# 1

# Mathematik: Werkzeugkiste der Weltbeschreibung

## Alles ist Zahl

Die Entdeckung Amerikas war die Folge einer simplen Fehlkalkulation. Bei der Berechnung des westlichen Seewegs nach Indien hatte Christoph Kolumbus den Angaben des Bagdader Astronomen al-Farghani vertraut, dabei jedoch übersehen, dass dieser den Erdumfang nicht in römischen, sondern in den wesentlich längeren arabischen Meilen angegeben hatte. Ohne diesen Irrtum wäre der Genuese nie in See gestochen, seine Nussschalen hätten die gewaltige Strecke unmöglich bewältigen können.

Diese kleine Geschichte zeigt uns, wie weit die Mathematik zu Beginn der Neuzeit bereits in den Alltag der Menschen eingedrungen war. Mutete ihr bis ins späte Mittelalter hinein noch die Aura einer Geheimwissenschaft an, in die nur wenige Gelehrte eingeweiht waren, war sie nun auch für Seefahrer, Kaufleute, Verwalter, Baumeister und Handwerker zu einem unentbehrlichen Werkzeug geworden. Rechenmeister, wie der sprichwörtlich gewordene Adam Ries, erkannten diesen steigenden Bedarf. Ries schrieb ein populäres Standardwerk der Arithmetik, gründete eine Rechenschule und half tatkräftig mit, die Europäer von ihrem unhandlichen römischen Zahlensystem zu erlösen.

Zahlen und geometrische Figuren sind seitdem fester Bestandteil der modernen Welt. Wenn bis heute die meisten Menschen dennoch ein nicht ganz so entspanntes Verhältnis zur Mathematik haben, liegt das nicht zuletzt daran, dass uns die Natur den Umgang mit ihr nicht in die Wiege gelegt hat: Sobald wir uns einer etwas anspruchsvolleren Rechenaufgabe gegenübersehen, reagiert unser Körper wie auf einen Säbelzahntiger- Pupillen weiten sich, Muskeln spannen sich an, Blutdruck und Herzfrequenz steigen.[1]

Doch nicht nur physiologische Reaktionen machen den Umgang mit Mathematik schwierig. Wir wissen auch nicht so recht, wo wir sie im System der Wissenschaften überhaupt verorten sollen. Nirgendwo auf der Welt scheint die Mathematik einen festen Platz zu haben. Während Galileo Galilei in ihr die universelle Sprache zu erkennen glaubt, in der die Natur zu uns spricht, ist sie für den Mathematiker Leopold Kronecker die Geisteswissenschaft par excellence, ein Universum der Abstraktion, dessen Wahrheitsgehalt allein auf menschengemachten Regeln basiert. Ihr großes Mysterium ist, dass sie tatsächlich beides zu sein scheint, Natur und Geist: Irreale Vorstellungen, wie die Unendlichkeit, ermöglichen

*Was wir von der Welt wissen sollten,* 1. Auflage. Jens Bott

es, höchst reale physikalische Gesetze im endlichen Raum zu beschreiben. Mathematik entzieht sich allen gängigen Kategorisierungsversuchen, es gibt keine Schublade, in die sie sich einfach hineinstecken ließe. Wenn wir ihren Beitrag zur Welterklärung verstehen wollen, müssen wir uns also auf eine Gratwanderung zwischen Natur und Geist begeben. Doch wenn wir uns darauf einlassen und Vokabular und Grammatik dieser universellen Sprache erlernen, erhalten wir Zugriff auf eine faszinierende Werkzeugkiste voller einmaliger Weltbeschreibungsinstrumente.

## Eine Erfindung der Buchhalter

Menschenaffen und Rabenvögel sind durchaus in der Lage, Mengen einzuschätzen. Schimpansen etwa greifen keine Artgenossen an, wenn die eigene Gruppe nicht mindestens um das Anderthalbfache überlegen ist. Größenordnungen erkennen zu können ist ein evolutionärer Vorteil bei Angriff, Verteidigung oder Futtersuche. Einige Primaten können zudem Mengen bis vier oder fünf genau unterscheiden. Doch weiter geht die Tiermathematik nicht.[2]

Es gibt auch keinerlei Hinweise, dass der Homo sapiens vor Erfindung von Ackerbau und Viehzucht ein mathematisches Verständnis entwickelt hätte, das über das anderer Menschenaffen hinausginge.[3] Auch die wenigen Naturvölker, die bis vor kurzem noch isoliert als Jäger und Sammler lebten, hatten für alles, was eine Handvoll übersteigt, keine exakten Worte – ganz offenbar spielten derlei Größenordnungen in ihrem Alltag schlichtweg keine Rolle.

Mengen größer fünf kann das menschliche Gehirn nicht mehr simultan erfassen, wir müssen daher zählen. Zählen ist die Grundlage aller Mathematik. Als sich infolge der Neolithischen Revolution, dem Anfang bäuerlicher Kulturen, erstmals komplexere soziale Strukturen bildeten, wurde es eine Notwendigkeit. Tauschhandel, Landzuteilung, Erbschaften und Steuern erforderten ein erweitertes Zahlenverständnis, um die neuen, größeren Gemeinschaften organisieren zu können. So trivial es klingt: Die Anfänge der Mathematik waren schnöde Buchhaltungssysteme, bei denen Schreiber einfache Transaktionen auf Tontafeln festhielten.

Die Schreiber hatten dabei zwei Probleme zu lösen. Zunächst musste ein Weg gefunden werden, beim Zählen den Überblick zu behalten. Die erste Technik, die dazu entwickelt wurde, war so einfach wie naheliegend, dass wir sie noch heute auf Bierdeckeln benutzen: Strichlisten (Abb. 1).

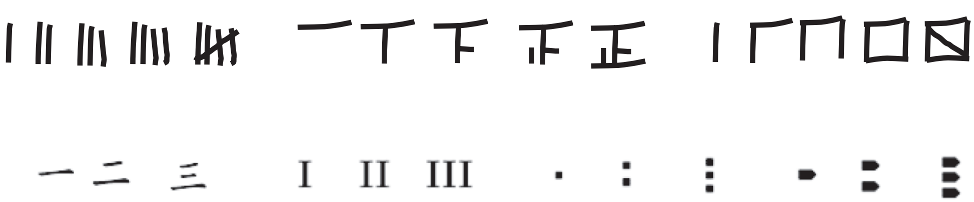

**Abb. 1:** Oben: Strichlisten aus Europa, Ostasien und Südamerika.
Unten: Die fingerähnlichen Zahlensymbole von eins bis drei der Chinesen, Römer, Maya und Sumerer.

Dass Strichlisten bis heute in verschiedensten Kulturen zu Fünfergruppen zusammengefasst werden, ist kein Zufall: Fünf ist die Zahl der Finger einer Hand. Kleine Kinder zeigen uns, dass es die natürlichste Sache der Welt ist, Finger als Zählhilfe zu nutzen. Fünf Finger mal zwei Hände sind der Ursprung des Dezimalsystems, das sich fast überall auf der Welt durchgesetzt hat. Hätten wir nur acht Finger, wäre unsere Referenz ein Oktalsystem, mit dessen Logik wir dann ebenfalls keinerlei Probleme hätten. Nimmt man zu den Händen auch noch die Füße hinzu, kann man bereits bis 20 zählen. Von der einst weiten Verbreitung des Zwanzigersystems zeugen heute noch Relikte mehrerer europäischer Sprachen, etwa das französische „quatre-vingts" („vier Zwanziger") für achtzig oder die dänischen Zahlwörter „tres" und „firs" für sechzig und achtzig als Verkürzungen von dreimal beziehungsweise viermal zwanzig.

Bei größeren Zahlen stoßen Strichlisten und menschlicher Körper allerdings schnell an natürliche Grenzen; so kam man auf die Idee, weitere Zahlensymbole zu erfinden. Mengen wie 10, 20, 30, 50, 60, 100 oder 1000 wies man eigene Zeichen zu. Das römische und das arabische Zahlensystem benutzen beispielsweise für die Zahl fünfzig die Symbole „L" beziehungsweise „50". Die Verbindung von Menge und Symbol war von nun an lediglich eine Frage der Konvention.

