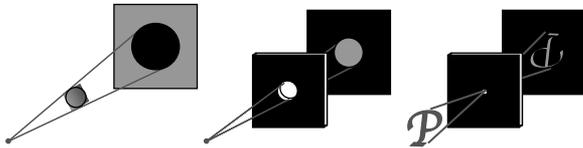


Abb. 1.2 Geradlinige Ausbreitung von Lichtstrahlen. Schatten sind ideale Projektionen von Hindernissen.

#### Reflexion an einem Spiegel

Spiegel werden meist aus sorgfältig polierten metallischen Oberflächen oder dielektrischen Schichten auf einer Unterlage wie z. B. Glas hergestellt. Licht wird an Spiegeln gemäß dem Reflexionsgesetz reflektiert:

*Der reflektierte Strahl liegt in der Einfallsebene; der Ausfallswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.* ■

Die Einfallsebene wird durch den einfallenden Lichtstrahl und die Flächennormale des Spiegels am Einfallspunkt festgelegt. Der Einfallswinkel  $\theta$  und der Ausfallswinkel  $\theta'$  sind in Abb. 1.3(a) definiert. Das Reflexionsgesetz lässt sich leicht aus dem Prinzip von Hero herleiten. Dazu betrachten wir einen Strahl, der sich nach Refle-

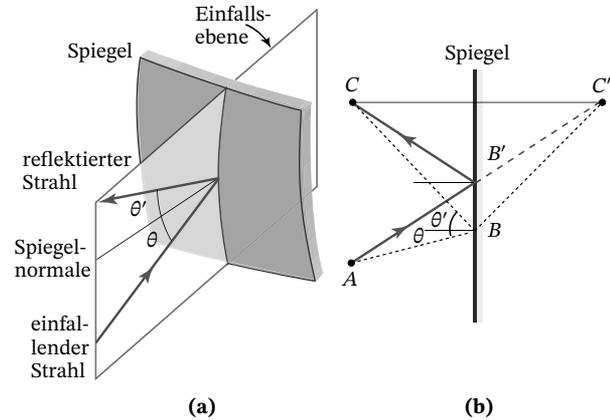


Abb. 1.3 (a) Reflexion an der Oberfläche eines gekrümmten Spiegels. (b) Geometrische Konstruktion zum Beweis des Reflexionsgesetzes.

xion an dem ebenen Spiegel in Abb. 1.3(b) von Punkt A nach Punkt C ausbreitet. Nach dem Prinzip von Hero muss die Strecke  $\overline{AB} + \overline{BC}$  für einen unendlich dünnen Spiegel minimal sein. Wenn  $C'$  ein Spiegelbild von C ist, gilt  $\overline{BC} = \overline{BC'}$ , sodass  $\overline{AB} + \overline{BC'}$  minimal sein muss. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\overline{ABC'}$  eine gerade Linie ist, wenn also B mit  $B'$  zusammenfällt und  $\theta = \theta'$  ist.

#### Reflexion und Brechung an Grenzflächen

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  wird ein einfallender Lichtstrahl in zwei Strahlen aufgespalten, einen reflektierten und einen gebrochenen (oder transmittierten) Strahl (Abb. 1.4). Für den reflektierten Strahl gilt das Reflexionsgesetz; der gebrochene Strahl gehorcht entsprechend dem Brechungsgesetz:

*Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene; der Brechungswinkel  $\theta_2$  hängt mit dem Einfallswinkel  $\theta_1$  gemäß dem snelliusschen Gesetz zusammen,*

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (1.3)$$

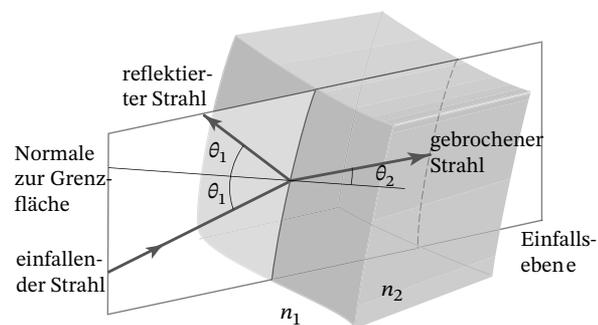


Abb. 1.4 Reflexion und Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei Medien.

## 6 | 1 Strahlenoptik

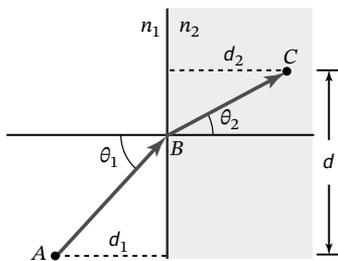


Abb. 1.5 Konstruktion zum Beweis des snelliusschen Gesetzes.

Die Strahlenoptik macht keine Aussage darüber, welche Anteile eines Strahls reflektiert bzw. gebrochen werden.

### Übung 1-1: Das snelliussche Gesetz

Der Beweis des snelliusschen Gesetzes ist eine gute Übung für die Anwendung von Fermats Prinzip. Wir müssen den optischen Lichtweg  $n_1 AB + n_2 BC$  zwischen den Punkten A und C in Abb. 1.5 minimieren. Dazu müssen wir  $n_1 d_1 \sec \theta_1 + n_2 d_2 \sec \theta_2$  als Funktion der Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  unter der Nebenbedingung  $d_1 \tan \theta_1 + d_2 \tan \theta_2 = d$  minimieren. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Minimierung unter der angegebenen Randbedingung zum snelliusschen Gesetz führt.

Die drei einfachen besprochenen Regeln – geradlinige Ausbreitung, Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz – werden wir in Abschnitt 1.2 auf verschiedene Anordnungen von Spiegeln und transparenten optischen Komponenten anwenden, ohne nochmals auf Fermats Prinzip zurückgreifen zu müssen.

## 1.2 Einfache optische Komponenten

### 1.2.1 Spiegel

#### Ebene Spiegel

Ein ebener Spiegel reflektiert die von einem Punkt  $P_1$  ausgehenden Strahlen so, dass die reflektierten Strahlen von einem Punkt  $P_2$  hinter dem Spiegel auszugehen scheinen, der als Bildpunkt bezeichnet wird (Abb. 1.6).

#### Parabolspiegel

Die Oberfläche eines Parabolspiegels ist ein reflektierendes Rotationsparaboloid. Sie hat die nützliche Eigenschaft, dass sie alle parallel zu ihrer Achse einfallenden Strahlen in einem einzigen Punkt bündelt, dem **Brennpunkt**. Die in Abb. 1.7 definierte Entfernung  $\overline{PF} = f$  heißt **Brennweite**. Parabolspiegel werden häufig als Sammelemente in Teleskopen verwendet. Sie wandeln außerdem die Lichtstrahlen einer in ihrem Brennpunkt positionierten Punktquelle wie beispielsweise einem Ta-

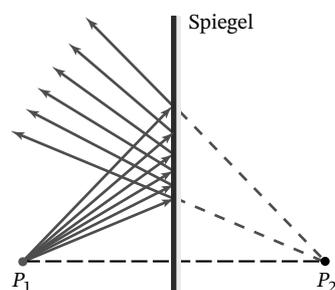


Abb. 1.6 Reflexion an einem ebenen Spiegel.

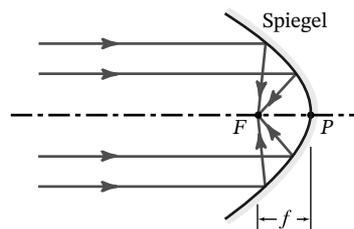


Abb. 1.7 Fokussierung von Lichtstrahlen an einem Parabolspiegel.

schlampenbirnchen in ein paralleles Strahlenbündel um. Wenn ein Parabolspiegel auf diese Weise eingesetzt wird, bezeichnet man ihn auch als **Kollimator**.

#### Elliptische Spiegel

Ein elliptischer Spiegel reflektiert alle von einem seiner beiden Brennpunkte (z. B.  $P_1$ ) ausgehenden Strahlen in den anderen Brennpunkt  $P_2$  (Abb. 1.8). Entsprechend dem Prinzip von Hero sind die von den Strahlen zwischen  $P_1$  und  $P_2$  zurückgelegten Wege alle gleich lang.

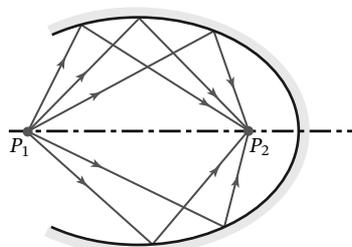


Abb. 1.8 Reflexion an einem elliptischen Spiegel.

#### Sphärische Spiegel

Sphärische Spiegel (Kugelspiegel) sind leichter herzustellen als parabolische oder elliptische. Allerdings besitzen sie weder die fokussierenden Eigenschaften von Parabolspiegeln noch die Abbildungseigenschaften elliptischer Spiegel. Wie Abb. 1.9 zeigt, treffen parallele Strahlen an unterschiedlichen Punkten auf die Spiegelachse; ihre Einhüllende (die gepunktete Kurve) wird *kaustische Fläche* genannt. Immerhin werden paraxiale Strahlen annähernd auf einen Punkt  $F$  in einer Ent-

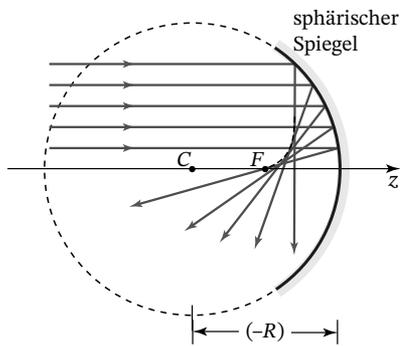


Abb. 1.9 Reflexion von parallelen Strahlen an einem konkaven Kugelspiegel.

fernung  $(-R)/2$  vom Zentrum  $C$  des Spiegels abgebildet. Per Konvention wird der **Krümmungsradius**  $R$  für Konkavspiegel negativ und für Konvexspiegel positiv gezählt.

#### Reflexion von paraxialen Strahlen an Kugelspiegeln

Strahlen, die nahe der Spiegelachse und in einem kleinen Winkel zu ihr verlaufen (sodass  $\sin \theta \approx \theta$  gesetzt werden kann), heißen **paraxiale Strahlen**. In der **paraxialen Näherung** werden nur paraxiale Strahlen berücksichtigt; in diesem Fall fokussieren sphärische Spiegel wie Parabolspiegel und besitzen Abbildungseigenschaften wie elliptische Spiegel. Der aus dieser Näherung entstehende Satz von Regeln wird als **paraxiale Optik** bezeichnet, manchmal auch als **Optik erster Ordnung** oder **gaußsche Optik**.

Ein sphärischer Spiegel mit Radius  $R$  verhält sich in dieser Näherung wie ein Parabolspiegel mit der Brennweite  $f = R/2$ . Das ist nicht weiter überraschend, da eine Parabel in der Nähe der Achse durch einen Kreis angenähert werden kann, dessen Radius gleich dem Krümmungsradius der Parabel ist (Abb. 1.10).

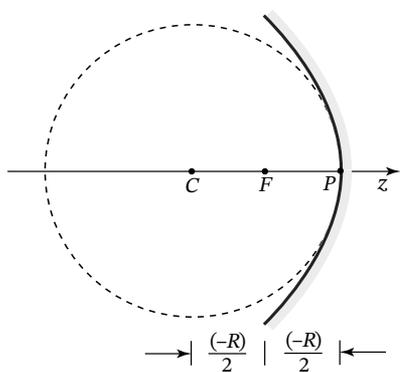


Abb. 1.10 Für paraxiale Strahlen entspricht ein Kugelspiegel einem Parabolspiegel.

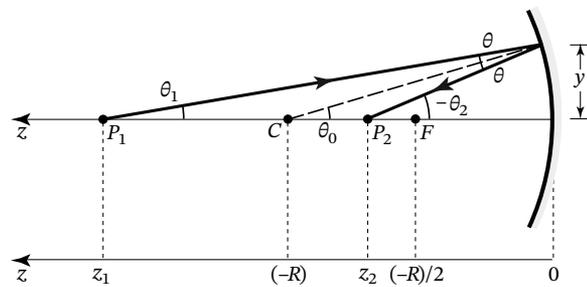


Abb. 1.11 Reflexion paraxialer Strahlen an einem konkaven Kugelspiegel mit Radius  $R < 0$ .

Alle von einem gegebenen Punkt auf der Achse eines sphärischen Spiegels ausgehenden paraxialen Strahlen werden auf einen einzigen Bildpunkt auf der Achse reflektiert. Um das zu verstehen, betrachten wir einen Strahl, der in einem Winkel  $\theta_1$  zur Achse von einem Punkt  $P_1$  in einer Entfernung  $z_1$  von einem Konkavspiegel mit Radius  $R$  ausgeht (Abb. 1.11). Er wird in einem Winkel  $-\theta_2$  reflektiert und trifft an einem Punkt  $P_2$  in einer Entfernung  $z_2$  vom Spiegel auf die Achse. Der Winkel  $\theta_2$  ist negativ, da der Strahl nach unten gerichtet ist. Da sich die Winkel in einem Dreieck zu  $180^\circ$  addieren, gilt  $\theta_1 = \theta_0 - \theta$  und  $-\theta_2 = \theta_0 + \theta$  und daher  $-\theta_2 + \theta_1 = 2\theta_0$ . Wenn  $\theta_0$  hinreichend klein ist, können wir die Näherung  $\tan \theta_0 \approx \theta_0$  verwenden, sodass  $\theta_0 \approx y/(-R)$  ist und wir

$$-\theta_2 + \theta_1 \approx \frac{2y}{-R} \quad (1.4)$$

erhalten, wobei  $y$  die Höhe des Punktes ist, an dem die Reflexion stattfindet. Da der Spiegel konkav ist, ist  $R$  negativ. Wenn sowohl  $\theta_1$  als auch  $\theta_2$  klein sind, ist  $\theta_1 \approx y/z_1$  und  $-\theta_2 = y/z_2$ , sodass wir aus Gl. (1.4)  $y/z_1 + y/z_2 \approx 2y/(-R)$  erhalten; daraus folgt

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \approx \frac{2}{-R}. \quad (1.5)$$

Diese Beziehung gilt für beliebige  $y$  (d. h. unabhängig von  $\theta_1$ ), so lange die paraxiale Näherung gilt. Mit anderen Worten, alle Strahlen, die von  $P_1$  ausgehen, treffen sich in  $P_2$ . Die Entfernungen  $z_1$  und  $z_2$  werden in einem Koordinatensystem gemessen, dessen  $z$ -Achse nach links zeigt. Alle Punkte mit negativen Werten von  $z$  liegen daher rechts des Spiegels.

Nach Gl. (1.5) werden Strahlen, die von einem weit entfernt auf der  $z$ -Achse liegenden Punkt ausgehen ( $z_1 = \infty$ ), auf einen Punkt  $F$  in einer Entfernung  $z_2 = (-R)/2$  abgebildet. Das bedeutet, dass alle aus dem Unendlichen (parallel zur Spiegelachse) einfallenden Strahlen in der paraxialen Näherung in einem Punkt in einer Entfernung  $f$  vom Spiegel gebündelt werden, der

8 | 1 Strahlenoptik

Brennweite des Spiegels:

$$f = \frac{-R}{2}, \tag{1.6}$$

Meist wird Gl. (1.5) in der Form

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}, \tag{1.7}$$

geschrieben, die als **Abbildungsgleichung** bezeichnet wird. Sie gilt nur, wenn sowohl der einfallende als auch der reflektierte Strahl paraxial sind.

**Übung 1-2: Bildentstehung an einem Kugelspiegel**

Zeigen Sie, dass von einem Punkt  $P_1 = (y_1, z_1)$  ausgehende Strahlen im Rahmen der paraxialen Näherung auf einen Punkt  $P_2 = (y_2, z_2)$  reflektiert werden, wobei  $z_1$  und  $z_2$  die Gl. (1.7) erfüllen und  $y_2 = -y_1 z_2 / z_1$  ist (Abb. 1.12). Das bedeutet, dass Strahlen von allen Punkten der Ebene  $z = z_1$  sich in einem einzigen Bildpunkt in der Ebene  $z = z_2$  treffen, sodass der Spiegel als abbildendes System mit der Vergrößerung  $-z_2/z_1$  wirkt. Eine negative Vergrößerung bedeutet, dass das Bild invertiert wird.