Die zweite Herausforderung war es, die Zahl mit dem zu zählenden Objekt zu verknüpfen; es lag nahe, dies über eine einfache Zeichnung zu tun, etwa  für ein Rind oder  für ein Scheffel Weizen. Dass „zählen" und „erzählen" im Deutschen und anderen Sprachen sehr ähnlich klingen, ist kein Zufall. Mathematik und Schrift haben einen gemeinsamen Ursprung; beide sind eng miteinander verwobene Kulturtechniken, die Ackerbauern und Viehzüchter zwangsläufig entwickeln mussten, um Ordnung in die neue, komplexere Welt zu bringen. Die ersten Schriftkundigen waren somit gleichzeitig Buchhalter, Schreiber und Rechenmeister. Die japanische Sprache erinnert uns heute noch daran, wie eng Zahl und Gezähltes miteinander verbunden sind: Je nachdem, ob es Bäume, Geldscheine, Schwerter, Jahre oder Fragen betrachtet, fordert das Japanische die Verwendung völlig unterschiedlicher Zählwörter.[4]

Zwei Weizenscheffel und zwei Weizenscheffel ergeben vier Weizenscheffel. Vier Ochsen und drei Ochsen ergeben sieben Ochsen. Erst mit der Zeit offenbarte sich den Menschen, was uns heute selbstverständlich erscheint: dass zwei und zwei immer vier ergibt, ganz gleich, was gezählt wird. Zahlen sind stets Zahlen von Etwas, zugleich aber immer auch Zahlen von allem.[5] Einmal gedanklich von den mit ihnen verbundenen Dingen befreit, ließen sich die merkwürdigen Gebilde nun als solche betrachten und auf ihre Eigenschaften hin untersuchen. Es zeigte sich, dass manche Zahlen ohne Rest teilbar waren, andere hingegen nicht, oder dass verschiedene Operationen zu demselben Ergebnis führten. So ließ sich die Zahl zwölf sowohl durch drei mal vier als auch durch zwei mal sechs erzeugen. Außerdem eigneten sich die Zahlen dazu, verschiedene Dinge zueinander in Beziehung zu setzen: Wert oder Gewicht eines Ochsen ließen sich auch in Weizenscheffeln ausdrücken. Reine und angewandte Mathematik förderten eine neue Form abstrakten Denkens, die bis heute eine der herausragendsten Kulturleistungen der Menschheit bleibt.

Bald zeigte sich, dass sich mit Zahlen auch die Regelhaftigkeit der Natur beschreiben ließ. Für die frühen bäuerlichen Hochkulturen war das Wissen um jahreszeitliche Rhythmen, die periodische Wiederkehr von Tagundnachtgleichen, Sommer- und

Wintersonnenwende, oftmals eine Frage des Überlebens. Der Schlüssel zum Verständnis der Natur stand ganz offenbar in den Sternen. Mit Mathematik ließ sich die himmlische Ordnung erstmals aufdecken und darstellen. Die Priester-Astronomen, die anhand von Sonnenständen und Mondphasen das nächste Hochwasser an Euphrat oder Nil vorhersagen konnten, gelangten so zu Macht und Einfluss. Spätestens jetzt war Mathematik auch ein Herrschaftsinstrument.

Vor 4.000 Jahren war das Sexagesimalsystem, das auf der Zahl sechzig basiert, Grundlage der babylonischen Mathematik. Das Jahr hatte 360 Tage, unterteilt in 12 Monate zu je 30 Tagen. (Eine Ungenauigkeit, die zwangsläufig häufige Schaltmonate nötig machte.) Unsere Zeitrechnung mit 60 Sekunden und Minuten, 24 Stunden und 12 Monaten, ist ein Überbleibsel dieses Denkens, ebenso die Einteilung des Kreises in 360 Grad. Neben seiner astronomischen Bedeutung hatte das Sexagesimalsystem aber auch noch einen ganz irdischen Vorzug, den es auf den Märkten des Zweistromlands täglich unter Beweis stellen konnte: Die Basiszahl 60 ist durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60 ohne Rest teilbar; Güter, die nach diesem System gehandelt wurden, waren daher in den meisten Fällen leicht aufzuteilen. Das war außerordentlich hilfreich, denn mit Zahlen, die man beim Teilen „zerbrechen“ musste, wussten die Babylonier noch nicht so recht umzugehen.

## Der logische Vierklang

Der Papyrus Rhind zählt heute zu den großen Schätzen des Britischen Museums. Benannt ist er nach dem jung verstorbenen schottischen Anwalt Alexander Rhind, der ihn 1858 in den engen, staubigen Gassen von Luxor aufgestöbert hatte. Die umfangreiche und vielseitige mathematische Aufgabensammlung gibt uns einen faszinierenden Einblick in das hoch entwickelte Mathematikverständnis der frühen Kulturen im Fruchtbaren Halbmond, ohne das Leistungen, wie der Bau der Pyramiden undenkbar gewesen wären. Der Papyrus macht aber auch deutlich, dass sich dieses Verständnis von unserem heutigen noch grundlegend unterschied. Die Auseinandersetzung mit den Zahlen hatte einen handwerklichen Charakter. Mathematische Behauptungen waren dann gültig, wenn sie sich mit Beobachtungen deckten. Vermutete Zusammenhänge, wie der bereits bekannte Satz des Pythagoras, wurden experimentell überprüft.

Wenn uns diese Vorgehensweise heute befremdlich anmutet, liegt das an Euklid von Alexandria. Über das Leben des Griechen um das Jahr 300 v. Chr. ist fast nichts bekannt, doch wir dürfen davon ausgehen, dass er in der hellenistischen Metropole am Nil mit dem mathematischen Wissen der Ägypter und anderer Völker der antiken Welt in Berührung kam. Euklid etablierte eine neue Betrachtungsweise, die sich nicht mehr mit der empirischen Überprüfung von Vermutungen zufriedengab. Das neue Denken war Ausgangspunkt einer tiefgreifenden Revolution, die unser Mathematikverständnis bis heute prägt.

Den strukturierten Weg zur mathematischen Wahrheit fand Euklid in der philosophischen Disziplin der Logik. Auf ihrer Grundlage beschrieb er erstmals eine Methode, nach der seitdem mathematisches Wissen dargestellt, überprüft und weiterentwickelt wird. Dargelegt hat er sie in seinem Werk „Die Elemente“, einem der bis heute größten Bestseller der Wissenschaftsgeschichte. Allein seit Erfindung des Buchdrucks wurde es mehr als tausendmal aufgelegt und für die Studenten Europas und des Vorderen Orients war es von der Antike bis zum Ende des 19. Jahrhunderts *das* Standardwerk für Geometrie.

Euklids Vorgehensweise beruht auf drei Pfeilern: Der erste Pfeiler sind Definitionen. Sie beschreiben das betrachtete Objekt rein sprachlich. Der zweite Pfeiler besteht darin, Vermutungen über Eigenschaften des definierten Objekts zu formulieren. Der dritte Pfeiler ist deren logische Überprüfung. Gelingt sie, ist ein Beweis erbracht – er erhebt die Vermutung in den Rang eines mathematischen Satzes.

Die Definition eines Objekts kann etwa lauten: „Ein Rechteck ist ein Viereck, dessen Innenwinkel alle rechte Winkel sind." Eine Vermutung, die man über das Rechteck anstellen kann, wäre beispielsweise: „Die Summe der Innenwinkel eines Rechtecks beträgt 360°". Da ein rechter Winkel 90° hat, ist die Aussage leicht zu beweisen. Doch das erklärt weder, was ein Viereck und ein rechter Winkel ist, noch warum letzterer immer 90° hat. Der Beweis baut also auf anderen Definitionen und Aussagen auf, die ihrerseits erst definiert und bewiesen sein müssen, bevor sich ein mathematisches Theorem aus ihnen ableiten lässt. Auf diese Weise wird die gesamte Mathematik zu einer komplexen Hierarchie von aufeinander aufbauenden Definitionen und logischen Beweisführungen.