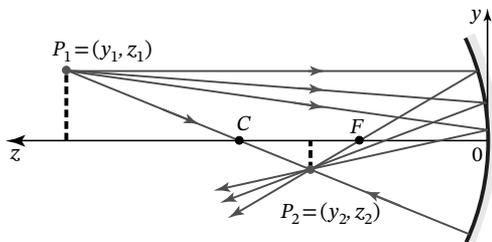


Abb. 1.12 Bildentstehung an einem Kugelspiegel; vier ausgewählte Strahlen sind gezeigt.

**1.2.2 Ebene Grenzflächen**

Das snelliussche Gesetz Gl. (1.3) beschreibt die Beziehung zwischen dem Einfallswinkel  $\theta_1$  und dem Brechungswinkel  $\theta_2$  an einer ebenen Grenzfläche zwischen

zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . In Abb. 1.13 ist diese Beziehung für zwei Fälle aufgetragen:

- 1) *Äußere Brechung* ( $n_1 < n_2$ ): Wenn der Lichtstrahl aus dem Medium mit dem kleineren Brechungsindex kommt, ist  $\theta_2 < \theta_1$  und der gebrochene Strahl wird von der Grenzfläche weg gebrochen.
- 2) *Innere Brechung* ( $n_1 > n_2$ ): Wenn der Lichtstrahl aus dem Medium mit dem größeren Brechungsindex kommt, ist  $\theta_2 > \theta_1$  und der gebrochene Strahl wird in Richtung der Grenzfläche gebrochen.

In beiden Fällen wird der Lichtstrahl so gebrochen, dass die optische Weglänge minimiert, d. h. die Wegstrecke im optisch dünneren Medium zulasten der Wegstrecke im optisch dichteren Medium vergrößert wird. In beiden Fällen ist die Beziehung zwischen  $\theta_2$  und  $\theta_1$  für kleine Winkel (also paraxiale Strahlen) näherungsweise linear,  $n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$  oder  $\theta_2 \approx (n_1/n_2) \theta_1$ .

**Totalreflexion**

Bei der inneren Brechung ( $n_1 > n_2$ ) ist der Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel ( $\theta_2 > \theta_1$ ), sodass mit steigendem  $\theta_1$  irgendwann  $\theta_2 = 90^\circ$  wird (siehe Abb. 1.13). Diese Situation tritt für  $\theta_1 = \theta_k$  (**kritischer Winkel** oder **Grenzwinkel**) ein, wobei  $n_1 \sin \theta_k = n_2 \sin(\pi/2) = n_2$  ist, sodass

$$\theta_k = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}. \tag{1.8}$$

Für  $\theta_1 > \theta_k$  kann das snelliussche Gesetz Gl. (1.3) nicht erfüllt werden und es tritt keine Brechung ein. Der einfallende Strahl wird nun vollständig reflektiert, als ob die Grenzfläche ein idealer Spiegel sei [Abb. 1.14(a)]. Diese sogenannte **Totalreflexion** ist die Grundlage vieler optischer Elemente und Systeme wie beispielsweise reflektierender Prismen [siehe Abb. 1.14(b)], LED-Kollimatoren oder optischer Fasern (siehe Abschnitt 1.2.4). Mithilfe der elektromagnetischen Optik (Fresnelsche Gleichungen in Kapitel 6) kann gezeigt werden, dass der reflektierte Strahl auch die gesamte Energie enthält; die Totalreflexion ist somit ein äußerst effizienter Prozess.

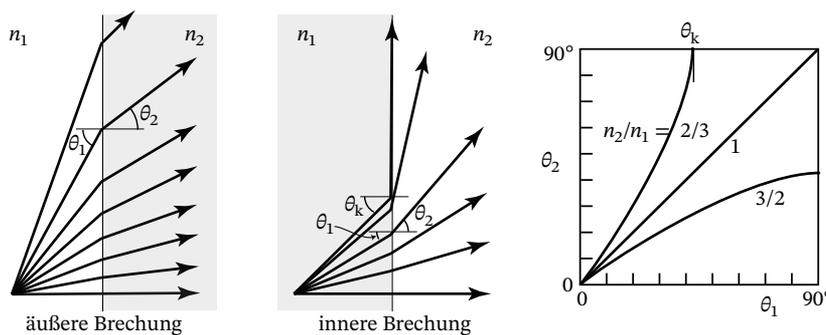
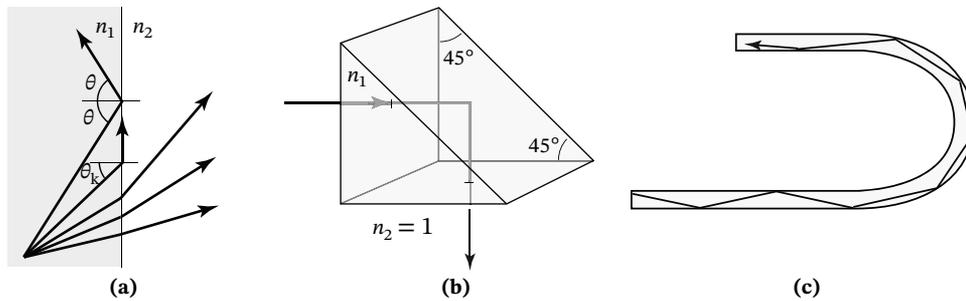
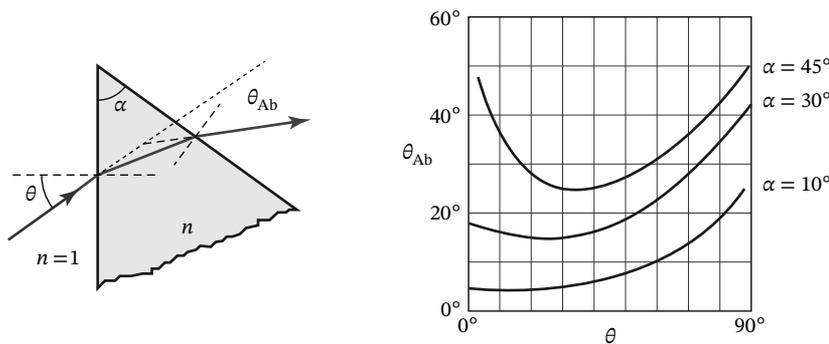


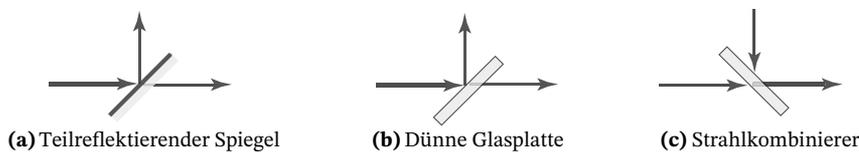
Abb. 1.13 Die Beziehung zwischen Einfalls- und Brechungswinkel.



**Abb. 1.14** (a) Totalreflexion an einer ebenen Grenzfläche. (b) Ein reflektierendes Prisma. Für  $n_1 > \sqrt{2}$  und  $n_2 = 1$  (Luft) ist  $\theta_k < 45^\circ$ ; wegen  $\theta_1 = 45^\circ$  wird der Strahl dann vollständig reflektiert. (c) Lichtstrahlen werden durch Totalreflexion an den inneren Grenzflächen eines Lichtleiters geführt.



**Abb. 1.15** Ablenkung eines Lichtstrahls an einem Prisma. Der Ablenkwinkel  $\theta_{Ab}$  ist für einen gegebenen Öffnungswinkel  $\alpha$  des Prismas und  $n = 1.5$  eine Funktion des Einfallswinkels  $\theta$ . Wenn  $\alpha$  und  $\theta$  klein sind, gilt  $\theta_{Ab} \approx (n - 1)\alpha$ ; die Ablenkung ist dann in erster Näherung unabhängig von  $\theta$  wie in der Kurve für  $\alpha = 10^\circ$  zu erkennen. Für  $\alpha = 45^\circ$  und  $\theta = 0^\circ$  tritt Totalreflexion ein, wie in Abb. 1.14(b) gezeigt.



**Abb. 1.16** Strahlteiler und -kombinierer.

**Prismen**

Ein Prisma mit einem Öffnungswinkel  $\alpha$  und dem Brechungsindex  $n$  (Abb. 1.15) lenkt einen in einem Winkel  $\theta$  einfallenden Strahl um einen Winkel

$$\theta_{Ab} = \theta - \alpha + \sin^{-1} \left[ \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha \right] \quad (1.9)$$

ab. Um diese Beziehung herzuleiten, muss das Snelliussche Gesetz auf jede der beiden brechenden Oberflächen des Prismas angewendet werden. Wenn  $\alpha$  sehr klein ist (dünnes Prisma) und  $\theta$  ebenfalls (paraxiale Näherung), können wir Gl. (1.9) näherungsweise als

$$\theta_{Ab} \approx (n - 1)\alpha \quad (1.10)$$

schreiben.

**Strahlteiler**

Ein Strahlteiler ist ein optisches Element, das den einfallenden Strahl in einen reflektierten und einen transmittierten Strahl aufspaltet (Abb. 1.16). Die relativen Anteile des transmittierten bzw. reflektierten Lichts werden im Rahmen der elektromagnetischen Optik (Kapitel 6)

durch die Fresnelschen Gleichungen bestimmt. Oft werden Strahlteiler auch eingesetzt, um zwei Lichtstrahlen zu einem einzigen zu kombinieren [Abb. 1.16(c)]. Sie bestehen häufig aus einer dünnen, teildurchlässigen metallischen oder dielektrischen Schicht auf einem Glassubstrat. Auch eine dünne Glasplatte wie z. B. der Objektträger eines Mikroskops kann als Strahlteiler wirken, obwohl hier der Anteil des reflektierten Lichts in der Regel klein ist. In der Praxis werden oft transparente Kunststoffe anstelle von Glas eingesetzt.

**Strahlformer**

Mithilfe von einfachen optischen Komponenten können Strahlen in bestimmte Richtungen gelenkt oder in eine bestimmte Form gebracht werden. Die in Abb. 1.17 dargestellten Bauteile lenken einfallende Strahlen um definierte Winkel ab. Das in Abb. 1.17(a) dargestellte **Biprisma** entspricht einer Kombination eines Prismas mit einem identischen, aber umgedrehten Prisma. Das in Abb. 1.17(b) gezeigte **Fresnel-Biprisma** besteht aus Reihen nebeneinander angeordneter kleiner Prismen. Es entspricht in der Wirkung einem Biprisma, ist jedoch dünner und leichter. Die in Abb. 1.17(c) dargestellte ke-

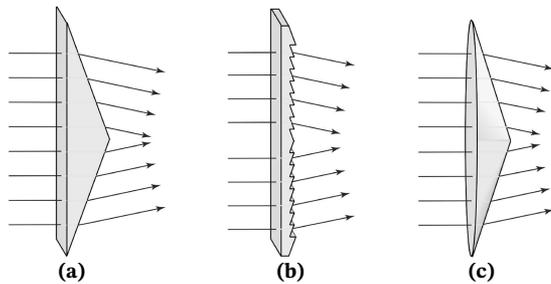


Abb. 1.17 (a) Biprisma. (b) Fresnel-Biprisma. (c) Plankonvexes Axicon.

gelförmige Optik ist unter der Bezeichnung **Axicon** bekannt. Sie wandelt einfallende Strahlen in eine zylindersymmetrische Anordnung von Strahlen um, die kegelförmig auf die zentrale Achse zulaufen. Genau wie das Biprisma hat es einen Querschnitt in Form eines gleichschenkligen Dreiecks.

### 1.2.3 Sphärische Grenzflächen und Linsen

Wir untersuchen nun die Brechung von Lichtstrahlen an einer sphärischen Grenzfläche mit dem Radius  $R$  zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . Per Konvention wird  $R$  für konvexe Grenzflächen positiv und für konkave Grenzflächen negativ gezählt. Wir verwenden dazu das Snelliussche Gesetz für den Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel relativ zur Oberflächennormalen, die durch den Radiusvektor  $\mathcal{C}$  vom Zentrum der Fläche gegeben ist. Die Winkel bezüglich der Normalen müssen von den Winkeln  $\theta_1$  und  $\theta_2$  bezüglich der  $z$ -Achse unterschieden werden. Wenn wir nur paraxiale Strahlen betrachten, deren Winkel zur optischen Achse des Systems klein

sind, sodass  $\sin \theta \approx \theta$  und  $\tan \theta \approx \theta$  gilt, können wir die folgenden Eigenschaften herleiten:

- Ein in einem Winkel  $\theta_1$  zur  $z$ -Achse verlaufender Strahl, der die Grenzfläche an einem Punkt in der Höhe  $y$  trifft und dort einen Winkel  $\theta_0$  mit der Oberflächennormalen einschließt [siehe Abb. 1.18(a)], ändert an der Oberfläche seine Richtung, sodass der reflektierte Strahl in einem Winkel  $\theta_2$  zur  $z$ -Achse bzw.  $\theta_3$  zur Oberflächennormalen verläuft. Mithilfe von Übung 1-3 erhalten wir

$$\theta_2 \approx \frac{n_1}{n_2} \theta_1 - \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{y}{R}. \quad (1.11)$$

- Alle von einem Punkt  $P_1 = (y_1, z_1)$  in der Ebene  $z = z_1$  ausgehenden paraxialen Strahlen treffen sich in einem Punkt  $P_2 = (y_2, z_2)$  in der Ebene  $z = z_2$  (siehe Übung 1-3); es gilt

$$\frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2}{z_2} \approx \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (1.12)$$

und

$$y_2 = -\frac{n_1 z_2}{n_2 z_1} y_1. \quad (1.13)$$

Die Ebenen  $z = z_1$  und  $z = z_2$  heißen *konjugierte Ebenen*. Zu jedem Punkt in der ersten Ebene existiert ein entsprechender Punkt (Bildpunkt) in der zweiten Ebene; die Vergrößerung beträgt  $-(n_1/n_2)(z_2/z_1)$ . Eine negative Vergrößerung bedeutet wieder, dass das Bild invertiert ist. Per Konvention wird  $P_1$  in einem nach links zeigenden und  $P_2$  in einem nach rechts zeigenden Koordinatensystem gemessen (d. h. wenn  $P_2$  links der Grenzfläche liegt, ist  $z_2$  negativ).

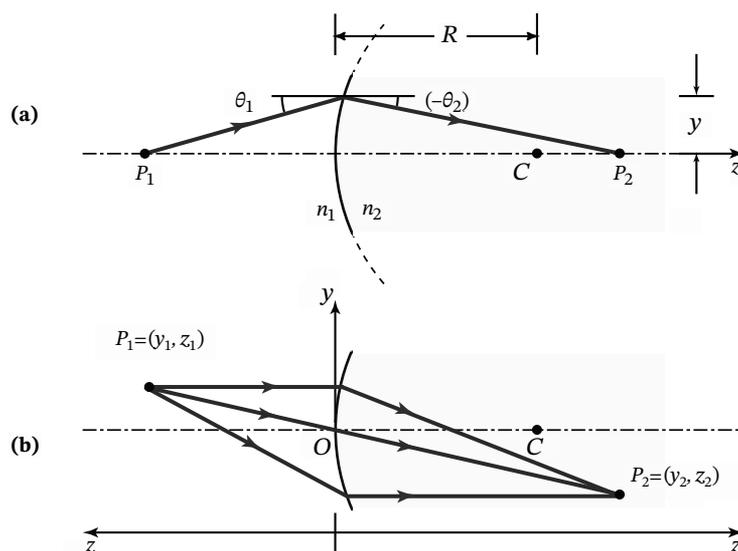


Abb. 1.18 Brechung an einer konvexen sphärischen Grenzfläche ( $R > 0$ ).

Die Ähnlichkeiten zwischen diesen Eigenschaften und denen eines sphärischen Spiegels sind offensichtlich. Allerdings gelten die beschriebenen Abbildungseigenschaften nur näherungsweise – nämlich nur für paraxiale Strahlen. Strahlen, die in einem größeren Winkel zur optischen Achse verlaufen, befolgen diese Regeln nicht; die Abweichungen führen zu Bildfehlern, die unter dem Begriff **Aberration** zusammengefasst werden.

#### Übung 1-3: Bildentstehung

Leiten Sie Gl. (1.11) her. Zeigen Sie, dass paraxiale Strahlen, die von einem Punkt  $P_1$  ausgehen, durch  $P_2$  verlaufen, wenn die Gln. (1.12) und (1.13) erfüllt sind.

#### Übung 1-4: Aberrationsfreie abbildende Oberfläche

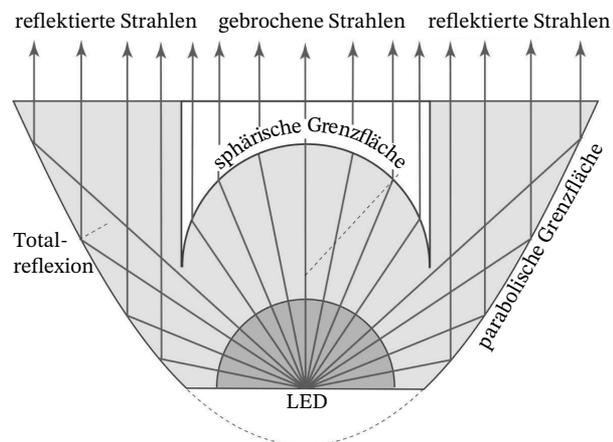
Bestimmen Sie die Gleichung einer konvexen asphärischen (nicht sphärischen) Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  mit der Eigenschaft, dass alle von einem Punkt  $P_1$  auf der optischen Achse in einer Entfernung  $z_1$  links der Grenzfläche ausgehenden (nicht unbedingt paraxialen) Strahlen auf einen Punkt  $P_2$  auf der optischen Achse in einer Entfernung  $z_2$  rechts der Grenzfläche abgebildet werden [Abb. 1.18(a)]. *Hinweis:* Nach dem Fermatschen Prinzip müssen die optischen Weglängen zwischen den beiden Punkten für alle Wege identisch sein.

#### Beispiel 1-1: Kollimator für LED-Licht

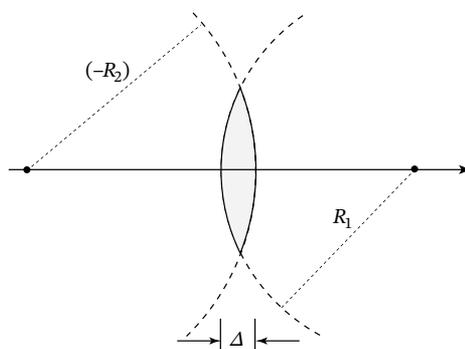
Das von einer LED emittierte Licht (Abschnitt 18.1) wird häufig mithilfe eines optischen Elements kollimiert, dessen Oberfläche die Form eines Rotationsparaboloids hat (Abb. 1.19). Die LED wird dabei im Brennpunkt des Paraboloids platziert, indem ihre halbkugelförmige Kuppel (dunkleres Grau) vom unteren Ende her in eine Aussparung des Kunststoff-Paraboloids eingeführt wird. Strahlen, die durch die Seiten der LED-Kuppel austreten, treffen unter Einfallswinkeln größer als der kritische Winkel auf das Paraboloid und werden daher durch Totalreflexion aus dem Kollimator reflektiert. Strahlen, die durch den zentralen Teil der LED-Kuppel austreten, werden an der sphärischen Oberfläche gebrochen. Optische Systeme, die Reflexion und Brechung kombinieren, werden allgemein als **katadioptrische Systeme** bezeichnet.

#### Sphärische Linsen

Eine **sphärische Linse** wird durch zwei sphärische Oberflächen begrenzt. Sie ist folglich durch die Angabe der beiden Radien  $R_1$  und  $R_2$  der Oberflächen, ihrer Dicke  $\Delta$  und ihres Brechungsindex  $n$  vollständig be-



**Abb. 1.19** Querschnitt eines LED-Kollimators. LED-Kollimatoren sind in vielen Ausführungen erhältlich, die in der Regel eine Kombination von Totalreflexion und Brechung ausnutzen, um an ihrem Ausgang annähernd parallele Lichtstrahlen zu erzeugen. Sie werden häufig aus formgepresstem Acrylat oder Polycarbonat hergestellt, die ähnliche Brechungsindizes wie Glas ( $n \approx 1.5$ ) besitzen. Das dargestellte Element hat an seinem unteren Ende einen Durchmesser von  $\approx 1$  cm.

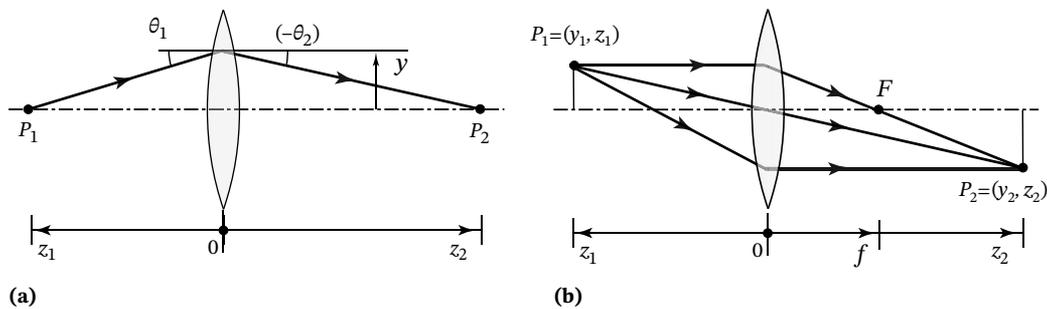


**Abb. 1.20** Eine bikonvexe sphärische Linse.

schrieben (Abb. 1.20). Eine gläserne Linse in Luft kann als Kombination zweier sphärischer Grenzflächen Luft/Glas und Glas/Luft betrachtet werden.

Ein Strahl, der die erste Grenzfläche in einer Höhe  $y$  und in einem Winkel  $\theta_1$  zur  $z$ -Achse trifft [Abb. 1.21(a)], wird dort gemäß Gl. (1.11) in einem Winkel  $\theta$  gebrochen. Den gebrochenen Strahl können wir verlängern, bis er auf die zweite Oberfläche trifft. Dort verwenden wir wieder Gl. (1.11), wobei wir für  $\theta_1$  nun  $\theta$  einsetzen, um den Winkel  $\theta_2$  des Strahls nach der Brechung an der zweiten Oberfläche zu erhalten. Das Ergebnis ist im Allgemeinen kompliziert. Wenn die Linse aber hinreichend dünn ist, können wir annehmen, dass der Strahl die Linse in ungefähr derselben Höhe  $y$  verlässt, in der er eingetreten war. Mit dieser Annahme erhalten wir:

## 12 | 1 Strahlenoptik



**Abb. 1.21**  
(a) Strahlenverlauf in einer dünnen Linse.  
(b) Bildentstehung in einer dünnen Linse.

- Die Winkel des einfallenden und des gebrochenen Strahls hängen gemäß

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{y}{f} \quad (1.14)$$

zusammen, wobei die **Brennweite**  $f$  durch

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.15)$$

gegeben ist.

- Alle von einem Punkt  $P_1 = (y_1, z_1)$  ausgehenden Strahlen treffen sich in einem Punkt  $P_2 = (y_2, z_2)$  [Abb. 1.21(b) und Übung 1-5] mit

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f} \quad (1.16)$$

und

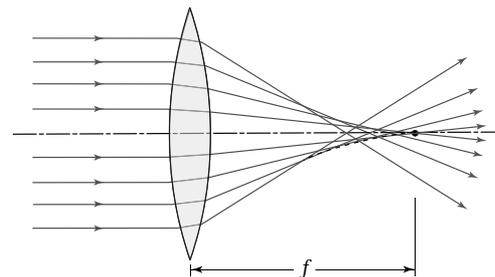
$$y_2 = -\frac{z_2}{z_1} y_1. \quad (1.17)$$

Diese Ergebnisse sind identisch mit denen für einen sphärischen Spiegel [siehe Gl. (1.7) und Übung 1-2].

Die Gleichungen zeigen, dass jeder Punkt in der Ebene  $z = z_1$  auf einen entsprechenden Punkt in der Ebene  $z = z_2$  abgebildet wird; die Vergrößerung ist  $-z_2/z_1$ . Für  $z_1 = z_2 = 2f$  ist die Vergrößerung gleich eins. Die Brennweite  $f$  einer Linse beschreibt daher ihre Wirkung auf paraxiale Strahlen vollständig. Wie bereits zuvor erwähnt, werden  $P_1$  und  $P_2$  in nach links bzw. rechts zeigenden Koordinatensystemen gemessen, und die Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  sind für konvexe Oberflächen positiv und für konkave Oberflächen negativ. Für die in Abb. 1.20 gezeigt bikonvexe Linse ist  $R_1$  positiv und  $R_2$  negativ, sodass die beiden Terme in Gl. (1.15) sich addieren und zu einem positiven  $f$  führen.

#### Übung 1-5: Die Gleichungen für dünne Linsen

Gehen Sie von Gl. (1.11) aus und verwenden Sie die Definition der Brennweite aus Gl. (1.15), um die Gln. (1.14) und (1.16) zu beweisen.



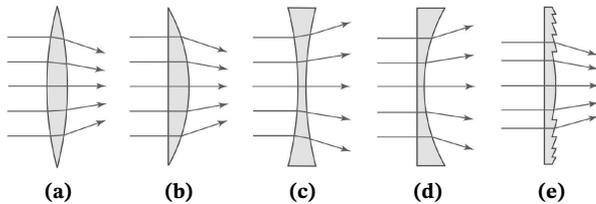
**Abb. 1.22** Nicht paraxiale Strahlen treffen sich nicht im paraxialen Brennpunkt. Die gepunktete Einhüllende der gebrochenen Strahlen wird als kaustische Linie bezeichnet.

Es muss noch einmal betont werden, dass die hier diskutierten Beziehungen nur für paraxiale Strahlen gelten. Nicht paraxiale Strahlen führen zu Aberrationen wie in Abb. 1.22 gezeigt.

#### Konvexe und konkave Linsen

Linsen sind transparente optische Elemente, die Lichtstrahlen je nach der Form ihrer Oberflächen auf definierte Weise brechen. Die gebräuchlichsten Linsen sind wie die zuvor betrachtete bikonvexe Linse sphärische Linsen. Linsen aus einem einzigen Material (im Sichtbaren meist Glas oder Kunststoff) werden als einfache Linsen bezeichnet; Linsen, die aus mehreren solchen einfachen Linsen bestehen, die dabei üblicherweise entlang einer gemeinsamen Achse angeordnet sind, nennt man zusammengesetzte Linsen.

Die Oberfläche einer Linse kann konvex oder konkav sein, je nachdem, ob sie aus der Linse heraus- oder in diese zurückragt, oder sie kann plan sein, also eine flache Oberfläche besitzen. Eine **Zylinderlinse** ist nur in einer Richtung gekrümmt, besitzt also eine Brennweite  $f$  für Strahlen in der  $yz$ -Ebene, aber keine fokussierende Wirkung auf Strahlen in der  $xz$ -Ebene. Eine Linse, bei der eine Oberfläche konvex und die andere konkav ist, wird als **Meniskuslinse** bezeichnet (solche Linsen werden häufig für Brillen verwendet). Eine Linse, bei der eine oder beide Oberflächen eine Form haben, die weder sphärisch noch zylindrisch ist, wird als **asphärische Linse** bezeichnet.



**Abb. 1.23** Linsen: (a) Bikonvex, (b) plankonvex, (c) bikonkav, (d) plankonkav. (e) Eine Fresnellinse, die der in (b) dargestellten plankonvexen Linse entspricht; die Krümmungen sind auf beiden Oberflächen überall gleich.

Abbildung 1.23 zeigt verschiedene Arten von Linsen. Bikonvexe und plankonvexe Linsen bewirken eine Konvergenz der Strahlen und sind daher für die Bildzeugung nützlich, wie Abb. 1.21 zeigt. Bikonkave und plankonkave Linsen bewirken eine Divergenz der Strahlen; sie werden bei der Projektion und in Elementen zur Brennweitenverlängerung (Telekonverter) verwendet. Eine Fresnellinse wird konstruiert, indem alle nichtbrechenden Teile einer herkömmlichen Linse entfernt werden. Daher ist das in Abb. 1.23(e) gezeigte Fresnel-Äquivalent der plankonvexen Linse aus Abb. 1.23(b) ein abgeflachter Satz von konzentrischen Flächen mit identischer Krümmung an allen Stellen der Fläche (außer an den Stufen-Diskontinuitäten). Die Fresnelkonstruktion ermöglicht die Konstruktion dünner, leichter und kostengünstiger Kunststofflinsen mit Größen von Metern bis hinunter zu Mikrometern und kurzen Brennweiten. Fresnellinsen können konvergierend, divergierend oder zylindrisch sein.

#### 1.2.4 Lichtleiter

Durch Linsen oder Spiegel kann Licht von einem Ort zu einem anderen geführt werden, wie Abb. 1.24 illustriert. Da brechende Elemente (wie Linsen) aber immer auch einen Teil des Lichts reflektieren und Spiegel einen Teil des Lichts absorbieren, ist der kumulierte Verlust

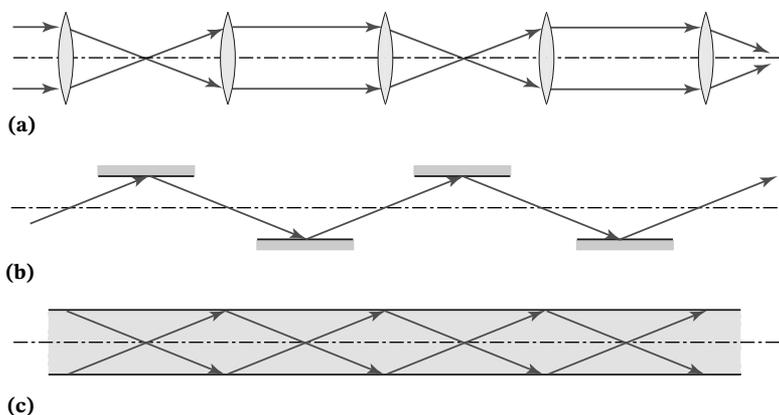
an optischer Leistung signifikant, wenn viele optische Elemente eingesetzt werden. Zwar können diese Effekte minimiert werden (z. B. durch antireflexbeschichtete Linsen), aber ein derartiges System ist umständlich und teuer.

Im Vergleich dazu ist die Totalreflexion an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes ein idealer Mechanismus, um Licht zu führen. Hierbei werden die Strahlen immer wieder verlustfrei reflektiert, ohne Brechung zu erfahren. Mithilfe hochreiner Glasfasern kann Licht mit vergleichsweise geringen Verlusten über Strecken von vielen Kilometern geleitet werden.

Ein Lichtleiter besteht aus zwei konzentrischen Glas- oder Kunststoffzylindern (Abb. 1.25). Der innere, auch als Kern bezeichnet, besitzt den Brechungsindex  $n_1$  und der äußere, der Mantel, einen etwas kleineren Brechungsindex  $n_2 < n_1$ ; man bezeichnet eine solche Anordnung als **Stufenindexfaser**. Lichtstrahlen, die sich im Kern ausbreiten, werden an der Grenzfläche zum Mantel totalreflektiert, wenn ihr Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel ist,  $\bar{\theta} > \theta_k = \sin^{-1}(n_2/n_1)$ . Alle Strahlen mit einem Winkel  $\theta = 90^\circ - \bar{\theta}$  zur optischen Achse sind daher im Kern des Lichtleiters eingeschlossen, sofern die Bedingung  $\theta < \bar{\theta}_k$  erfüllt ist, wobei  $\bar{\theta}_k = 90^\circ - \theta_k = \cos^{-1}(n_2/n_1)$  ist. Lichtleiter werden in der optischen Nachrichtentechnik eingesetzt (siehe Kapitel 10 und 25). Einige wichtige Eigenschaften werden in Übung 1-6 hergeleitet.