Wo aber ist das Fundament, das die Pfeiler dieser Argumentationskette trägt? Hier kommen die Axiome ins Spiel. Sie stellen die unterste Ebene der Hierarchie dar, die Statik des gesamten Konstrukts hängt von ihnen ab. Axiome sind einfache Aussagen, die sich unmittelbar nachvollziehen lassen und daher keines Beweises mehr bedürfen. Sie sind unstrittig, weil sie der Anschauung und damit letztlich dem „gesunden Menschenverstand" entsprechen. So wie die Aussage: „Eine Gerade ist in einem Raum der kürzeste Weg zwischen zwei voneinander verschiedenen Punkten." Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die meisten Axiome uns etwas darüber sagen, wie wir den Raum wahrnehmen. Ohne Raum ist Mathematik nicht vorstellbar; nur weil es ihn gibt, können die Objekte unserer Betrachtung existieren und unterschieden werden.

Kinder stellen gerne „Warum-Fragen". Gibt man ihnen eine Erklärung, fragen sie nach dem Warum der Erklärung. Irgendwann kommt der Punkt, wo man – vielleicht ein bisschen hilflos – sagt: Weil es einfach so ist! Genauso ist es mit den Axiomen. Sie sind nicht weiter zerlegbar. Sie enthalten keine Beschreibung mehr, sondern stellen nur noch Anforderungen an den beschriebenen Gegenstand. Nur Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze stehen zur Verfügung, um Vermutungen zu bestätigen und so mathematisches Wissen zu erweitern. Das Zusammenspiel von Axiom, Definition, Vermutung und Beweis ist der Vierklang unseres heutigen Mathematikverständnisses.

Die mathematische Beweisführung hat Entsprechungen in den anderen Wissenschaften: Der Vermutung entspricht die Hypothese, der Beweis dem Experiment, der Satz der Theorie. Der entscheidende Unterschied besteht darin, dass die von den Griechen eingeführte Methodik keine empirische, sondern allein eine philosophische Überprüfung voraussetzt, einen rein logisch hergeleiteten Nachweis, der nur eine Interpretation zulässt. Wissenschaftliche Theorien haben hingegen ein Verfallsdatum; ihre Erkenntnisse sind immer nur vorläufig und können jederzeit durch neue Einsichten widerlegt werden. Den mathematischen Gesetzen aber mutet etwas Ewiges, Absolutes an. Es ist die Widerspruchsfreiheit, die ihnen ihre unglaubliche Haltbarkeit verleiht und

Welterklärungswerkzeuge von erstaunlicher Stabilität entstehen lässt.[6] Dass ein logischer Beweis nach Jahrtausenden noch genauso gültig ist, wie an dem Tag, an dem er zum ersten Mal erbracht wurde, verleiht der Mathematik eine Einzigartigkeit und Faszination, die sie – zumindest für viele Mathematiker – zur reinsten und schönsten aller Wissenschaften macht, zu der Disziplin, die sich der Wahrheit an weitesten anzunähern vermag.

Vor 2.300 Jahren haben die Griechen aus einer Erfahrungswissenschaft eine abstrakte Kunst gemacht. Von diesem festen Fundament aus ließen sich nun nach und nach die Geheimnisse von Arithmetik, Geometrie, Algebra, Analysis und Stochastik erforschen.

## Zahlenspiele

Seit der Antike versuchen Gelehrte die Eigenschaften der Zahlen zu erkunden und zu verstehen, wie sich mit ihnen am besten operieren lässt, zwei Felder, die wir heute als Zahlentheorie und Arithmetik bezeichnen. Die grundlegende Operation, um das Zählen abzukürzen, ist die Addition: $7 + 4 = 11$. Eine der ersten Einsichten war, dass sich das Zusammenzählen der immer gleichen Zahl vereinfachen lässt: $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ lässt sich bequemer als $5 \cdot 4$ ausdrücken. So wie die Addition eine Verkürzung des Zählens ist, ist die Multiplikation nichts anderes, als eine verkürzte Addition. Die Reihenfolge, in der Addition und Multiplikation ausgeführt werden, spielt keine Rolle; $4 + 7$ oder $4 \cdot 5$ führt zu den gleichen Ergebnissen. Für die Umkehrung der Addition, die Subtraktion, gilt das jedoch nicht: $7 - 4$ ist nicht dasselbe wie $4 - 7$. Die letzte Operation warf zudem ein neues Problem auf: Das Ergebnis war weniger als Nichts. Offensichtlich gab es auch Zahlen, die keinen Bezug zu den natürlichen Dingen dieser Welt haben und ebenso offensichtlich hatte jede positive Zahl einen negativen Zwilling.

Verwirrend waren auch manche Ergebnisse, die man erhielt, wenn man die Multiplikation umkehrte. 20 durch 4 oder 5 zu teilen war logischerweise kein Problem. Doch die Division 5:2 ließ sich mit den bisher bekannten Zahlen nicht beschreiben. Offenbar gab es neben den positiven und negativen „ganzen" auch noch „zerbrochene" Zahlen. Noch verworrener wurde es, wenn man 10 durch 3 oder 4 durch 7 teilte. Die Ergebnisse waren unendlich lang und bestanden entweder aus der immer selben Zahl oder einer nicht enden wollenden, sich ständig wiederholenden Zahlenfolge. Damit waren drei verschiedene Arten von Zahlen gefunden. Zahlen, die man realen Objekten zuordnen kann, bezeichnen wir heute als natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$). Ihre Erweiterung um die negativen Zahlen bildet die Menge der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$). Verhältnisse zweier ganzer Zahlen erweitern die Zahlenmenge zum Kreis der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$).

Um 530 v. Chr. gründete der griechische Philosoph Pythagoras in Süditalien – damals eine hellenische Kolonie – eine Gemeinschaft mit sektenartigen Zügen. Die Religion der Pythagoreer war die Zahl. Sie war die kreative Kraft des Universums, Ausdruck einer göttlichen Harmonie und Schlüssel zum Verständnis der materiellen Welt. Die wichtigsten Zahlen waren die von 1 bis 4: 1 stand für den Punkt; 2 für die Linie, die Verbindung zweier Punkte; 3 für die Fläche, die sich aus der Verknüpfung dreier Punkte ergibt. Die 4 erhob das Dreieck zu räumlichen Figur des Tetraeders. Zusammen ergaben die ersten vier Zahlen die „vollkommene Zahl“ 10, Grundlage des Dezimalsystems.

Auch die Musik war Teil dieser universellen, göttlichen Ordnung. Das Monochord, ein Instrument mit nur einer Saite, lieferte hierfür den Beweis: Teilte man die Saite im Verhältnis 2:1, entstand eine Oktave, der reinste Klang, den zwei Töne zusammen hervorbringen können. Das Verhältnis von 3:2 ergab eine Quinte, 4:3 eine Quarte. Die einfachen Zahlenverhältnisse schufen wundervolle Harmonien, je einfacher, desto schöner. Je komplizierter das Zahlenverhältnis jedoch, desto mehr versündigte man sich gegen das kosmische Prinzip. Das Verhältnis von 256:243 ergab eine kleine Sekunde, den geradezu schmerzlichen Halbtonschritt.