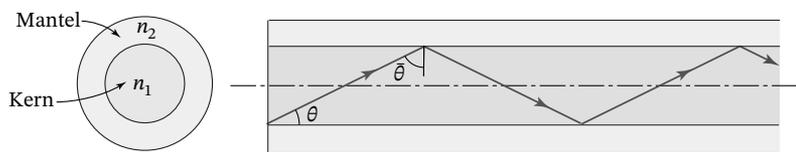
#### Übung 1-6: Numerische Apertur und Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters

Ein Lichtleiter wird von einer Lichtquelle (z. B. einer Leuchtdiode, LED) bestrahlt. Die Brechungsindizes von Kern und Mantel des Leiters sind  $n_1$  und  $n_2$ ; der Brechungsindex der Luft ist 1 (Abb. 1.26). Zeigen Sie, dass der halbe Öffnungswinkel  $\theta_A$  des Strahlkegels, den der Lichtleiter aufnehmen (d. h. ohne Brechung

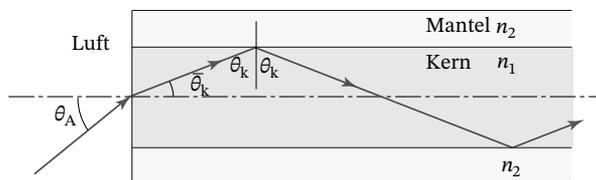


**Abb. 1.24** Lichtführung: (a) Linsen; (b) Spiegel; (c) Totalreflexion.

## 14 | 1 Strahlenoptik



**Abb. 1.25** Ein Lichtleiter. Er leitet das Licht durch wiederholte Totalreflexion.  $\theta$  ist der Winkel des Strahls zur Achse des Lichtleiters, sein Komplement  $\tilde{\theta} = 90^\circ - \theta$  ist der Einfallswinkel auf die dielektrische Grenzfläche.



**Abb. 1.26** Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters.

am Mantel weiterleiten) kann, die Beziehung

$$NA = \sin \theta_A = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.18)$$

erfüllt. Der Winkel  $\theta_A$  wird als **Akzeptanzwinkel** bezeichnet, und der Parameter  $NA \equiv \sin \theta_A$  ist die **numerische Apertur** des Leiters. Berechnen Sie die numerische Apertur und den Akzeptanzwinkel einer Quarzglasfaser mit  $n_1 = 1.475$  und  $n_2 = 1.460$ . Quarzglas besteht aus amorphem Siliciumdioxid ( $\text{SiO}_2$ ). Es ist wegen seiner ausgezeichneten optischen und mechanischen Eigenschaften weit verbreitet; unter anderem hat es den Vorteil, dass sein Brechungsindex durch Dotierung (z. B. mit  $\text{GeO}_2$ ) sehr bequem verändert werden kann.

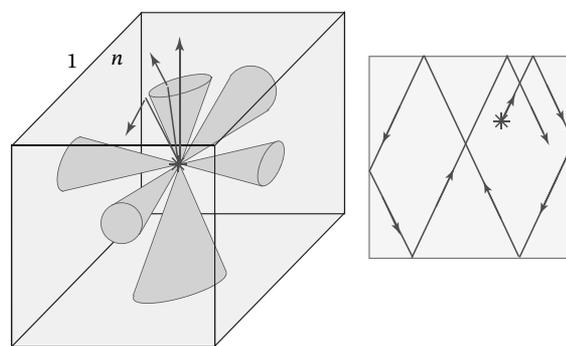
### Eingrenzung von Licht in Medien mit großem Brechungsindex

Es ist oft schwierig, Licht aus einem Medium mit großem Brechungsindex in ein Medium mit kleinem Brechungsindex wie z. B. Luft auszukoppeln, vor allem, wenn das Medium mit großem Brechungsindex durch parallele Oberflächen begrenzt ist. In solchen Fällen erfahren manche Strahlen andauernde Totalreflexion, ohne jemals ins Freie gebrochen zu werden; das Prinzip wird in Übung 1-7 untersucht.

#### Übung 1-7: In einer Leuchtdiode eingegrenztes Licht

(a) Nehmen Sie an, dass in einem Parallelepiped mit dem Brechungsindex  $n$  (Abb. 1.27) Licht erzeugt wird und sich isotrop ausbreitet. Das System soll von Luft (Brechungsindex 1) umgeben sein, ähnlich wie es z. B. in Leuchtdioden der Fall ist (siehe Kapitel 18). Welchen Öffnungswinkel hat der Strahlkegel (in dem Parallelepiped), der aus den Seitenflächen austritt? Was passiert mit den restlichen Strahlen? Wie groß ist der Winkel für GaAs ( $n = 3.6$ )?

(b) Nehmen Sie an, dass bei isotroper Lichterzeugung die optische Leistung der Strahlung in einem gegebenen Kegel proportional zum Öffnungswinkel des Kegels ist. Zeigen Sie dann, dass das Verhältnis der aus dem Parallelepiped entnommenen zur insgesamt erzeugten optischen Leistung gleich  $3(1 - \sqrt{1 - 1/n^2})$  ist, sofern  $n > \sqrt{2}$  gilt. Welchen Zahlenwert hat dieses Verhältnis für GaAs?



**Abb. 1.27** Eingrenzung von Licht in einem Parallelepiped mit großem Brechungsindex.

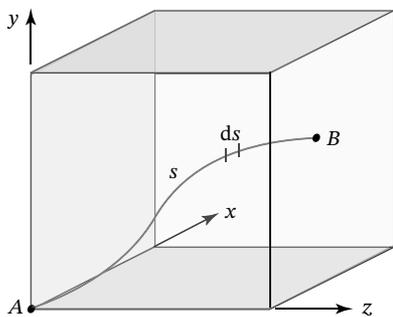
## 1.3 Gradientenindexoptik

In vielen Medien ist der Brechungsindex eine stetige Funktion  $n(\mathbf{r})$  des Ortes. Dies kann z. B. durch kontrolliertes Hinzufügen von Verunreinigungen (Dotierung) während der Herstellung erreicht werden. In einem solchen Medium verlaufen Lichtstrahlen nicht geradlinig, sondern entlang gekrümmter Wege. Wenn  $n(\mathbf{r})$  geeignet gewählt wird, kann eine einfache Platte aus einem solchen Medium dieselbe Wirkung auf einen Lichtstrahl zeigen wie ein konventionelles optisches Element, beispielsweise ein Prisma oder eine Linse.

### 1.3.1 Die Strahlengleichung

Um die Wege von Lichtstrahlen in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  zu bestimmen, verwenden wir Fermats Prinzip,

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.19)$$



**Abb. 1.28** Die Bahn des Lichtstrahls wird parametrisch durch drei Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  oder durch zwei Funktionen  $x(z)$  und  $y(z)$  beschrieben.

wobei  $ds$  eine differentielle Wegstrecke entlang der Trajektorie des Strahls zwischen  $A$  und  $B$  ist. Wenn der Lichtweg durch die Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  beschrieben wird, wobei  $s$  die Position entlang der Trajektorie ist (Abb. 1.28), dann kann man mithilfe der Variationsrechnung zeigen<sup>1)</sup>, dass  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  drei partielle Differentialgleichungen erfüllen müssen:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (1.20)$$

Wenn wir nun den Vektor  $\mathbf{r}(s)$  mit den Komponenten  $x(s)$ ,  $y(s)$  und  $z(s)$  definieren, können wir Gl. (1.20) als Vektorgleichung und somit kompakter formulieren:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (1.21)$$

wobei  $\nabla n$ , der Gradient von  $n$ , ein Vektor mit den kartesischen Komponenten  $\partial n / \partial x$ ,  $\partial n / \partial y$  und  $\partial n / \partial z$  ist. Gleichung (1.21) wird als **Strahlengleichung** bezeichnet.

Zur Lösung der Strahlengleichung kann man die Trajektorie durch zwei Funktionen  $x(z)$  und  $y(z)$  ausdrücken,  $ds = dz \sqrt{1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2}$  schreiben und diesen Ansatz in Gl. (1.21) einsetzen, um zwei partielle Differentialgleichungen für  $x(z)$  und  $y(z)$  zu erhalten. Dieser Weg ist im Allgemeinen rechnerisch aufwendig; bei Verwendung der paraxialen Näherung wird er aber deutlich einfacher.

#### Die paraxiale Strahlengleichung

In der paraxialen Näherung verläuft der Strahl nahezu parallel zur  $z$ -Achse, sodass  $ds \approx dz$  gilt (Abb. 1.29). Die



**Abb. 1.29** Der Weg eines paraxialen Strahls in einem Medium mit variablem Brechungsindex.

Strahlengleichung (1.20) vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{dz} \left( n \frac{dy}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (1.22)$$

Wenn die Funktion  $n = n(x, y, z)$  bekannt ist, können diese beiden partiellen Differentialgleichungen gelöst werden, um den Lichtweg  $x(z)$  und  $y(z)$  zu berechnen.

Im Grenzfall eines homogenen Mediums, in dem  $n$  nicht von  $x$ ,  $y$  und  $z$  abhängt, liefert Gl. (1.22)  $d^2x/dz^2 = 0$  und  $d^2y/dz^2 = 0$ , woraus folgt, dass  $x$  und  $y$  lineare Funktionen von  $z$  sind, die Strahlen sich also geradlinig ausbreiten. Interessante Fälle werden wir in Kürze untersuchen.

### 1.3.2 Optische Komponenten mit variablem Brechungsindex

#### Platte mit variablem Brechungsindex

Wir betrachten eine Platte, deren Brechungsindex  $n = n(y)$  in  $x$ - und  $z$ -Richtung konstant ist, aber in  $y$ -Richtung stetig variiert (Gradientenindexplatte, Abb. 1.30). Die Trajektorien von paraxialen Strahlen in der  $yz$ -Ebene werden dann durch die paraxiale Strahlengleichung beschrieben,

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dy}{dz} \right) = \frac{dn}{dy}, \quad (1.23)$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn(y)}{dy} \quad (1.24)$$

folgt. Wenn  $n(y)$  bekannt und die Randbedingungen ( $y$  und  $dy/dz$  für  $z = 0$ ) festgelegt sind, kann Gl. (1.24) gelöst und die Funktion  $y(z)$  bestimmt werden, die die Trajektorien der Strahlen beschreibt.

#### Herleitung: Die paraxiale Strahlengleichung in einer Platte mit variablem Brechungsindex

Gleichung (1.24) kann auch direkt aus dem Snelliusschen Gesetz hergeleitet werden (Abb. 1.30).  $\theta(y) \approx dy/dz$  sei der Winkel des Strahls zur  $z$ -Achse am Ort  $(y, z)$ . Nach Durchtritt durch eine Schicht der Dicke  $\Delta y$

1) Der Beweis sprengt den Rahmen dieses Buches; siehe z. B. R. Weinstock, *Calculus of Variations: With Applications to Physics and Engineering*, Dover 1974.

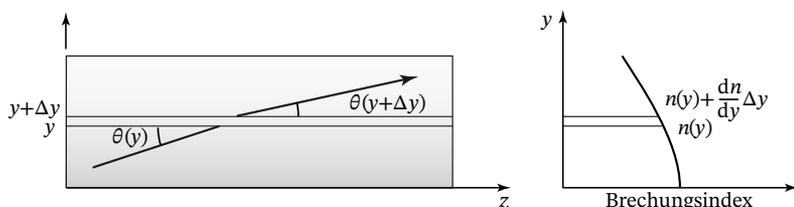


Abb. 1.30 Brechung in einer Platte mit variablem Brechungsindex.

ändert sich der Winkel des Strahls zu  $\theta(y + \Delta y)$ . Diese beiden Winkel hängen über das Snelliussche Gesetz zusammen, wobei  $\theta$  nach der Definition aus Abb. 1.30 das Komplement des Einfallswinkels (Brechungswinkels) ist:

$$\begin{aligned} n(y) \cos \theta(y) &= n(y + \Delta y) \cos \theta(y + \Delta y) \\ &= \left[ n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right] \left[ \cos \theta(y) - \frac{d\theta}{dy} \Delta y \sin \theta(y) \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Dabei haben wir die Entwicklung  $f(y + \Delta y) = f(y) + (df/dy)\Delta y$  auf die Funktionen  $f(y) = n(y)$  und  $f(y) = \cos \theta(y)$  angewendet. Im Grenzfall  $\Delta y \rightarrow 0$  erhalten wir durch Vernachlässigen des Terms in  $(\Delta y)^2$  die Differentialgleichung

$$\frac{dn}{dy} = n \frac{d\theta}{dy} \tan \theta. \quad (1.26)$$

Für paraxiale Strahlen ist  $\theta$  sehr klein, sodass  $\tan \theta \approx \theta$  gilt. Wenn wir  $\theta = dy/dz$  in Gl. (1.26) einsetzen, erhalten wir Gl. (1.24).

#### Beispiel 1-2: Platte mit parabolischem Indexprofil

Eine wichtige spezielle Verteilung des Brechungsindex ist

$$n^2(y) = n_0^2 (1 - \alpha^2 y^2). \quad (1.27)$$

Diese Funktion ist symmetrisch in  $y$  und besitzt ein Maximum bei  $y = 0$  (Abb. 1.31). Glasplatten mit einem derartigen Indexprofil werden unter dem Handelsnamen SELFOC vertrieben. Meist wird  $\alpha$  so klein gewählt, dass für alle interessierenden  $y$  die Beziehung  $\alpha^2 y^2 \ll 1$  erfüllt ist. Dann ist  $n(y) = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 y^2} \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2)$ ; d. h.  $n(y)$  ist eine parabolische Verteilung. Wegen  $n(y) - n_0 \ll n_0$  ist auch die relative Änderung des Brechungsindex sehr klein. Wenn wir die Ableitung von Gl. (1.27) bilden, liefert die rechte Seite von Gl. (1.24)  $(1/n) dn/dy = -(n_0/n)^2 \alpha^2 y \approx -\alpha^2 y$ , sodass Gl. (1.24) die Form

$$\frac{d^2 y}{dz^2} \approx -\alpha^2 y \quad (1.28)$$

annimmt. Die Lösungen dieser Gleichung sind harmonische Funktionen mit der Periode  $2\pi/\alpha$ . Wenn wir  $y(0) = y_0$  und  $dy/dz = \theta_0$  bei  $z = 0$  im Inneren des Mediums ansetzen, erhalten wir

$$y(z) = y_0 \cos \alpha z + \frac{\theta_0}{\alpha} \sin \alpha z, \quad (1.29)$$

woraus sich für die Steigung des Lichtwegs

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = -y_0 \alpha \sin \alpha z + \theta_0 \cos \alpha z \quad (1.30)$$

ergibt. Der Strahl oszilliert mit einer (räumlichen) Periode  $2\pi/\alpha$  um das Zentrum der Platte, wie in Abb. 1.31 gezeigt. Die maximale Auslenkung des Strahls ist  $y_{\max} = [y_0^2 + (\theta_0/\alpha)^2]^{1/2}$  und der maximale Winkel des Lichtwegs ist  $\theta_{\max} = \alpha y_{\max}$ . Diese genäherte Analyse gilt, solange  $\theta_{\max} \ll 1$  ist. Wenn  $2y_{\max}$  kleiner wird als die Dicke der Platte, ist der Strahl in der Platte gefangen; sie wirkt dann als Lichtleiter. Abbildung 1.32 zeigt die Lichtwege einiger Strahlen in einer SELFOC-Platte – alle Strahlen haben dieselbe Periode. Eine solche Platte mit variablem Brechungsindex kann als Linse eingesetzt werden, wie Übung 1-8 zeigt.

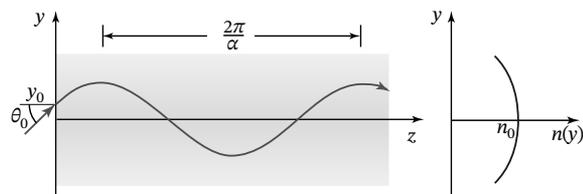
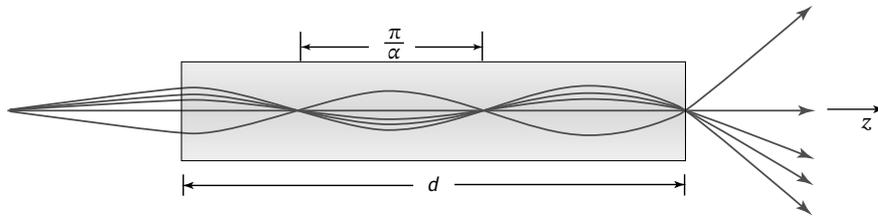


Abb. 1.31 Lichtweg in einer Platte mit parabolischem Indexprofil (SELFOC-Platte).

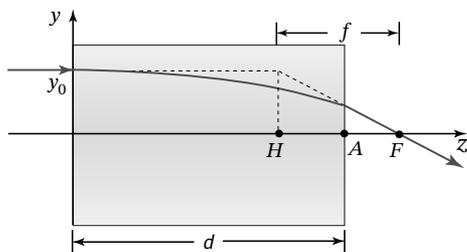
#### Übung 1-8: Platten mit variablem Brechungsindex als Linsen

Zeigen Sie, dass eine SELFOC-Platte mit der Länge  $d < \pi/2\alpha$  und einem Brechungsindex gemäß Gl. (1.27) als Zylinderlinse (sammelnd in der  $yz$ -Ebene) mit der Brennweite

$$f \approx \frac{1}{n_0 d \alpha \sin \alpha} \quad (1.31)$$



**Abb. 1.32** Lichtwege von Strahlen aus einer externen Punktlichtquelle in einer SELFOC-Platte.



**Abb. 1.33** Eine SELFOC-Platte als Linse;  $F$  ist der Brennpunkt,  $H$  der Hauptpunkt.

wirkt. Zeigen Sie, dass der Hauptpunkt (wie in Abb. 1.33 definiert) in einer Entfernung  $\overline{AH} \approx (1/n_0\alpha) \cdot \tan(\alpha d/2)$  vom Rand der Platte liegt. Skizzieren Sie die Lichtwege von Strahlen für die Spezialfälle  $d = \pi/\alpha$  und  $\pi/2\alpha$ .

#### Fasern mit variablem Brechungsindex

Eine Faser mit variablem Brechungsindex (Gradientenindexfaser) ist ein Glaszylinder mit einem Brechungsindex  $n$ , der mit dem radialen Abstand von der Achse variiert. In der paraxialen Näherung sind die Lichtwege durch die paraxiale Strahlengleichung gegeben, Gl. (1.22). Wir betrachten nun das Indexprofil

$$n^2 = n_0^2 [1 - \alpha^2 (x^2 + y^2)] . \quad (1.32)$$

Wenn wir Gl. (1.32) in Gl. (1.22) einsetzen und annehmen, dass für alle interessierenden  $x$  und  $y$  die Beziehung  $\alpha^2(x^2 + y^2) \ll 1$  erfüllt ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dz^2} &\approx -\alpha^2 x , \\ \frac{d^2y}{dz^2} &\approx -\alpha^2 y . \end{aligned} \quad (1.33)$$

Sowohl  $x$  als auch  $y$  sind folglich harmonische Funktionen von  $z$  mit der Periode  $2\pi/\alpha$ . Die Anfangswerte  $(x_0, y_0)$ ,  $\theta_{x0} = dx/dz$  und  $\theta_{y0} = dy/dz$  für  $z = 0$  bestimmen die Amplituden und Phasen dieser harmonischen Funktionen. Wegen der Zylindersymmetrie können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $x_0 = 0$  setzen.

Die Lösung von Gl. (1.33) ist dann

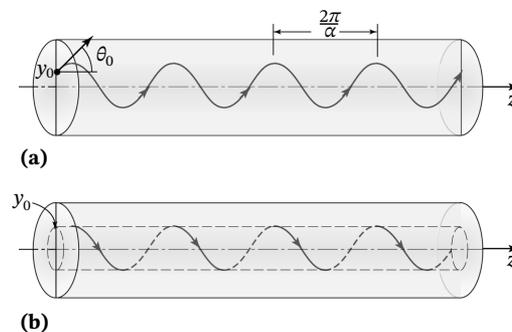
$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{\theta_{x0}}{\alpha} \sin \alpha z \\ y(z) &= \frac{\theta_{y0}}{\alpha} \sin \alpha z + y_0 \cos \alpha z . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Wenn  $\theta_{x0} = 0$  ist, d. h. der einfallende Strahl in einer meridionalen Ebene liegt (einer Ebene, die die Zylinderachse enthält, in diesem Fall die  $yz$ -Ebene), dann bleibt der Strahl in dieser Ebene und folgt dort einem sinusförmigen Weg ähnlich dem in einer Gradientenindexplatte [Abb. 1.34(a)].

Wenn andererseits  $\theta_{y0} = 0$  und  $\theta_{x0} = \alpha y_0$  ist, dann folgt

$$\begin{aligned} x(z) &= y_0 \sin \alpha z \\ y(z) &= y_0 \cos \alpha z , \end{aligned} \quad (1.35)$$

und der Strahl folgt einem helikalen (schraubenförmigen) Weg auf der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius  $y_0$  [Abb. 1.34(b)]. In beiden Fällen ist der Strahl in der Faser gefangen, die somit als Lichtleiter wirkt. Für andere einfallende Strahlen entstehen unterschiedliche helikale Lichtwege.

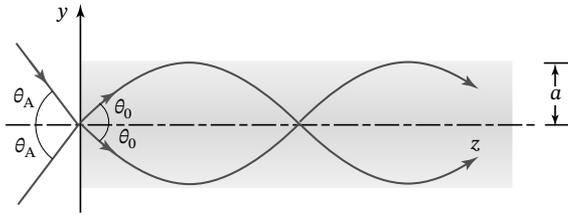


**Abb. 1.34** (a) Meridionale und (b) helikale Strahlen in einer Faser mit parabolischem Indexprofil.

Gradientenindexfasern und ihre Anwendungen in der optischen Kommunikationstechnik werden in den Kapiteln 10 und 25 ausführlicher diskutiert.

#### Übung 1-9: Numerische Apertur eines Lichtleiters mit variablem Brechungsindex

Wir betrachten eine Gradientenindexfaser mit einem Radius  $a$  und einem Indexprofil gemäß Gl. (1.32). Ein



**Abb. 1.35** Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters mit variablem Brechungsindex.

Strahl fällt aus der umgebenden Luft zentral in die Faser ein, sodass er im Fasermedium einen Winkel  $\theta_0$  zur Faserachse einschließt (siehe Abb. 1.35). Zeigen Sie, dass die numerische Apertur der Faser in der paraxialen Näherung durch

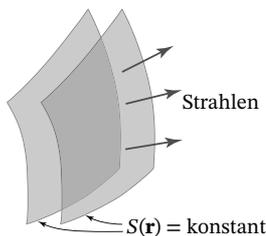
$$NA \equiv \sin \theta_A \approx n_0 \alpha \quad (1.36)$$

gegeben ist, wobei  $\theta_A$  der maximale Akzeptanzwinkel ist, für den der Strahl in der Faser eingeschlossen bleibt. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem für eine Stufenindexfaser wie der in Übung 1-6 untersuchten. Verwenden Sie für die Brechungsindizes von Kern und Mantel der Stufenindexfaser  $n_1 = n_0$  bzw.  $n_2 = n_0 \sqrt{1 - \alpha^2 a^2} \approx n_0 (1 - \frac{1}{2} \alpha^2 a^2)$ , um den Vergleich fair zu gestalten.

### 1.3.3 Die Eikonalgleichung

Die Wege der Strahlen werden oft durch Oberflächen beschrieben, zu denen sie normal verlaufen.  $S(\mathbf{r})$  sei eine skalare Funktion, deren Flächen gleicher Funktionswerte ( $S(\mathbf{r}) = \text{const.}$ ) überall normal auf den Lichtstrahlen stehen (Abb. 1.36). Wenn  $S(\mathbf{r})$  bekannt ist, können daraus die Lichtwege konstruiert werden, da die Normale der Fläche gleicher Funktionswerte am Ort  $\mathbf{r}$  gerade in die Richtung des Gradienten  $\nabla S(\mathbf{r})$  zeigt. Die Funktion  $S(\mathbf{r})$  wird als **Eikonal** bezeichnet; sie entspricht der Potentialfunktion  $V(\mathbf{r})$  in der Elektrostatik, wobei die Lichtstrahlen die Rolle der elektrischen Feldlinien übernehmen,  $\mathbf{E} = -\nabla V$ .

Um Fermats Prinzip (das Hauptpostulat der Strahlenoptik) zu erfüllen, muss das Eikonal  $S(\mathbf{r})$  eine Differen-



**Abb. 1.36** Die Lichtwege stehen normal auf den Flächen mit konstantem  $S(\mathbf{r})$ .

tialgleichung erfüllen, die **Eikonalgleichung**

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2, \quad (1.37)$$

die meist in Vektorschreibweise angegeben wird,

$$|\nabla S|^2 = n^2, \quad (1.38)$$

wobei  $|\nabla S|^2 = \nabla S \cdot \nabla S$  ist. Der Beweis der Eikonalgleichung aus Fermats Prinzip sprengt den Rahmen dieses Buches<sup>2)</sup>. Umgekehrt kann auch Fermats Prinzip (sowie die Strahlengleichung) aus der Eikonalgleichung hergeleitet werden. Die Eikonalgleichung kann daher ebenso wie Fermats Prinzip als das Hauptpostulat der Strahlenoptik angesehen werden.

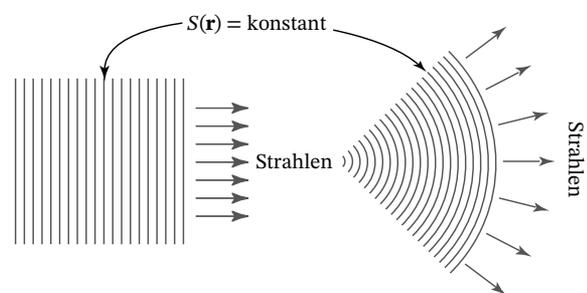
Die Integration der Eikonalgleichung (1.38) entlang eines Lichtwegs zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  ergibt

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A) &= \int_A^B |\nabla S| ds \\ &= \int_A^B n ds = \text{opt. Weglänge zw. } A \text{ und } B. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Mit anderen Worten, die Differenz  $S(\mathbf{r}_B) - S(\mathbf{r}_A)$  ist die optische Weglänge zwischen  $A$  und  $B$ . In der Analogie zur Elektrostatik übernimmt die optische Weglänge die Rolle der Potentialdifferenz.

Um die Lichtwege in einem inhomogenen Medium mit dem Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  zu bestimmen, können wir entweder die Strahlengleichung (1.21) – was wir bereits durchgeführt haben – oder die Eikonalgleichung lösen und dann aus  $S(\mathbf{r})$  den Gradienten  $\nabla S$  berechnen.

Wenn das Medium homogen, d. h.  $n(\mathbf{r})$  konstant ist, ist auch der Betrag von  $\nabla S$  konstant, sodass die Normalen zur Wellenfront (die Strahlen) gerade Linien sein müssen. Die Flächen  $S(\mathbf{r}) = \text{const.}$  können entweder parallele Ebenen oder konzentrische Kugeloberflächen sein (Abb. 1.37).



**Abb. 1.37** Strahlen und Flächen für konstantes  $S(\mathbf{r})$  in einem homogenen Medium.

<sup>2)</sup> Siehe z. B. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7. Aufl. 2002.

In Abschnitt 2.3 werden wir die Eikonalgleichung nochmals untersuchen; dann im Hinblick auf die Beziehung zwischen der Strahlenoptik und der Wellenoptik.

## 1.4 Matrizenoptik

Die Matrizenoptik ist eine Methode zur Verfolgung paraxialer Strahlen. Dabei wird angenommen, dass die Strahlen sich nur in einer Ebene bewegen; die Methode ist daher auf planare Systeme oder meridionale Strahlen in zylindersymmetrischen Systemen anwendbar.

Ein Strahl wird durch seine Position und seinen Winkel zur optischen Achse charakterisiert; diese Parameter ändern sich während seiner Reise durch das System. In der paraxialen Näherung sind die Einfallsebene und die Ausfallsebene eines optischen Systems durch zwei *lineare* algebraische Gleichungen verknüpft. Das optische System wird daher durch eine  $2 \times 2$ -Matrix beschrieben, die sogenannte **Strahltransfermatrix** (oder kürzer Transfermatrix).

Der Vorteil bei der Verwendung von Matrizen liegt darin, dass die Strahltransfermatrix von mehreren hintereinander geschalteten optischen Elementen (oder Systemen) das Produkt der Strahltransfermatrizen der einzelnen Elemente (Systeme) ist. Daher bietet die Matrixoptik eine formale Methode zur Beschreibung komplexer optischer Systeme in der paraxialen Näherung.

### 1.4.1 Die Strahltransfermatrix

Wir betrachten ein zylindersymmetrisches System aus mehreren brechenden und reflektierenden Grenzflächen, die entlang derselben Achse (optische Achse) angeordnet sind. Die optische Achse soll entlang der  $z$ -Achse liegen, die auch der ungefähren Ausbreitungsrichtung der Strahlen entspricht. Wir betrachten nur Strahlen in einer Ebene, die die optische Achse enthält, beispielsweise der  $yz$ -Ebene. Dann verfolgen wir den Strahl während seiner Ausbreitung durch das System und beobachten, wie er verschiedene Grenzflächen entlang der optischen Achse durchschreitet. Ein Strahl, der an der Position  $z$  eine transversale Fläche schneidet, ist durch die Angabe der  $y$ -Koordinate (Höhe) seines Auftreffpunkts auf die Fläche und seinen Winkel  $\theta$  vollständig charakterisiert (Abb. 1.38).

Ein optisches System besteht aus einer Zahl von optischen Elementen zwischen zwei transversalen Ebenen bei  $z_1$  und  $z_2$ , die wir als Eingangs- und Ausgangsebene bezeichnen. Das System ist durch seine Wirkung auf einen in beliebiger Höhe  $y_1$  und in beliebigen Winkeln  $\theta_1$  einfallenden Strahl gekennzeichnet. Es verändert den

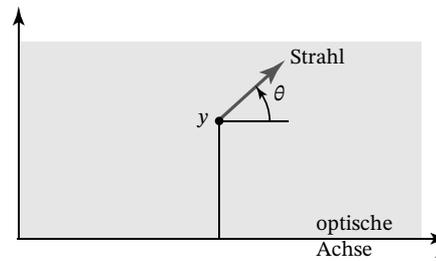


Abb. 1.38 Ein Strahl ist durch seine Höhe ( $y$ -Koordinate) und seinen Winkel  $\theta$  charakterisiert.

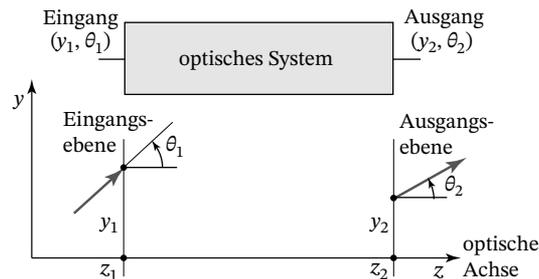


Abb. 1.39 Ein Strahl tritt an der Stelle  $z_1$  am Ort  $y_1$  im Winkel  $\theta_1$  in das System ein und verlässt es an der Stelle  $z_2$  am Ort  $y_2$  im Winkel  $\theta_2$ .

Strahl, sodass er auf der Ausgangsebene in der Höhe  $y_2$  im Winkel  $\theta_2$  aus dem System austritt (Abb. 1.39).

In der paraxialen Näherung, wenn alle Winkel so klein sind, dass  $\sin \theta \approx \theta$  gesetzt werden kann, ist die Beziehung zwischen  $(y_2, \theta_2)$  und  $(y_1, \theta_1)$  linear und kann allgemein in der Form

$$y_2 = Ay_1 + B\theta_1 \quad (1.40)$$

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1 \quad (1.41)$$

geschrieben werden, wobei  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  reelle Zahlen sind. Die Gln. (1.40) und (1.41) lauten in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  mit den Elementen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  charakterisiert das optische System vollständig, da sie die Berechnung von  $(y_2, \theta_2)$  für jedes beliebige  $(y_1, \theta_1)$  ermöglicht. Diese Matrix wird als **Strahltransfermatrix** bezeichnet. Negative Winkel zeigen in Ausbreitungsrichtung des Strahls von der  $z$ -Achse nach unten; negative Radien bezeichnen konkave Flächen, positive Radien beschreiben konvexe Flächen.