Alles war Zahl und folgte göttlichen Gesetzen. Wir können uns daher die Verzweiflung der Pythagoreer vorstellen, als sie bei ihren Erkundungen auf Zahlen stießen, die sich nicht als Verhältnis natürlicher Zahlen darstellen lassen. Das kann – ausgerechnet – beim Satz des Pythagoras der Fall sein: Wenden wir $a^2 + b^2 = c^2$ auf ein rechtwinkliges Dreieck an, bei dem die Seiten a und b jeweils die Länge von 1 haben, ist die längste Seite c, die Hypotenuse, dann definitionsgemäß die Wurzel aus 2 ($\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$). Diese Zahl lässt sich bis in die Unendlichkeit nachverfolgen, ohne dass jemals ein Muster erkennbar würde, die jeweils nächste Stelle ist vollkommen dem Zufall überlassen. Offenbar hatte die Zahlenfamilie mit den end- und musterlosen Brüchen, die sich nicht als Verhältnis, als Ratio, ausdrücken ließen, ein neues Mitglied bekommen: Die irrationalen Zahlen erweiterten das Zahlenheer zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Bei aller Fortschrittlichkeit verfügte die antike griechische Mathematik nicht über einige der uns heute selbstverständlich erscheinenden zahlentheoretischen Konzepte. Negative Zahlen waren unbekannt, so dass rationale Zahlen lediglich Beziehungsverhältnisse natürlicher Zahlen darstellten. Noch im 3. nachchristlichen Jahrhundert hatte der griechische Mathematiker Diophantos von Alexandria die Gleichung $4x + 20 = 4$, die mit $x = -4$ eine Lösung hat, als absurd bezeichnet, während man in China zu dieser Zeit seit bereits mindestens 400 Jahren mit negativen Zahlen operierte.[7]

Zudem fehlte eine Zahl, die sich weder Griechen noch Chinesen vorzustellen vermochten: die Null. Tatsächlich dauerte es eine ganze Weile, bis sich die Idee durchsetzen konnte, dass auch das Nichts eine mathematische Existenzberechtigung hat. Erstmals wurde die Null anfangs des 7. Jahrhunderts in einem Werk des indischen Mathematikers Brahmagupta beschrieben, sie ist damit eine erstaunlich junge Erfindung.[8] Die Null ist eine Eingebung von genialer Einfachheit. Sie entsteht, wenn man eine Zahl von sich selbst abzieht. In gewisser Weise entpuppt sich dann die zahlgewordene Abwesenheit als die mächtigste Ziffer überhaupt: Nimmt man mit dem „Nichts“ mal, wird jede noch so große Zahl dadurch vollständig vernichtet. Heute wird die Null in der Regel der Familie der natürlichen Zahlen zugeordnet – zumindest besagen dies DIN-Norm 5473 und ISO-Standard 80000-2, allerdings ohne eine inhaltliche Begründung zu liefern.

Dass auch die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ noch nicht das Ende des Zahlenuniversums ist, offenbarte sich dann im 16. Jahrhundert. Der Umstand, dass minus mal minus plus ergibt (so wie eine doppelte Verneinung eine Bejahung ist), führt schon bei sehr einfachen Gleichungen wie $x^2 = -1$ zu einem Problem, das sich mit reellen Zahlen nicht in den Griff bekommen lässt: Ganz gleich, ob man für x einen positiven oder negativen Wert einsetzt, das quadrierte Ergebnis wird immer eine positive Zahl sein. Dieses Dilemma brachte italienische Mathematiker der Renaissance auf die bemerkenswerte Idee, sich einfach eine Zahl vorzustellen, die die Quadratwurzel einer negativen Zahl repräsentiert. Die imaginäre Zahl „*i*" ist ein Phantom, weder positiv noch negativ, doch sie weist den Weg aus der Zwickmühle. Die Menge aller imaginären Zahlen erweitert den Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zur Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Unser heutiges Zahlenverständnis ist das Ergebnis einer historischen Entwicklung und in seinem aktuellen Umfang noch relativ jung. Von der bodenständigen Vorstellung natürlicher Zahlen ausgehend, führten arithmetische Spielereien zu den immer abstrakter werdenden Konzepten von Negativität, Rationalität, Irrationalität und Komplexität (Abb. 2).

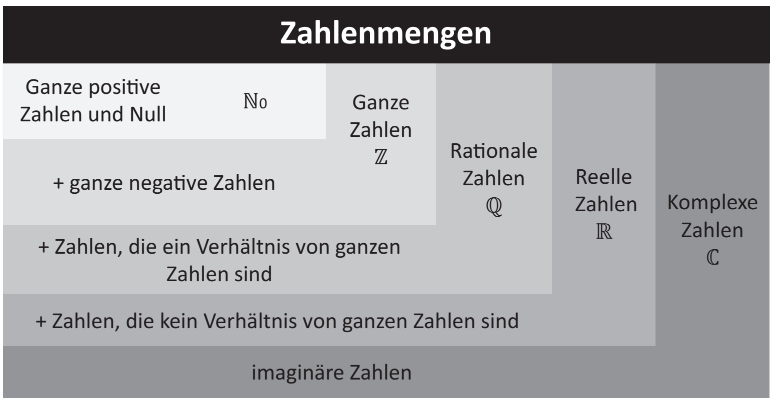


**Abb. 2:** Zahlenmengen.

Auch die Darstellung von Mathematik durchlief eine lange Entwicklung. Ägypter, Griechen und Römer verwendeten Additionssysteme, bei denen sich der Zahlenwert durch die Addition der einzelnen Ziffern ergibt. In dem bekannten römischen Additionssystem wird die Zahl 1777 als MDCCLXXVII dargestellt, wobei M für Tausend, D für fünfhundert, C für hundert, L für fünfzig, X für zehn, V für fünf und I für eins steht. Jede beliebige andere Anordnung der Zahlensymbole führt stets zum selben Ergebnis. Dass sich mit einem solchen System keine großen operativen Sprünge machen lassen, liegt auf der Hand. Wie bei der Null kam auch hier die Lösung aus Indien. Dort entwickelte sich etwa ab dem 5. Jahrhundert ein System, bei dem die Bedeutung einer Zahl von ihrer Position in der Ziffernfolge abhängt. Liegt einem solchen Stellenwertsystem das Dezimalsystem zugrunde, steht die letzte Stelle für die Zahlen von null bis neun, die vorletzte für die Zahlen von zehn bis neunundneunzig, die drittletzte für Zahlen zwischen einhundert und neunhundertneunundneunzig und so weiter. Bei 503 steht die „5" also für 500, bei 305 aber nur für 5. Das Stellenwertsystem mit der Null ermöglichte den praktischen Umgang mit gewaltigen Zahlen und die schnelle Durchführung komplexer

Rechenoperationen. Innerhalb von Sekunden ließen sich nun Milliardenbeträge addieren, obwohl ein Leben nicht ausreichen würde, bis zu dieser Summe zu zählen.

Das Stellenwertsystem, die Null und die indischen Zahlensymbole gelangten erst am Ende des Mittelalters über arabische Händler nach Europa. In den aufstrebenden norditalienischen Handelsmetropolen wie Venedig, Florenz, Pisa und Genua, die ab dem 13. Jahrhundert die Neuzeit vorbereiteten, wurde das Potential des neuen indo-arabischen Systems rasch erkannt – dem aufblühenden Kreditwesen kam es jedenfalls wie gerufen.

„Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik". Mit seinem Zitat weist einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten, Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der Kunst des Rechnens die zentrale Rolle zu. Neben Zahlentheorie, Zahlensystemen und Verknüpfungsregeln gehört die Frage der Teilbarkeit zu den elementaren Betrachtungsgegenständen der Arithmetik. Euklid war wohl der Erste, der erkannte, dass das ganze arithmetische System auf dem Fundament der Primzahlen ruht. Primzahlen sind alle natürlichen Zahlen, die größer als eins und nur durch eins und sich selbst teilbar sind, also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29… Der „Fundamentalsatz der Arithmetik" besagt, dass jede positive ganze Zahl als ein Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann. Die Zahl 18 ergibt sich beispielsweise als Verknüpfung der Primzahlen 2 und 3:18 = $2 \cdot 3 \cdot 3$. Genauso ergibt sich 9108 als das Produkt von $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$. Das Besondere an diesem Gesetz ist, dass es für jede Zahl immer nur eine einzige Möglichkeit gibt, sich aus Primzahlen herzuleiten. 9108 kann nur aus der genannten Verknüpfung von 2, 3, 11 und 23 entstehen, es gibt keine andere mögliche Kombination.[9] So wie die chemischen Elemente die Bausteine aller Moleküle sind, sind Primzahlen die Grundlage aller in der Natur vorkommenden Zahlen.