**Übung 1-10: Spezielle Fälle von Strahltransfermatrizen**  
Betrachten Sie die folgenden Situationen, in denen jeweils eines der vier Elemente der Strahltransfermatrix null ist:

20 | 1 Strahlenoptik

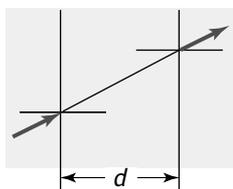
- (a) Zeigen Sie, dass der Fall  $A = 0$  ein *fokussierendes System* beschreibt, in welchem alle Strahlen, die an einer beliebigen Position, aber unter demselben Winkel in das System eintreten, in derselben Höhe austreten.
- (b) Zeigen Sie, dass der Fall  $B = 0$  ein *abbildendes System* beschreibt, in welchem alle Strahlen, die unter beliebigen Winkeln in derselben Höhe in das System eintreten, in derselben Höhe austreten.
- (c) Welche besonderen Eigenschaften haben Systeme, für die  $C = 0$  oder  $D = 0$  ist?

1.4.2 Matrizen einfacher optischer Komponenten

**Ausbreitung im Vakuum**

Da sich die Strahlen in einem Medium mit konstantem Brechungsindex wie z. B. dem Vakuum geradlinig ausbreiten, ist die Veränderung eines Strahls nach Durchlaufen einer Wegstrecke  $d$  durch  $y_2 = y_1 + \theta_1 d$  und  $\theta_2 = \theta_1$  gegeben. Die Strahltransfermatrix ist folglich

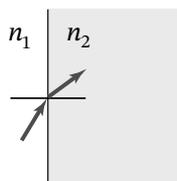
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$



**Brechung an einer ebenen Grenzfläche**

An einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  ist die Veränderung des Strahlwinkels durch das Snelliussche Gesetz gegeben,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . In der paraxialen Näherung ist  $n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$ . Die Höhe des Strahls verändert sich nicht,  $y_2 = y_1$ . Folglich ist die Strahltransfermatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \tag{1.44}$$

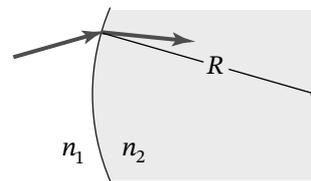


**Brechung an einer sphärischen Grenzfläche**

Die Beziehung zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  für paraxiale Strahlen, die an einer sphärischen Grenzfläche gebrochen werden, ist in Gl. (1.11) angegeben. Die Höhe des Strahls

wird nicht verändert,  $y_2 \approx y_1$ . Die Strahltransfermatrix ist daher

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \tag{1.45}$$

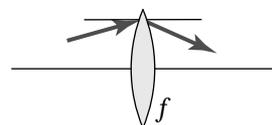


konvex:  $R > 0$ ; konkav:  $R < 0$

**Durchgang durch eine dünne Linse**

Die Beziehung zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  für paraxiale Strahlen beim Durchgang durch eine dünne Linse der Brennweite  $f$  ist in Gl. (1.14) angegeben. Da die Höhe des Strahls unverändert bleibt ( $y_2 = y_1$ ), gilt für die Strahltransfermatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.46}$$

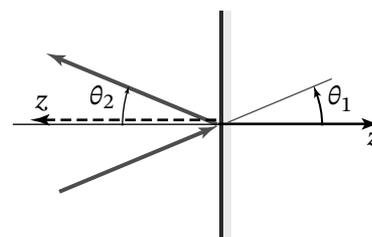


konvex:  $f > 0$ ; konkav:  $f < 0$

**Reflexion an einem ebenen Spiegel**

Die Position des Strahls wird bei Reflexion an einem ebenen Spiegel nicht verändert,  $y_2 = y_1$ . Wenn wir die übliche Konvention verwenden, die z-Achse in Ausbreitungsrichtung positiv zu zählen (also für den einfallenden Strahl in Richtung des Spiegels und für den reflektierten Strahl vom Spiegel weg), dann ist offensichtlich  $\theta_2 = \theta_1$ . Die Strahltransfermatrix ist daher die Einheitsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

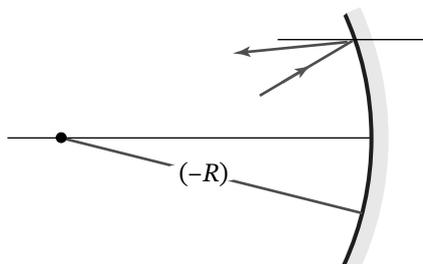


**Reflexion an einem Kugelspiegel**

Mithilfe von Gl. (1.4) und der Konvention, dass die z-Achse in Ausbreitungsrichtung der Strahlen zeigt, er-

halten wir analog

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$



konkav:  $R < 0$ ; konvex:  $R > 0$

Die Strahltransfermatrizen eines sphärischen Spiegels, Gl. (1.48), und einer dünnen Linse, Gl. (1.46), ähneln sich. Ein Spiegel mit dem Krümmungsradius  $R$  bricht Strahlen genau wie eine dünne Linse mit der Brennweite  $f = -R/2$ .

### 1.4.3 Matrizen von hintereinander geschalteten optischen Komponenten

Eine Folge von  $N$  optischen Komponenten oder Systemen mit den Strahltransfermatrizen  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_N$  ist äquivalent zu einem einzigen optischen System mit der Strahltransfermatrix

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{M}_1} \rightarrow \boxed{\mathbf{M}_2} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\mathbf{M}_N} \rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}_N \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1. \quad (1.49)$$

Die Reihenfolge der Multiplikation ist dabei entscheidend: Die Matrix des Systems, das der Strahl zuerst passiert, muss ganz rechts stehen, sodass sie als erste auf die Spaltenmatrix des einfallenden Strahls wirkt. Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ (wohl aber assoziativ).

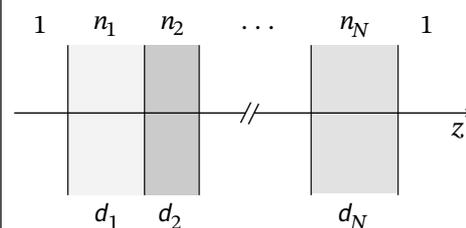
#### Übung 1-11: Parallele transparente Platten

Betrachten Sie einen Satz von  $N$  parallelen ebenen transparenten Platten mit den Brechungsindizes  $n_1, n_2, \dots, n_N$  und den Dicken  $d_1, d_2, \dots, d_N$ , die in Luft ( $n = 1$ ) senkrecht zur  $z$ -Achse liegen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Strahltransfermatrix des Gesamtsystems durch

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

gegeben ist.

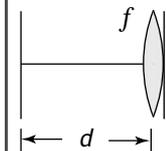
In diesem Fall hat die Reihenfolge der Platten keinen Einfluss auf die Strahltransfermatrix des Gesamtsystems. Wie lautet die Strahltransfermatrix einer inhomogenen transparenten Platte mit der Dicke  $d_0$  und dem Brechungsindex  $n(z)$ ?



#### Übung 1-12: Luftspalt und dünne Linse

Zeigen Sie, dass für die Strahltransfermatrix eines Luftspalts der Breite  $d$  gefolgt von einer dünnen Linse der Brennweite  $f$  gilt

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$



#### Übung 1-13: Abbildung mit einer dünnen Linse

Leiten Sie einen Ausdruck für die Strahltransfermatrix eines Systems Luft/dünne Linse/Luft her (siehe Skizze). Zeigen Sie, dass alle von einem einzelnen Punkt in der Eingangebene ausgehenden Strahlen unabhängig von ihren Winkeln auch in der Ausgangsebene auf einem einzigen Punkt  $y_2$  eintreffen, sofern die Abbildungsbedingung ( $1/d_1 + 1/d_2 = 1/f$ ) erfüllt ist. Zeigen Sie weiter, dass für  $d_2 = f$  alle parallel einfallenden Strahlen von der Linse auf einen einzigen Punkt in der Ausgangsebene gebündelt werden.

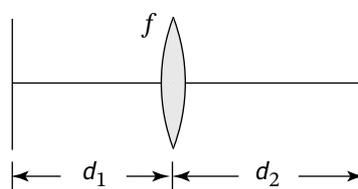


Abb. 1.40 Einlinsen-Bildgebungssystem

#### Bildgebung mit einem beliebigen paraxialen optischen System

Ein paraxiales System aus einem beliebigen Satz von hintereinander geschalteten optischen Elementen ist durch die vier Elemente  $A, B, C$  und  $D$  seiner Strahl-

transfermatrix  $\mathbf{M}$  vollständig charakterisiert. Alternativ kann das System auch durch die Positionen seiner vier **Kardinalpunkte** beschrieben werden, zweier Brenn- und zweier Hauptpunkte, die den Durchtritt der Strahlen zwischen seiner Eingangs- und Ausgangsebene bestimmen. Gemäß Gl. (1.42) verlässt ein parallel zur optischen Achse ( $\theta_1 = 0$ ) in der Höhe  $y_1$  einfallender Strahl das System in der Höhe  $y_2 = Ay_1$  unter dem Winkel  $\theta_2 = Cy_1$ . Dieser Strahl kreuzt die optische Achse an einem Punkt  $F$ , der als **hinterer Brennpunkt** bezeichnet wird und sich in einem Abstand  $y_2/\theta_2 = A/C$  vom hinteren Scheitelpunkt  $V$  des Systems befindet, wie in Abb. 1.41(a) gezeigt. Der Schnittpunkt der Verlängerungen der einfallenden und ausgehenden Strahlen definiert den **hinteren Hauptpunkt**  $H$ , der in einem Abstand  $f = y_1/\theta_2 = -1/C$  links von  $F$  liegt, welcher als **hintere Brennweite** bezeichnet wird. Der hintere Hauptpunkt  $H$  befindet sich also in einem Abstand  $h = -1/C + A/C$  links vom hinteren Scheitelpunkt  $V$ . Solange die paraxiale Näherung gilt, hängen die Positionen der Brenn- und Hauptpunkte nicht von  $y_1$  ab.

In ähnlicher Weise werden Strahlen parallel zur optischen Achse, die in entgegengesetzter Richtung (von rechts nach links) in das System eintreten, auf den **vorderen Brennpunkt**  $F'$  fokussiert und definieren so den **vorderen Hauptpunkt**  $H'$ , der in einem Abstand  $h'$  vom vorderen Scheitelpunkt  $V'$  liegt. Der vordere Brennpunkt befindet sich in einem Abstand  $f'$  links von  $H'$ , wobei  $f'$  die **vordere Brennweite** ist. Diese Abstände können über die Beziehungen  $-f' = -1/C'$  und  $-h' = -1/C' + A'/C'$  als Elemente der inversen Strahltransfermatrix ausgedrückt werden:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & DA \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Die Determinante  $\det[\mathbf{M}]$  von  $\mathbf{M}$  ist durch  $AD - BC$  gegeben.

Zusammengefasst können die Brennweiten und Positionen der Hauptpunkte mithilfe der folgenden Bezie-

hungen aus den Parametern  $ABCD$  bestimmt werden:

$$f = -1/C, \quad h = (1 - A)f \quad (1.53)$$

$$f' = \det[\mathbf{M}]f, \quad h' = -f' + Df. \quad (1.54)$$

Negative Vorzeichen bezeichnen Richtungen entgegen den durch die Pfeile in Abb. 1.41(a) angegebenen Richtungen. Alternativ können die vier Abstände auch festgelegt werden, indem man zwei zur optischen Achse parallele Strahlen, die jedoch in entgegengesetzte Richtungen verlaufen, durch das System verfolgt. Die Parameter  $ABCD$  können durch Invertieren der Gln. (1.53) und (1.54) aus  $f, f', h$  und  $h'$  bestimmt werden.

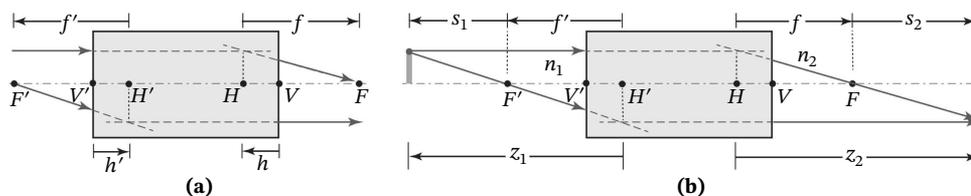
Die Abbildungsbedingung wird unter Berücksichtigung der in Abb. 1.41(b) dargestellten Geometrie bestimmt. Da  $s_2/f = f'/s_1$  ist, ist die Abbildungsbedingung einfach  $s_1 s_2 = f f'$  oder äquivalent  $(z_1 - F')(z_2 - f) = f f'$  oder

$$\frac{f'}{z_1} + \frac{f}{z_2} = 1. \quad (1.55)$$

Wenn die Brechungsindizes der Medien, in die das System eingebettet ist, identisch sind, ist  $\det[\mathbf{M}] = 1$  und im Einklang mit Gl. (1.54) folgt  $f' = f$ . Die Abbildungsbedingung aus Gl. (1.55) reduziert sich dann auf die bekannte Abbildungsgleichung  $1/z_1 + 1/z_2 = 1/f$  [siehe Gl. (1.7)]; es sei jedoch bemerkt, dass hier die Abstände  $z_1$  und  $z_2$  von den Hauptpunkten  $H'$  bzw.  $H$  aus gemessen werden.

#### Übung 1-14: Abbildung mit einer dicken Linse

Betrachten Sie eine Glaslinse mit dem Brechungsindex  $n$ , der Dicke  $d$  und zwei sphärischen Oberflächen mit dem Radius  $R$ . Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix der Linse unter der Annahme, dass sie sich in Luft befindet (Brechungsindex = 1). Zeigen Sie, dass die vordere und hintere Brennweite gleich ist ( $f = f'$ ) und dass sich die Hauptpunkte in identischen Entfernungen von den Scheitelpunkten befinden ( $h = h'$ ),



**Abb. 1.41** (a) Paraxiales System als Darstellung eines beliebigen Satzes von kaskadierten optischen Elementen.  $F, V$  und  $H$  bezeichnen den Brennpunkt, den Scheitelpunkt und die Hauptpunkte;  $f$  und  $h$  sind die Brennweite und der Abstand zwischen Haupt- und Scheitelpunkt. Gestrichene Größen

beziehen sich auf die Eingangsebene, nicht gestrichene auf die Ausgangsebene. (b) Bildgebung mit einem solchen System. Die Brechungsindizes der Medien, in die das optische System eingebettet ist, sind  $n_1$  und  $n_2$ .

wobei

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{R} \left[ 2 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R} \right] \quad (1.56)$$

$$h = \frac{(n-1)fd}{nR}. \quad (1.57)$$

Zeigen Sie, dass für die Transfermatrix des Systems zwischen zwei konjugierten Ebenen in den Abständen  $z_1$  und  $z_2$  von den Hauptpunkten der Linse (d. h. in den Abständen  $d_1 = z_1 - h'$  und  $d_2 = z_2 - h$  von den Scheitelpunkten), die die Abbildungsgleichung erfüllt,  $B = 0$  gilt, was zeigt, dass sie tatsächlich die Abbildungsbedingung erfüllt [siehe Übung 1-10(b)].

#### 1.4.4 Periodische optische Systeme

Unter einem periodischen optischen System versteht man eine Folge von identischen Einheiten. Ein Beispiel ist etwa die in Abb. 1.24(a) gezeigte Folge von Linsen in gleichen Abständen zur Lichtführung. Ein weiteres Beispiel ist die Reflexion von Licht zwischen zwei Spiegeln in einem optischen Resonator (siehe Abschnitt 11.2.1); in diesem Fall durchläuft ein Strahl immer wieder dasselbe System. Selbst ein homogenes Medium wie z. B. eine Glasfaser kann als periodisches System angesehen werden, wenn man es formal in gleichlange identische Segmente unterteilt. Wir wollen im Folgenden mithilfe von Matrizenmethoden eine allgemeine Theorie der Strahlausbreitung in periodischen optischen Systemen entwickeln.