Seit der Antike versuchen die Menschen das geheimnisvolle Wesen primer Zahlen zu enträtseln. Schon Euklid wusste, dass ihre Menge unendlich groß sein muss. Sein Beweis war der folgende: Wäre die Anzahl der Primzahlen endlich, dürfte sich jenseits der letzten keine weitere Primzahl mehr finden lassen. Man kann sich nun eine Zahl $Z$ vorstellen, die das Produkt aller endlichen Primzahlen + 1 ist: $Z = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}_n + 1$. Wäre $Z$ eine zusammengesetzte Zahl, müsste sie sich aufgrund des Fundamentalsatzes der Arithmetik restlos in Primfaktoren zerlegen lassen. Teilt man $Z$ aber durch eine beliebige Primzahl, wird stets ein Rest von 1 übrigbleiben. Weil $Z$ keine Primfaktoren hat, muss sie also definitionsgemäß eine Primzahl sein. Damit ist aber auch die Aussage, dass die durch $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_n$ dargestellte Reihe endlich ist, zwangsläufig falsch. Euklid demonstrierte seinen Gedankengang anhand der ersten drei Primzahlen: Wären 2, 3 und 5 alle existierenden Primzahlen, wäre $Z = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$. 31 ist aber ebenfalls eine Primzahl, die in der vermeintlich „endlichen" Reihe nicht enthalten ist.

Eratosthenes von Kyrene, der rund 100 Jahre nach Euklid in Alexandria lebte, fand eine einfache Methode, mit der sich Primzahlen systematisch ermitteln lassen. Man beginnt mit der ersten Primzahl 2 und markiert alle Vielfachen von ihr, die somit zwangsläufig zusammengesetzte Zahlen sind. Genauso verfährt man mit der 3. Die 4 muss nicht mehr beachtet werden, denn sie ist ein Vielfaches von 2. Für die 5 werden wiederum alle Vielfache markiert und so weiter (Abb. 3).

Das Sieb des Eratosthenes macht schon für die ersten 100 Ziffern deutlich, dass die Primzahlen völlig willkürlich im Raum verteilt sind. Und so geht es auch jenseits der 100 weiter. Diese seltsame Musterlosigkeit hat die Mathematiker von Anfang an herausgefordert.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | | 5 | | 7 | | | |
| 11 | | 13 | | | | 17 | | 19 | |
| | | 23 | | | | | | 29 | |
| 31 | | | | | | 37 | | | |
| 41 | | 43 | | | | 47 | | | |
| | | 53 | | | | | | 59 | |
| 61 | | | | | | 67 | | | |
| 71 | | 73 | | | | | | 79 | |
| | | 83 | | | | | | 89 | |
| | | | | | | 97 | | | |

**Abb. 3:** Das Sieb des Eratosthenes.

Gibt es eine Formel, mit der sich Primzahlen berechnen lassen? Wenn ja, so wurde sie bis heute noch nicht gefunden.[10] Die einzig erkennbare Gesetzmäßigkeit ist die, dass der Abstand von einer Primzahl zur nächsten tendenziell größer wird, so dass es zunehmend Schwierigkeiten bereitet, große Exemplare in der Tiefe des Zahlenraums aufzustöbern: Unter den ersten 100 natürlichen Zahlen finden sich 25 Primzahlen. Zwischen 101 und 200 gibt es nur noch 21, für die nächsten 100 schrumpft die Gruppe auf 16. 1793 stellte der 15-jährige Carl Friedrich Gauß fest, dass sich die abnehmende Primzahlendichte anhand einer Formel abschätzen lässt. An der grundsätzlichen Regellosigkeit der Primzahlenverteilung im Zahlenraum ändert dies allerdings nichts. So folgen die Primzahlenzwillinge 824633702441 und 824633702443 direkt aufeinander.

Die elementaren Bausteine der mathematischen Ordnung scheinen selbst völlig ungeordnet zu sein, das Fundament der Arithmetik ist offenbar ein chaotisches Tohuwabohu. Und genau das macht die Primzahlen für die Kryptologie interessant. Die heutige Internetsicherheit beruht im Kern darauf, dass es sehr schwierig ist, sehr große Primzahlen zu finden. Durch die Multiplikation großer Primfaktoren können leicht gigantische Zahlen erzeugt werden; um den Code zu knacken, müssten die zugrundeliegenden Faktoren ermittelt werden. Dies ist beim heutigen Stand der Technik selbst für die leistungsfähigsten Computer mit einem mehrtausendjährigen Rechenaufwand verbunden. Fände jemand eine Formel für Primzahlen, würde dies über Nacht unsere gesamte Internetkryptographie aus den Angeln heben. Für Mathematiker wäre die Formel ein Traum – für den Rest der Menschheit ein Alptraum.

Der Umgang mit großen Zahlen war seit jeher eine Herausforderung. Als hilfreich erwies sich die Erkenntnis, dass sich auch die Multiplikation, ihrerseits eine verkürzte Additionen, mit Hilfe von Potenzen noch einmal verdichten ließ: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Der griechische Mathematiker und Ingenieur Archimedes von Syrakus (um 287-212 v. Chr.) bewies, dass sich Potenzen multiplizieren lassen, indem man ihre Exponenten addiert: $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$: Also: $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$ anstelle von $100 \cdot 1.000 = 100.000$. Das Wurzelziehen war wiederum nichts Weiteres als die Umkehr dieses Verdichtungsprozesses: $\sqrt[5]{100.000} = 10$.

In der Antike waren Größenordnungen, die mehrere Zehntausend überschritten, selten. (Die ägyptische Hieroglyphe für eine Million war auch das Symbol für den Gott der Unendlichkeit, Heh.) Das änderte sich, als in Europa im 16. Jahrhundert, Handel und Wissenschaften aufblühten. Da nun auch im Wortsinne astronomische Zahlen eine Rolle spielten, kam dem

Rechnen mit Exponenten plötzlich praktische Bedeutung zu. Der schottische Mathematiker John Napier (1550–1617) begann Anfang des 17. Jahrhunderts, Gleichungen im Stil von $10^3 = 1.000$ nach dem Exponenten aufzulösen und als Logarithmen darzustellen: Der Logarithmus von 1.000 zur Basis 10 ist 3. Logarithmen sind also nichts anderes als Exponenten. Napier berechnete solche Logarithmen für alle gängigen Zahlen. So ergibt $10^{2{,}994}$ beispielsweise die Zahl 987. Er veröffentlichte umfangreiche Tafeln, in denen man Logarithmen nachschlagen, addieren und das Additionsergebnis zurückübersetzen konnte. Das Produkt von $987 \cdot 113$ ergibt sich dann als $10^{2.994 + 2.053} = 10^{5.047} = 111.429{,}453$. Das Resultat ist kein exakter Wert, aber eine gute Näherung, die sich rasch und mit geringem Fehlerrisiko ermitteln lässt. Heute finden wir logarithmische Darstellungen vor allem noch in der Wissenschaft, etwa beim pH-Wert oder bei der bekannten Richterskala, die die Stärke von Erdbeben misst: Ein Erdbeben der Stärke sieben ist tausendmal stärker als ein Beben der Stärke vier.

Zu einer Zeit, zu der es weder Taschenrechner noch Computer gab, erlaubte das Rechnen mit Potenzen schlicht und ergreifend viel Zeit zu sparen. (Der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace (1749–1827) meinte sogar, dass sich durch Napiers Logarithmen die Lebenszeit der Astronomen verdoppelt habe.) Dies ist letztlich der Grund, warum wir uns auch heute noch in der Schule jahrelang mit kleinsten gemeinsamen Vielfachen, größten gemeinsamen Teilern, dem Kürzen von Brüchen und binomischen Formeln abmühen: In allen Fällen handelt es sich ursprünglich um historisch wichtige Verfahren, mit denen sich der Umgang mit den vier Grundrechenarten vereinfachen und lange Rechenwege abkürzen ließen. Noch heute können wir daraus lernen, in welchen Beziehungen die Zahlen zueinander stehen.

Auf einen besonders schönen Rechentrick verfiel der siebenjährige Carl Friedrich Gauß, als sein Volksschullehrer – der wahrscheinlich nur ein bisschen Ruhe haben wollte – die Klasse aufforderte, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Gauß kam schon nach wenigen Minuten mit der richtigen Antwort: 5050. Er hatte erkannt, dass die erste und die letzte Zahl der Reihe, die zweite und die vorletzte, die dritte und die drittletzte und so weiter, zusammen jeweils 101 ergeben. Insgesamt gibt es 50 solcher Zahlenpaare. In ihrer allgemeinen Form lautet die Gaußsche Summenformel bis zur Zahl $n$ aufaddiert: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Für $n = 100$ ergibt sich also: $\frac{100\cdot(100+1)}{2} = 5050$.

Die Kette $1 + 2 + 3 \ldots + 98 + 99 + 100$ besteht, einschließlich der Operanden, aus 199 Zeichen (entsprechend mehr für größere Summen). Gauß‘ Formel reduziert den Zahlenbandwurm auf nur neun Zeichen, die uns umgehend zum Ziel führen. Die Arithmetik kann uns daher auch noch in Zeiten des Taschenrechners wichtige Kernkompetenzen vermitteln: Zusammenfassen, Vermindern, Reduzieren, Verdichten, Verallgemeinern. So erlaubt sie es uns, trotz zahlloser Bäume den mathematischen Wald nicht aus den Augen zu verlieren.

## Idee und Form

Das griechische Wort „Mathematik“ lässt sich etwas diffus mit „Wissen“, „Studieren“ oder auch „Lernen“ übersetzen. Geometrie bedeutet im Griechischen hingegen schlicht „Landvermessung“ – ein für die Vermittlung von Weltbildern besonders nützlicher Begriff. Die Geometrie ist die anschaulichste aller mathematischen Disziplinen und kommt zudem völlig ohne Zahlen aus.

Auch der Ursprung der Geometrie liegt in den frühen Flusskulturen. Sie standen vor der Notwendigkeit, Acker- und Weideland nach den jährlichen Überschwemmungen neu aufteilen zu müssen. Die mathematischen Techniken, die damals an Euphrat, Nil, Indus und Gelbem Fluss entstanden, finden bis heute bei Architekten, Ingenieuren und Landvermessern Anwendung. Mit der Zeit offenbarten sich den Ackerbauern bestimmte Muster. So fanden sie heraus, dass zwei quadratische Felder mit einer Länge von jeweils 30 und 40 Schritten, zusammen genauso viel Arbeit machen, wie ein Feld mit einer Länge von 50 Schritten. Abermals waren es die Griechen, die den Fragen der Landvermessung als Erste systematisch nachgingen. Den Punkt, Anfang aller Geometrie, definierte Euklid als „das, was keine Teile hat“. Bewegt sich der dimensionslose Punkt durch den Raum, lässt er Linien, Dreiecke, Kreise, Quadrate, Kugeln oder Dodekaeder entstehen. Wie die Zahl „*i*“ oder die Unendlichkeit haben auch diese geometrischen Figuren keine Entsprechung in der realen Welt. Doch darum geht es auch nicht. Es geht um die „Idee“ des Kreises, um die Vorstellung eines Konstrukts bei dem sämtliche Punkte denselben Abstand zum Mittelpunkt haben – auch wenn sich in der Natur nichts findet, was diese Bedingung exakt erfüllen würde. Für die Griechen waren die perfekten Flächen und Körper Ausdruck kosmisch-göttlicher Ordnungsprinzipien, die unveränderlich und zeitlos in jedem Winkel des Universums ihre Gültigkeit haben – eine Vorstellung, die, wie wir noch sehen werden, in der Philosophie Platons eine zentrale Rolle spielt.

Von Euklid sind eine Reihe geometrischer Aufgaben überliefert, zu deren Lösung er keine anderen Hilfsmittel zuließ, als Lineal und Zirkel. Einige dieser antiken Herausforderungen mussten über 2.000 Jahre auf eine Lösung warten: Erst 1882 gelang Ferdinand von Lindemann der Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, der Nachweis, dass sich aus einem Kreis allein mit den beiden von Euklid genehmigten Werkzeugen kein Quadrat mit identischem Flächeninhalt konstruieren lässt. Ein besonderer Coup gelang bereits 1796 dem achtzehnjährigen Gauß, als er allein mit Lineal und Zirkel ein gleichmäßiges Siebzehneck konstruierte. Später konnte Gauß zeigen, dass es einen Zusammenhang zwischen der Konstruierbarkeit von regelmäßigen Polygonen und den Fermatschen Primzahlen gibt. Damit hatte er eine weitere unter den zahlreichen Verbindungen zwischen Geometrie und Zahlentheorie aufgedeckt (Abb. 4).[11]

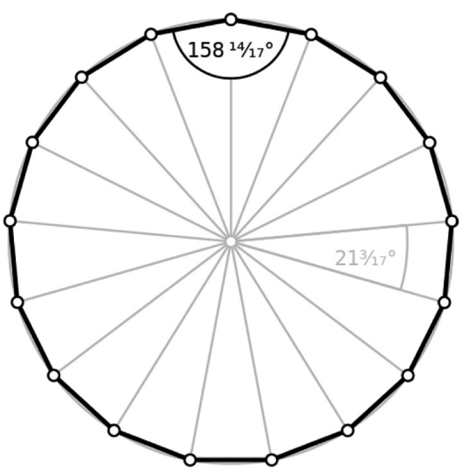


**Abb. 4:** Gleichmäßiges Siebzehneck.

Von weitem ähnelt ein Siebzehneck bereits einem Kreis, der geometrischen Figur, die die Menschen über die Jahrtausende hinweg wohl am meisten beschäftigt hat. Die Annäherung an die geheimnisvolle Kreiszahl $\pi$ (3,141592…), das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, vollzog sich in mehreren Etappen. Das Buch der Könige beschreibt ein Wasserbecken im Jerusalemer Tempel, dessen Durchmesser 10 Ellen betrug und von dem die Schrift berichtet, dass eine Schnur von 30 Ellen es rings umspannen konnte.[12] Der Papyrus Rhind bezifferte das Verhältnis mit $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1605$, eine deutliche Verbesserung gegenüber der biblischen drei.[13] Archimedes vermutete schließlich als Erster, dass es sich bei $\pi$ um eine irrationale Zahl handeln könnte. Dem Versuch, dies zu widerlegen, widmete der Brite William Shanks Mitte des 19. Jahrhunderts 15 Jahre seines Lebens, während denen er die ersten 700 Stellen der Zahl berechnete. (Tragischerweise unterlief ihm dabei an Stelle 528 ein Fehler.) Doch weder Shanks noch irgendein Computer konnten bislang ein Muster entdecken. Bis heute bleibt $\pi$ eine irrationale Zahl, bei der jede neue Nachkommastelle eine Überraschung darstellt. Und so müssen wir es wohl hinnehmen, dass wir nie ganz genau wissen können, wie groß ein Kreis tatsächlich ist.

Irrationale Zahlen begegnen uns in der Geometrie regelmäßig. Die europäische Norm für Schreibpapier entspricht einem Breite-zu-Länge-Verhältnis von 1 zu $\sqrt{2}$. Auch hier versteckt sich also der Satz des Pythagoras. Die Proportion stellt sicher, dass jedes Mal, wenn das Blatt in der Mitte gefaltet wird, die Beziehung von Breite zu Länge erhalten bleibt.

Eine ganz besondere Rolle spielt auch die irrationale Zahl $\Phi$. Als ihr Entdecker gilt der italienische Mathematiker Leonardo Fibonacci, der zu Beginn des 13. Jahrhunderts das Wachstumsmuster von Kaninchenpopulationen untersuchte. Fibonaccis Interesse an einer mathematischen Beschreibung tierischer Populationsdynamiken war Vorbote eines neuen Denkens. Mit wachsendem Interesse an wissenschaftlichen Fragen fiel auch der Mathematik eine neue Rolle zu: Mehr und mehr offenbarte sie sich nun als naturphilosophische Denksprache.

Bei der Fibonacci-Folge ergibt sich die nächste Zahl, indem man die beiden jeweils vorangegangen natürlichen Zahlen addiert, also 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 … Je weiter die Zahlenfolge fortschreitet, umso mehr nähert sich der Quotient der jeweils letzten beiden Zahlen der Zahl $\Phi = 1{,}6180339887$.