##### Die Differenzgleichung für die Strahlposition

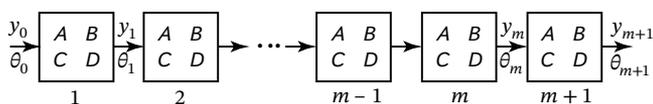
Ein periodisches System besteht aus einer Folge von identischen Einheiten (Abschnitten) mit der Strahltransfermatrix  $(A, B, C, D)$ , wie in Abb. 1.42 gezeigt. Ein Strahl tritt in einer Höhe  $y_0$  in einem Winkel  $\theta_0$  in das System ein. Um die Höhe und den Winkel  $(y_m, \theta_m)$  des Strahls am Ausgang des  $m$ ten Abschnitts zu bestimmen, wenden wir die Matrix  $ABCD$   $m$  mal an,

$$\begin{bmatrix} y_m \\ \theta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Genauso können wir die Beziehungen

$$y_{m+1} = Ay_m + B\theta_m \quad (1.59)$$

$$\theta_{m+1} = Cy_m + D\theta_m \quad (1.60)$$



iterativ anwenden, um  $(y_1, \theta_1)$  aus  $(y_0, \theta_0)$ ,  $(y_2, \theta_2)$  aus  $(y_1, \theta_1)$  usw. zu bestimmen, am einfachsten mithilfe einer geeigneten Software.

Es wird sich als nützlich erweisen, Gleichungen herzuleiten, die die Dynamik der Höhe  $y_m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , unabhängig von den Winkeln  $\theta_m$  beschreiben. Das können wir erreichen, indem wir  $\theta_m$  aus den Gln. (1.59) und (1.60) eliminieren. Aus Gl. (1.59) erhalten wir

$$\theta_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B}. \quad (1.61)$$

Nun ersetzen wir in Gl. (1.61)  $m$  durch  $m+1$  und finden

$$\theta_{m+1} = \frac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B}. \quad (1.62)$$

Durch Einsetzen der Gln. (1.61) und (1.62) in Gl. (1.60) bekommen wir

$$y_{m+2} = 2By_{m+1} - F^2y_m, \quad (1.63)$$

wobei

$$b = \frac{A+D}{2}, \quad (1.64)$$

$$F^2 = AD - BC = \det[\mathbf{M}] \quad (1.65)$$

ist und  $\det[\mathbf{M}]$  die Determinante von  $\mathbf{M}$  bedeutet.

Gleichung (1.63) ist eine lineare Differenzgleichung für die Strahlhöhe  $y_m$ . Sie kann iterativ gelöst werden, indem man  $y_2$  aus  $y_0$  und  $y_1$  berechnet, danach  $y_3$  aus  $y_1$  und  $y_2$  und so weiter. Die Größe  $y_1$  kann mithilfe von Gl. (1.59) mit  $m = 0$  aus  $y_0$  und  $\theta_0$  berechnet werden.

Es ist jedoch hilfreich, durch Lösung der Differenzgleichung (1.63) einen expliziten Ausdruck für  $y_m$  anzugeben. Genau wie bei Differentialgleichungen ist auch bei Differenzgleichungen eine Lösung eindeutig, wenn sie die Differenzgleichung löst und die Anfangsbedingungen erfüllt. Wir können daher einen sinnvollen Ansatz für die Lösung von Gl. (1.63) wählen. Wir verwenden eine Probestfunktion der geometrischen Form

$$y_m = y_0 h^m \quad (1.66)$$

mit einer Konstante  $h$ . Einsetzen von Gl. (1.66) in Gl. (1.63) zeigt sofort, dass die Probestfunktion geeignet ist, sofern  $h$  die quadratische algebraische Gleichung

$$h^2 - 2bh + F^2 = 0 \quad (1.67)$$

erfüllt, woraus

$$h = b \pm i\sqrt{F^2 - b^2} \quad (1.68)$$

folgt.

**Abb. 1.42** Eine Folge von identischen optischen Systemen.

Wir können das Ergebnis in einer kompakteren Form angeben, indem wir die Variable

$$\varphi = \cos^{-1}(b/F) \quad (1.69)$$

definieren, sodass  $b = F \cos \varphi$ ,  $\sqrt{F^2 - b^2} = F \sin \varphi$  und daher  $h = F(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = F \exp(\pm i\varphi)$  ist. Damit wird Gl. (1.66) zu  $y_m = y_0 F^m \exp(\pm im\varphi)$ .

Eine allgemeine Lösung erhalten wir aus den beiden Lösungen mit positivem und negativem Vorzeichen, indem wir eine passende Linearkombination bilden. Die Summe der beiden Exponentialfunktionen kann als harmonische (Kreis-) Funktion geschrieben werden, sodass

$$y_m = y_{\max} F^m \sin(m\varphi + \varphi_0), \quad (1.70)$$

wobei  $y_{\max}$  und  $\varphi_0$  Konstanten sind, die aus den Anfangsbedingungen  $y_0$  und  $y_1$  bestimmt werden müssen. Für  $m = 0$  erhalten wir insbesondere  $y_{\max} = y_0 / \sin \varphi_0$ .

Der Parameter  $F$  hängt mit der Determinante der Strahltransfermatrix der einzelnen Einheiten durch  $F = \sqrt{\det[\mathbf{M}]}$  zusammen. Man kann zeigen, das unabhängig von der Art der einzelnen Einheiten  $\det[\mathbf{M}] = n_1/n_2$  gilt, wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Brechungsindizes am Beginn und am Ende der Einheit sind. Dieses allgemeine Ergebnis kann für die Strahltransfermatrizen aller in diesem Abschnitt diskutierten optischen Komponenten verifiziert werden. Da die Determinante des Produkts zweier Matrizen gleich dem Produkt ihrer Determinanten ist, muss die Beziehung  $\det[\mathbf{M}] = n_1/n_2$  für jede beliebige Folge dieser optischen Komponenten gelten. Wenn zum Beispiel  $\det[\mathbf{M}_1] = n_1/n_2$  und  $\det[\mathbf{M}_2] = n_2/n_3$  ist, dann folgt sofort  $\det[\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1] = (n_2/n_3)(n_1/n_2) = n_1/n_3$ . In den meisten Anwendungen bestehen Anfang und Ende der Einheiten einfach aus Luft ( $n = 1$ ) und es gilt  $n_1 = n_2$ , sodass  $\det[\mathbf{M}] = 1$  und  $F = 1$  ist. In diesem Fall ist die Lösung für die Strahlhöhe

$$y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0). \quad (1.71)$$

Wir werden im Folgenden  $F = 1$  annehmen. Die entsprechende Lösung für den Strahlwinkel erhalten wir mithilfe der Beziehung  $\theta_m = (y_{m+1} - A y_m)/B$ , die aus Gl. (1.59) folgt.

#### Bedingungen für einen harmonischen Strahlverlauf

Damit  $y_m$  eine harmonische (anstatt hyperbolische) Funktion ist, muss  $\varphi = \cos^{-1} b$  reell sein. Dazu muss

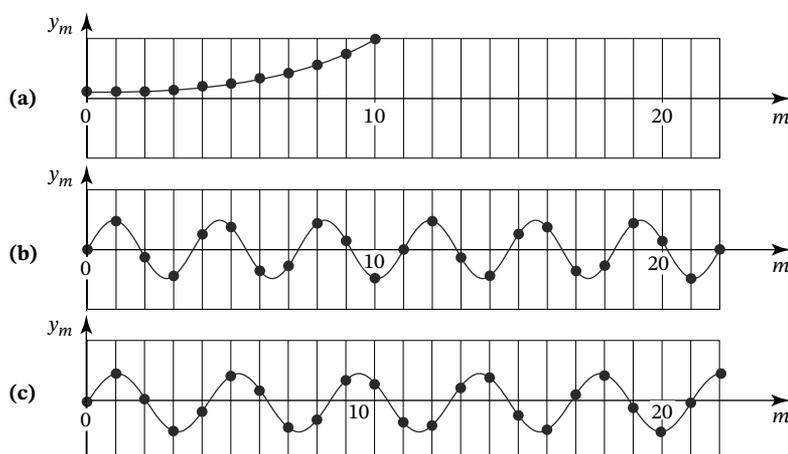
$$|b| \leq 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}|A + D| \leq 1 \quad (1.72)$$

gelten. Wenn stattdessen  $|b| > 1$  ist, ist  $\varphi$  imaginär und wir erhalten eine hyperbolische Funktion ( $\cosh$  oder  $\sinh$ ) als Lösung, die unbegrenzt ansteigt wie in Abb. 1.43(a). Eine harmonische Lösung stellt sicher, dass  $y_m$  für alle Werte von  $m$  beschränkt ist und einen Maximalwert  $y_{\max}$  besitzt. Die Schranke  $|b| \leq 1$  liefert daher eine **Stabilitätsbedingung** für den Strahlweg.

Da sowohl  $y_m$  als auch  $y_{m+1}$  harmonische Funktionen sind, gilt dies auch für den Strahlwinkel gemäß Gl. (1.71), wie aus Gl. (1.61) und trigonometrischen Identitäten folgt. Folglich ist  $\theta_m = \theta_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_1)$ , wobei die Konstanten  $\theta_{\max}$  und  $\varphi_1$  aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Der maximale Winkel  $\theta_{\max}$  muss hinreichend klein sein, damit die paraxiale Näherung, die unserer Analyse zugrunde liegt, anwendbar ist.

#### Bedingungen für einen periodischen Strahlverlauf

Die harmonische Funktion (1.71) ist periodisch in  $m$ , sofern eine ganze Zahl  $s$  existiert, sodass  $y_{m+s} = y_m$  für alle  $m$ . Die kleinste solche ganze Zahl ist die Periode. In diesem Fall kehrt der Strahl nach  $s$  Abschnitten auf seine eigene Bahn zurück. Die Bedingung ist erfüllt, wenn  $s\varphi = 2\pi q$  ist, wobei  $q$  eine ganze Zahl ist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine periodische Bahn ist somit, dass  $\varphi/2\pi$  eine rationale Zahl  $q/s$  sein



**Abb. 1.43** Beispiele für Strahlverläufe in optischen Systemen: (a) instabile Bahn ( $b > 1$ ); (b) stabile periodische Bahn ( $\varphi = 6\pi/11$ ; Periode 11 Abschnitte); (c) stabile nichtperiodische Bahn ( $\varphi = 1.5$ ).

muss. Wenn z. B.  $\varphi = 6\pi/11$  ist, ist  $\varphi/2\pi = \frac{3}{11}$  und die Bahn ist periodisch mit einer Periode von  $s = 11$  Abschnitten. Dieser Fall ist in Abb. 1.43(b) dargestellt. In Kapitel 7 beschäftigen wir uns ausführlicher mit periodischen optischen Systemen.

### Beispiel 1-3: Eine Folge von äquidistanten identischen Linsen

Eine Folge von identischen Linsen der Brennweite  $f$  im Abstand  $d$  (Abb. 1.44) kann zur Führung von Licht zwischen zwei Orten dienen. Die Grundeinheit, ein freier Raum der Länge  $d$  gefolgt von einer Linse, besitzt eine Strahltransfermatrix gemäß Gl. (1.51);  $A = 1$ ,  $B = d$ ,  $C = -1/f$ ,  $D = 1 - d/f$ . Für den Parameter  $b$  gilt  $b = \frac{1}{2}(A + D) = 1 - d/2f$ , und die Determinante ist 1. Die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf,  $|b| \leq 1$  oder  $-1 \leq b \leq 1$ , lautet daher

$$0 \leq d \leq 4f; \quad (1.73)$$

der Abstand zwischen den Linsen muss also kleiner sein als die vierfache Brennweite. Unter dieser Bedingung folgen paraxiale Strahlen der harmonischen Funktion

$$y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0), \quad \varphi = \cos^{-1}\left(1 - \frac{d}{2f}\right). \quad (1.74)$$

Für  $d = 2f$  ist  $\varphi = \pi/2$  und  $\varphi/2\pi = \frac{1}{4}$ , und der Verlauf eines beliebigen Strahls ist periodisch mit einer Periode von vier Abschnitten. Für  $d = f$  ist  $\varphi = \pi/3$  und  $\varphi/2\pi = \frac{1}{6}$ , und der Verlauf des Strahls ist periodisch mit einer Periode von sechs Abschnitten. Diese Fälle sind in Abb. 1.45 dargestellt.

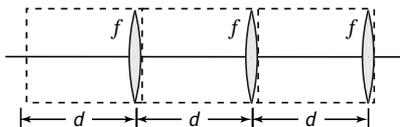


Abb. 1.44 Eine periodische Folge von Linsen.

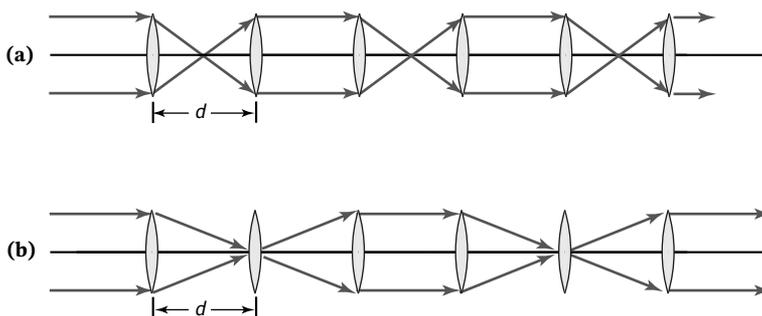


Abb. 1.45 Beispiele für stabile Strahlverläufe in einem periodischen System aus Linsen: (a)  $d = 2f$ ; (b)  $d = f$ .

### Zusammenfassung

Ein paraxialer Strahl ( $\theta_{\max} \ll 1$ ), der eine Folge von identischen Systemen mit einer Strahltransfermatrix  $(A, B, C, D)$  mit  $AD - BC = 1$  passiert, folgt einer harmonischen (und folglich beschränkten) Bahn, wenn die Stabilitätsbedingung  $|\frac{1}{2}(A + D)| \leq 1$  erfüllt ist. Seine Position nach dem  $m$ ten Abschnitt ist dann  $y_m = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , wobei  $\varphi = \cos^{-1}[\frac{1}{2}(A + D)]$  ist. Die Konstanten  $y_{\max}$  und  $\varphi_0$  sind durch die Anfangsbedingungen  $y_0$  und  $y_1 = Ay_0 + B\theta_0$  bestimmt, wenn  $\theta_0$  der Anfangswinkel des Strahls ist. Die Winkel des Strahls hängen gemäß  $\theta_m = (y_{m+1} - Ay_m)/B$  mit der Strahlhöhe zusammen und werden durch eine harmonische Funktion  $\theta_m = \theta_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_1)$  beschrieben. Der Strahlverlauf ist periodisch mit einer Periode  $s$ , wenn  $\varphi/2\pi$  eine rationale Zahl  $q/s$  ist.

### Übung 1-15: Eine periodische Folge von Paaren unterschiedlicher Linsen

Betrachten Sie den Verlauf von paraxialen Strahlen durch ein periodisches System, das aus einer Folge von Linsenpaaren mit den alternierend angeordneten Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  besteht (Abb. 1.46). Zeigen Sie, dass der Strahlverlauf beschränkt (stabil) ist, wenn

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leq 1 \quad (1.75)$$

gilt.

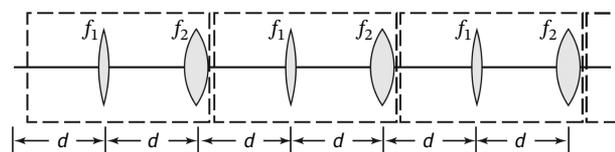


Abb. 1.46 Eine periodische Folge von Linsenpaaren.

**Übung 1-16: Ein optischer Resonator**

Paraxiale Strahlen werden wiederholt zwischen zwei sphärischen Spiegeln mit den Radien  $R_1$  und  $R_2$  reflektiert, die in einem Abstand  $d$  voneinander stehen (Abb. 1.47). Betrachten Sie diese Anordnung als periodisches System, dessen Grundeinheit eine einzelne Runde des Strahls zwischen den Spiegeln ist. Bestimmen Sie die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf. Mit optischen Resonatoren werden wir uns in Kapitel 11 genauer befassen.