Die Fibonacci-Zahlen finden sich nicht nur beim Kaninchennachwuchs: Gänseblümchen haben stets 34 oder 55, manchmal auch 89 Blütenblätter. Auch bei Sonnenblumen, Tannenzapfen, Ananasfrüchten, Schneckenhäusern, den Verzweigungen der Bronchien oder dem Größenverhältnis von mittleren zu seitlichen Schneidezähnen des Menschen finden wir die Zahl $\Phi$. Offenbar handelt es sich um ein allgemeines Wachstumsmuster der Natur.

Fibonaccis Zahl begegnet uns allerdings nicht nur in der Natur, sondern auch dort, wo sich der Mensch seine Umwelt selbst erschafft. Denn ganz offenbar empfinden wir das irrationale Verhältnis von 1:1,618…als ausgesprochen ästhetisch. Unter der Bezeichnung „Goldener Schnitt" begegnet es uns in der Architektur der Cheops-Pyramide, bei Flaggen, im Pentagramm und bei modernem Industriedesign (Abb. 5). Dass Natur und Kultur denselben Mustern folgen, überrascht weniger, wenn wir bedenken, dass unsere

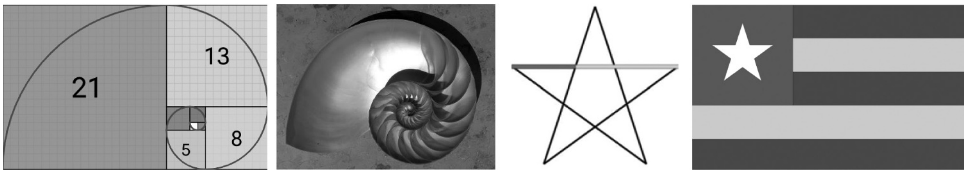


**Abb. 5:** Der „Goldene Schnitt“ in Natur und Kultur.

Naturwahrnehmung tiefe Spuren in der menschlichen Seele hinterlassen hat. Die Natur prägt seit Jahrmillionen unseren Sinn für Schönheit und Harmonie.[14] Auch unserer Vorliebe für Symmetrien macht das deutlich: In einer von Schwerkraft geprägten Welt versprechen sie Stabilität, während Asymmetrien uns meist suspekt sind. Daher weisen nicht nur die allermeisten Lebewesen, sondern auch fast alle von Menschenhand geschaffenen Objekte klare Symmetrieachsen auf.

Eine erste entscheidende Erweiterung des klassischen Lineal-und-Zirkel-Horizonts verdanken wir dem französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes (1596–1650). Descartes war der Erste, der Linien, Flächen und Räume systematisch mit Zahlen verband und damit die analytische Geometrie begründete. In dem nach ihm benannten kartesischen System kann mithilfe von x-, y-, und z-Achsen jedem Punkt auf einer Ebene oder im Raum eine Koordinate zugeordnet werden, die seine Position eindeutig bestimmt. Damit war es nun auch möglich, geometrische Figuren in Form von Gleichungen zu beschreiben – eine Verbindung, die die Schlagkraft der Mathematik beträchtlich erhöhte.

Die wirkliche Revolution der Geometrie vollzog sich jedoch erst im 19. Jahrhundert. Gauß, der Ungar János Bolyai und der Russe Nicolai Lobatschewski entdeckten nach und nach, dass Euklid und seinen Jüngern wichtige Teile der Raumlehre bislang verborgen geblieben waren, dass es nicht nur eine, sondern verschiedene Geometrien gibt.[15] Denn für gekrümmte Flächen, wie die Oberfläche einer Kugel, sind die klassischen Axiome der Raumbeschreibung nicht mehr gültig: Eine Gerade ist auf einer gebogenen Fläche nicht mehr die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten; zwei Geraden, die am Äquator noch parallel verlaufen, schneiden sich an den Polen; die Summe der Innenwinkel des so entstandenen Dreiecks beträgt mehr als 180°. Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie erschütterte eine über 2.000 Jahre währende vermeintliche Gewissheit, denn Euklid galt nun nur noch unter bestimmten, einschränkenden Bedingungen. Das alte Fundament war kollabiert, das Gebäude einer Geometrie gewölbter Flächen und gekrümmter Räume musste auf der Basis neuer Axiome errichtet werden. Entscheidende Beiträge hierzu kamen von Bernhard Riemann. 1854 stellte er in Anwesenheit des nun greisen aber tief beeindruckten Carl Friedrich Gauß seine „Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ vor. Riemann entwarf hierin eine Vision, wie sich im kartesischen Koordinatensystem nicht nur dreidimensionale, sondern auch Räume mit beliebig vielen Dimensionen darstellen lassen.

Riemann selbst und seinen Zeitgenossen galten solche Überlegungen als theoretische Gedankenspiele ohne praktischen Nutzen. Doch rund 60 Jahre später erkannte Albert Einstein in Riemanns Geometrie vieldimensionaler Räume das Werkzeug, das ihm die korrekte

Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie ermöglichen würde. Hier begegnen wir einem weiteren großen Geheimnis der Mathematik: Logisch-philosophische Spielereien entpuppen sich Jahrzehnte, manchmal erst Jahrhunderte später als höchst nützliche Welterklärungswerkzeuge: Der von Leibniz erfundene Binärcode gibt heute den Computern den Takt vor; die ursprünglich zweckfreie Zahlentheorie ist heute Grundlage der Internetsicherheit; Ingenieure können ohne imaginäre Zahlen nicht mehr arbeiten und Fibonaccis Folge enträtselt universelle Wachstumsmuster. Der Physik-Nobelpreisträger Eugene Wigner bezeichnete dieses Phänomen als „die unglaubliche Wirksamkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften". Beschreibt die heutige theoretische Mathematik also die Physik der Zukunft? Können wir gar, wie Leibniz es formulierte, durch sie „einen erfreulichen Einblick in die göttlichen Ideen gewinnen"?[16] Die Frage nach dem Wesen der Mathematik – Natur oder Geist, Entdeckung oder Erfindung – bleibt weiter offen.

## Jagd auf das Unbekannte

Entgegen einem verbreiteten Vorurteil war das Mittelalter eine Epoche wichtiger Fortschritte. Das gilt auch für die Mathematik. Indische Gelehrte wie Brahmagupta entwickelten das Dezimalsystem und erfanden die Null; der Italiener Fibonacci verband als einer der Ersten Mathematik und Naturbeobachtung. Eine ganz besondere Rolle kommt dem Perser Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi zu. Um das Jahr 830 verfasste er ein Buch mit dem Titel „Rechnen mithilfe der Ergänzung und des Ausgleichs", in der er das Wissen des Griechen Diophantos von Alexandria mit dem Brahmaguptas verband. Seine neue Synthese aus Ost und West bezeichnete Al-Chwarizmi als al-gabr".

Al-Chwarizmis einfache Darstellungen wurden mehrfach ins Lateinische übertragen. Der Gelehrte aus dem Orient begegnet uns daher auch heute noch auf Schritt und Tritt: Aus seiner Methode al-gabr wurde Algebra, aus dem arabischen Wort „Sifr" für „Null" entstand das Wort „Ziffer" und der Name des Autors wurde in dem Wort „Algorithmus" verewigt.

Algebra erlaubt es uns, zahllose Zusammenhänge in allgemeiner Form darzustellen. Allgemein, weil wir Buchstaben als Platzhalter verwenden: $a^2 + b^2 = c^2$. Die vielleicht bekannteste Gleichung der Welt beschreibt die Beziehung zwischen den Quadraten, die sich aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren lassen. Diese Beziehung gilt immer, ganz gleich welche reelle Zahlen wir als Variablen für die Buchstaben einsetzen. Die beiden Aussagen links und rechts des Gleichheitszeichens wiegen gewissermaßen gleich schwer; wir können sie uns wie die Schalen einer Waage im Gleichgewicht vorstellen. Auf der linken Schale lasten $a^2 + b^2$, auf der rechten $c^2$.