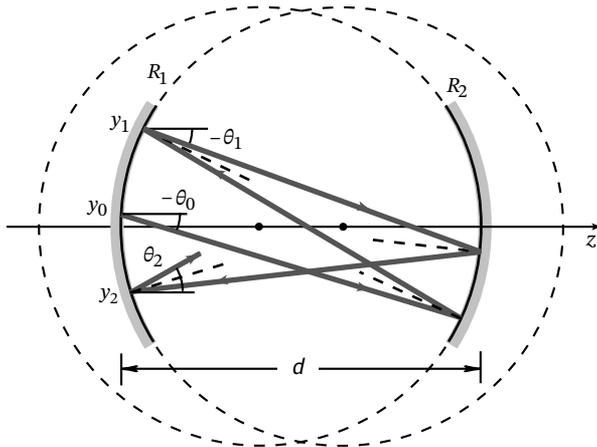


Abb. 1.47 Ein optischer Resonator als periodisches optisches System.

**Aufgaben****Aufgabe 1-1: Fermats Prinzip für maximale Laufzeit**

Betrachten Sie den elliptischen Spiegel aus Abb. 1.48(a), dessen Brennpunkte mit  $A$  und  $B$  bezeichnet sind. Aus geometrischen Gründen ist die Länge der Strecke  $\overline{APB}$  identisch zu  $\overline{AP'B}$  und  $\overline{AP''B}$  für benachbarte Punkte  $P'$  und  $P''$  auf der Ellipse. (a) Betrachten Sie nun einen anderen Spiegel mit einem kleineren Krümmungsradius als der elliptische Spiegel, der wie in Abb. 1.48(b) ge-

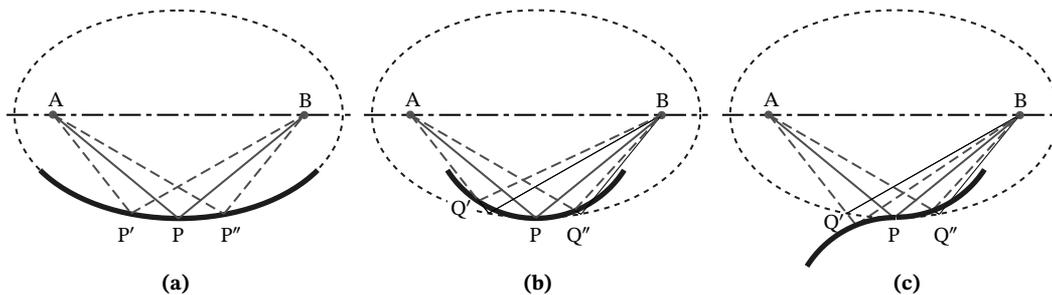


Abb. 1.48 (a) Reflexion an einem elliptischen Spiegel. (b) Reflexion an einem einbeschriebenen tangentialen Spiegel mit größerer Krümmung. (c) Reflexion an einem tangentialen Spiegel, dessen Krümmung von konkav zu konvex wechselt.

zeigt an einem Punkt  $P$  tangential an diesem anliegt. Zeigen Sie, dass die Strecke  $\overline{APB}$ , die der Lichtstrahl auf seinem Weg von  $A$  nach  $B$  zurücklegt, jetzt ein Weg *maximaler* Zeit ist, d. h., die benötigte Zeit ist größer als für die benachbarten Wege  $\overline{AQ'B}$  und  $\overline{AQ''B}$ . (b) Betrachten Sie schließlich einen Spiegel, der die Ellipse schneidet, aber in  $P$  tangential an ihr liegt wie in Abb. 1.48(c) gezeigt. Zeigen Sie, dass die möglichen Strahlwege  $\overline{AQ'B}$ ,  $\overline{APB}$  und  $\overline{AQ''B}$  einem Wendepunkt der Zeit bei Variation von  $P$  entsprechen.

**Aufgabe 1-2: Durchgang durch ebene Platten**

(a) Verwenden Sie das Snelliussche Gesetz, um zu zeigen, dass ein Strahl, der durch eine ebene Platte mit der Dicke  $d$  und dem Brechungsindex  $n_1$  (in Luft,  $n \approx 1$ ) hindurchtritt, parallel zur Einfallsrichtung wieder austritt. Der Strahl muss dabei nicht paraxial sein. Leiten Sie einen Ausdruck für die seitliche Versetzung des Strahls als Funktion des Einfallswinkels  $\theta$  her. Erklären Sie ihr Ergebnis mithilfe von Fermats Prinzip. (b) Zeigen Sie, dass auch wenn die Platte durch einen Stapel von  $N$  parallelen Schichten mit den Dicken  $d_1, d_2, \dots, d_N$  und den Brechungsindizes  $n_1, n_2, \dots, n_N$  ersetzt wird, der austretende Strahl wieder parallel zum einfallenden Strahl ist. Zeigen Sie weiter, dass wenn  $\theta_m$  der Winkel des Strahls in der  $m$ ten Schicht ist,  $n_m \sin \theta_m = \sin \theta$  gilt ( $m = 1, 2, \dots$ ).

**Aufgabe 1-3: Linse in Wasser**

Bestimmen Sie die Brennweite  $f$  einer bikonvexen Linse mit den Radien 20 cm und 30 cm und dem Brechungsindex  $n = 1.5$ . Wie groß ist die Brennweite der Linse in Wasser ( $n = \frac{4}{3}$ )?

**Aufgabe 1-4: Numerische Apertur einer nicht ummantelten Faser**

Bestimmen Sie die numerische Apertur und den Akzeptanzwinkel eines Lichtleiters mit einem Brechungsindex des Kerns von  $n_1 = 1.46$ , dessen Mantel entfernt (bzw. durch Luft ersetzt,  $n_2 \approx 1$ ) wurde.

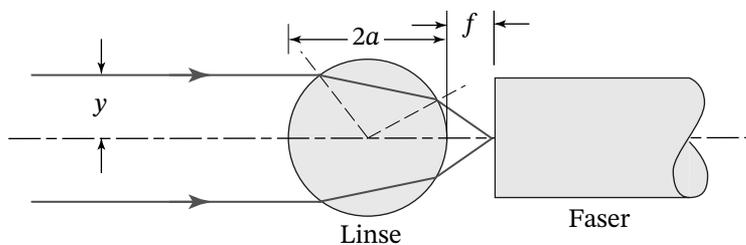


Abb. 1.49 Bündelung von Licht in einen Lichtleiter mithilfe einer Glaskugel.

#### Aufgabe 1-5: Kopplung von Lichtleitern

Um Licht in Lichtleiter ein- oder aus ihnen auszukoppeln, werden oft winzige Glaskugeln als Linsen verwendet. Das Ende der Faser liegt dabei in einem Abstand  $f$  von der Kugel. Bestimmen Sie  $f$  für eine Kugel mit dem Radius  $a = 1$  mm und dem Brechungsindex  $n = 1.8$ , sodass ein zur optischen Achse paralleler Strahl in einem radialen Abstand von  $y = 0.7$  mm auf die Faser gebündelt wird, wie in Abb. 1.49 dargestellt.

#### Aufgabe 1-6: Auskoppeln von Licht aus einem Medium mit großem Brechungsindex

Nehmen Sie an, dass Licht in einem Parallelepiped mit dem Brechungsindex  $n = 3.7$  erzeugt wird und sich isotrop ausbreitet (siehe Übung 1-7). Das Material soll von Luft ( $n = 1$ ) umgeben sein. (a) Welcher Anteil des erzeugten Lichts kann aus der Stirnseite des Parallelepipeds ausgekoppelt werden, wenn alle Seiten bis auf die Stirnseite mit einem reflektierenden Material beschichtet werden, das als idealer Spiegel wirkt? (b) Vergrößert sich der Anteil des ausgekoppelten Lichts, wenn die Frontseite mit einem transparenten Material mit dem Brechungsindex  $n = 1.4$  beschichtet wird?

#### Aufgabe 1-7: Platte mit axial variablem Brechungsindex

Eine Platte der Dicke  $d$  liegt senkrecht zur  $z$ -Achse. Ihr Brechungsindex  $n(z)$  ist in  $z$ -Richtung variabel. Zeigen Sie, dass ein unter einem Winkel  $\theta_0$  in der  $yz$ -Ebene aus Luft in die Platte einfallender Strahl an der Position  $z$  in der Platte einen Winkel  $\theta(z)$  besitzt, der die Beziehung  $n(z) \sin \theta(z) = \sin \theta_0$  erfüllt. Zeigen Sie weiter, dass der Strahl parallel zum einfallenden Strahl austritt. *Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1-2. Zeigen Sie, dass die Strahlhöhe  $y(z)$  in der Platte die Differentialgleichung  $(dy/dz)^2 = (n^2/\sin^2 \theta - 1)^{-1}$  erfüllt.

#### Aufgabe 1-8: Strahlverläufe in Fasern mit variablem Brechungsindex

Betrachten Sie eine Faser mit radial variablem Brechungsindex  $n(\rho)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  um die  $z$ -Achse.  $(\rho, \phi, z)$  sei der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten. Formulieren Sie die paraxiale Strahlengleichung (1.22) in

Zylinderkoordinaten und geben Sie Differentialgleichungen für  $\rho$  und  $\phi$  als Funktionen von  $z$  an.

#### Aufgabe 1-9: Die Strahltransfermatrix eines Linsensystems

Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix eines optischen Systems aus einer dünnen Konvexlinse der Brennweite  $f$  und einer dünnen Konkavlinse der Brennweite  $-f$  in einem Abstand  $f$ . Diskutieren Sie die Abbildungseigenschaften dieser zusammengesetzten Linse.

#### Aufgabe 1-10: Die Strahltransfermatrix einer SELFOC-Platte

Bestimmen Sie die Strahltransfermatrix einer SELFOC-Platte [d. h. eines Materials mit parabolischem Indexprofil,  $n(y) \approx n_0(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y^2)$ ] der Dicke  $d$ .

#### Aufgabe 1-11: Eine SELFOC-Platte als periodisches System

Betrachten Sie den Verlauf paraxialer Strahlen in einer SELFOC-Platte senkrecht zur  $z$ -Achse. Sie können dieses System als periodisches System aus identischen miteinander verbundenen Platten der Dicke  $d$  betrachten. Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 1-10 und geben Sie die Stabilitätsbedingung für den Strahlverlauf an. Hängt die Bedingung von  $d$  ab?

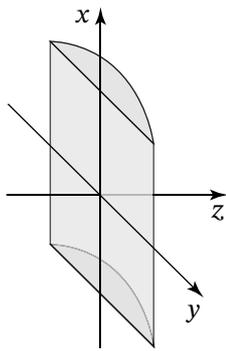
#### Aufgabe 1-12: Rekursionsbeziehung für einen Resonator aus ebenen Spiegeln

Betrachten Sie einen optischen Resonator aus ebenen Spiegeln im Abstand  $d$  als periodisches optisches System. Geben Sie die Strahltransfermatrix für die Grundeinheit dieses Systems an und zeigen Sie, dass  $b = 1$  und  $F = 1$  ist. Zeigen Sie, dass die quadratische Gleichung (1.67) in diesem Fall nur eine einzige Wurzel besitzt, sodass die Höhe des Strahls dann der Beziehung  $\alpha + m\beta$  mit Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  folgt.

#### Aufgabe 1-13: 4×4-Strahltransfermatrix für schief verlaufende Strahlen

Matrixmethoden lassen sich verallgemeinern, um auch schief zur optischen Achse verlaufende paraxiale Strahlen in zylindersymmetrischen oder astigmatischen (nicht zylindersymmetrischen) Systemen beschreiben

zu können. Ein Strahl, der die Ebene  $z = 0$  schneidet, wird allgemein durch vier Variablen beschrieben: die Koordinaten  $(x, y)$  seiner Lage in der Ebene und die Winkel  $(\theta_x, \theta_y)$  seiner Projektionen in die  $xz$ - und  $yz$ -Ebenen zur  $z$ -Achse. Auch der austretende Strahl ist durch vier Variablen charakterisiert, die linear mit den ursprünglichen Variablen verknüpft sind. In der paraxialen Näherung kann das System daher vollständig



durch eine  $4 \times 4$ -Matrix beschrieben werden. (a) Geben Sie die  $4 \times 4$ -Strahltransfermatrix einer Strecke  $d$  im Vakuum an. (b) Bestimmen Sie die  $4 \times 4$ -Strahltransfermatrix einer dünnen Zylinderlinse mit der Brennweite  $f$ , die entlang der  $y$ -Achse liegt. Die Zylinderlinse hat eine Brennweite  $f$  für Strahlen in der  $yz$ -Ebene, besitzt aber keine Brechkraft für Strahlen in der  $xz$ -Ebene.

## Weiterführende Literatur

### Allgemeines

- F. L. Pedrotti, L. M. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Cambridge University Press, 3. Aufl. 2018.
- T.-C. Poon, T. Kim, *Engineering Optics with MATLAB*, World Scientific, 2. Aufl. 2018.
- E. Hecht, *Optik*, de Gruyter, 7. Aufl. 2018.
- S. D. Gupta, N. Ghosh, A. Banerjee, *Wave Optics: Basic Concepts and Contemporary Trends*, CRC Press/Taylor & Francis 2016.
- B. D. Guenther, *Modern Optics*, Oxford University Press, 2. Aufl. 2015.
- C. A. DiMarzio, *Optics for Engineers*, CRC Press/Taylor & Francis 2011.
- M. Mansuripur, *Classical Optics and Its Applications*, Cambridge University Press, 2. Aufl. 2009.
- A. Walther, *The Ray and Wave Theorie of Lenses*, Cambridge University Press 1995, Paperback 2006.
- A. Siciliano, *Optics: Problems and Solutions*, World Scientific 2006.
- M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7. Aufl. 2002.
- D. T. Moore (Hrsg.), *Selected Papers on Gradient-Index Optics*, SPIE Optical Engineering Press 1993 (Milestone Series Bd. 67).
- F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill 1937, 4. Aufl. 1991.
- R. W. Wood, *Physical Optics*, Macmillan, 3. Aufl. 1934; Optical Society of America 1988.
- A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics: Optics*, Academic Press, Paperback 1954.

### Geometrische Optik

- P. D. Lin, *Advanced Geometrical Optics*, Springer 2017.
- V. N. Mahajan, *Fundamentals of Geometrical Optics*, SPIE Optical Engineering Press 2014.
- E. Dereniak, T. D. Dereniak, *Geometrical and Trigonometric Optics*, Cambridge University Press 2008.
- Yu. A. Kravtsov, *Geometrical Optics in Engineering Physics*, Alpha Science 2005.
- J. E. Greivenkamp, *Field Guide to Geometrical Optics*, SPIE Optical Engineering Press 2004.
- P. Mouroulis, J. Macdonald, *Geometrical Optics and Optical Design*, Oxford University Press 1997.

### Optische Systeme

- D. Malacara-Hernandez, Z. Malacara-Hernandez, *Handbook of Optical Design*, CRC Press/Taylor & Francis, 3. Aufl. 2013.
- J. Sasian, *Introduction to Aberrations in Optical Imaging Systems*, Cambridge University Press 2013.
- K. J. Kasunic, *Optical Systems Engineering*, McGraw-Hill 2011.
- R. E. Fischer, B. Tadic-Galeb, P. R. Yoder, *Optical System Design*, McGraw-Hill, 2. Aufl. 2008.
- W. J. Smith, *Modern Optical Engineering*, McGraw-Hill, 4. Aufl. 2008.
- D. C. O'Shea, *Elements of Modern Optical Design*, Wiley 1985.

### Matrizenoptik

- A. Gerrard, J. M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, Wiley 1975; Dover, Paperback 1994.
- J. W. Blaker, *Geometric Optics: The Matrix Theory*, Marcel Dekker 1971.

### Populäre und historische Darstellungen

- R. J. Weiss, *A Brief History of Light and Those that Lit the Way*, World Scientific 1996.
- A. R. Hall, *All was Light: An Introduction to Newton's Opticks*, Clarendon Press/Oxford University Press 1993.
- R. Kingslake, *A History of the Photographic Lens*, Academic Press 1989.
- M. I. Sobel, *Light*, University of Chicago Press 1987.
- A. I. Sabra, *Theories of Light from Descartes to Newton*, Cambridge University Press 1981.
- V. Ronchi, *The Nature of Light: An Historical Survey*, Harvard University Press 1970.
- W. H. Bragg, *Universe of Light*, Dover, Paperback 1959.
- I. Newton, *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections & Colours of Light*, 4. Aufl. 1704; Dover, Nachdruck 1979.