Sind zwei „Gewichte" bekannt, beispielsweise 3 für *b* und 5 für *c*, können wir das dritte „Gewicht" ausrechnen. Al-Chwarizmis Methode des systematischen Ausgleichens beschreibt, wie sich der fehlende Wert „a" bestimmen lässt. Bei der Betrachtung von $a^2 + 9 = 25$ stört, dass sich in der Waagschale für a auch noch die 9 befindet, wir müssen sie daher entfernen. Damit gerät die Waage allerdings aus dem Gleichgewicht, denn die rechte Waagschale wiegt nun 9 schwerer als die linke. Nehmen wir nun auch auf der rechten Seite 9 weg, kommt das Ganze wieder ins Lot. Mathematisch ausgedrückt: $a^2 + 9 - 9 = 25 - 9$. Diese Beziehung können wir arithmetisch vereinfacht als $a^2 = 16$ darstellen. Nach derselben Logik lassen sich nun beide Seiten der Gleichung einer Wurzelbehandlung unterziehen: $\sqrt{a^2} = \sqrt{16}$. Somit erhalten wir $a = 4$ (beziehungsweise – 4). Die konkrete Ausprägung des Satz des Pythagoras lautet in diesem Fall also: $16 + 9 = 25$ (Abb. 6).

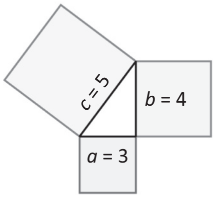


**Abb. 6:** $a^2 + b^2 = c^2$ als algebraische Darstellung einer geometrischen Beziehung.

Algebra erlaubt uns also, das Unbekannte zu finden. Damit lässt sich Wissenschaft betreiben. Über die Kenntnis abstrakter Zusammenhänge bringen wir Neues in Erfahrung. Wir müssen nicht losziehen und die Seite „$a$“ des Weizenfeldes abschreiten oder eine Bildschirmdiagonale mit dem Zollstock ausmessen. Algebraisches Wissen hat der Menschheit bereits unzählige Tonnen Schweiß und unzählige Jahre Arbeit erspart: Bereits die babylonischen Landvermesser konnten sich in der Mittagshitze einfach unter einen Baum setzten und die fehlende Information ausrechnen. Mathematik lehrt uns eindrücklich, dass Studieren über Probieren geht.

Die Ausgleichstechnik erlaubt es uns, selbst Dinge auf die virtuelle Waagschale zu legen, die wir in der Realität niemals wiegen könnten. Newtons Gravitationsformel – auf sie kommen wir im nächsten Kapitel zurück – beschreibt die Kraft, mit der sich zwei Massen gegenseitig anziehen. Diese Massen können beispielsweise ein Apfel und die Erdkugel sein. Durch algebraische Umformungen lässt sich die Formel einfach nach der Erdmasse auflösen und der Apfel verrät uns, dass das Gewicht der Erde rund 5.973 Milliarden Billionen Tonnen beträgt. Experimentell ließe sich diese Zahl unmöglich bestimmen, doch Algebra löst das Problem auf eine verblüffend einfache Art und Weise.

Alles, was sonst noch unter Algebra behandelt wird, sind Variationen dieses Themas. Stets geht es um einen Ausgleich, wobei die technische Durchführung in einigen Fällen recht anspruchsvoll sein kann. Dazu gehören Gleichungen höherer Ordnung, bei denen die Unbekannte in der zweiten, dritten oder einer noch höheren Potenz steht ($x^2, x^3 \ldots x^n$) oder lineare Gleichungssysteme, bei denen viele verschiedene Gleichungen und Unbekannte ($x_1, x_2, \ldots x_n$) zueinander in Beziehung gesetzt werden. Solchen Schwierigkeiten rückt man mit Polynomdivision, Eliminationsverfahren – ein einfaches Verfahren für lineare Gleichungen stammt von Gauß – Linearer Optimierung, Matrizen- oder Vektorrechnung zu Leibe. Doch letztlich stecken dahinter stets al-Chwarizmis algebraische Ausgleichs- und Umformungsregeln.[17]

Bereits in der Antike war bekannt, dass es für den Satz des Pythagoras unendlich viele so genannte pythagoreische Tripel gibt, also drei natürliche Zahlen, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, wie etwa 3, 4 und 5 oder 119, 120 und 169. Intuitiv würden wir daher für $a^3 + b^3 = c^3$ und höhere Potenzen dasselbe erwarten. Doch Intuition ist in der Mathematik kein guter Ratgeber. Denn wie der Franzose Pierre de Fermat bereits im 17. Jahrhundert vermutete, gibt es für diese höheren Potenzen überhaupt keine Lösung. Fermat musste damals den Beweis für seine Vermutung schuldig bleiben. Allerdings ist dieser Nachweis auch alles andere als trivial. Nachdem sich 350 Jahre lang zahllose Mathematiker an ihm versucht haben, gelang es dem Briten Andrew Wiles 1994 schließlich, nach vieljähriger Arbeit, den Beweis der Unmöglichkeit zu erbringen. Für die Darstellung seines Gedankengangs brauchte er über 100 Seiten. Die vermeintlich einfache Erhöhung eines Exponenten von 2 nach 3 führt hier von simpler Schulmathematik zu einer selbst für die versiertesten Mathematiker kaum nachzuweisenden Unmöglichkeit.

## Reise in die Unendlichkeit

Im 17. Jahrhundert hatte die wissenschaftliche Revolution bereits beachtlich an Fahrt aufgenommen; die Naturphilosophen drangen immer tiefer in die materielle Ordnung der Welt ein. Schon bald zeigte sich, dass die mathematische Beschreibung rein statischer Zustände hierzu nicht mehr ausreichte. Um das Jahr 1670 stellten sich daher zwei große Geister, Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), unabhängig voneinander sehr grundsätzliche Fragen. Newton war bei einer recht einfachen Naturbeobachtung, dem Fall eines Apfels, auf ein Phänomen gestoßen, bei dem ihn die bekannten Werkzeuge der Algebra und Geometrie im Stich ließen. Der Apfel fällt keinesfalls gleichförmig, sondern zu Beginn langsamer, am Ende seiner Bahn aber schneller. Während des Falls erhöht sich die Geschwindigkeit kontinuierlich: In jedem noch so winzigen Augenblick ist sie größer, als im vorangegangenen Moment. Wie ließ sich dieses Verhalten mathematisch korrekt beschreiben?

Newton machte sich daran, das fehlende Rechenwerkzeug, selbst zu bauen. Dabei bediente er sich eines überaus dreisten Taschenspielertricks. Sein Kunstgriff gilt heute als die Geburtsstunde der Analysis, der Mathematik, mit der man all jenen Erscheinungen zu Leibe rückt, bei denen sich die Bedingungen laufend ändern. Die neue Methode war keine bloße Weiterentwicklung von Algebra und Geometrie, sie war eine grundsätzlich neue Art die Welt zu betrachten und ihre Dynamik einzufangen. Algebra und Analysis verhalten sich zueinander wie Foto zu Film. Die Mathematik hatte laufen gelernt.

Newtons Geniestreich bestand darin, die Wechselhaftigkeit der Welt mithilfe einer Rechengröße einzufangen, für die es keine Zahl gibt: die Unendlichkeit. Um seinen Gedankengang nachzuvollziehen, müssen wir zunächst das Wesen von Funktionen betrachten. Funktionen sind Abbildungen von Zusammenhängen zwischen variablen Größen. Üblicherweise wird dabei die unabhängige Variable (Ursache) mit $x$ und die abhängige Variable (Wirkung) mit $y$ bezeichnet. Man kann dann sagen $y$ ist eine Funktion, eine Abbildung, von x oder kurz: $y = f(x)$.

Funktionen sind Rechenanweisungen, die algebraisch darstellen, wie das eine vom anderen abhängt, gewissermaßen der Klebstoff, der Zahlenmengen miteinander verbindet. Damit lassen sich Annahmen über die Beschaffenheit der Welt mathematisch beschreiben: Die Umlaufbahnen der Planeten sind abhängig von der Gravitation, die Geschwindigkeit eines Segelschiffs von der Windstärke, der Treibstoffverbrauch eines Autos von seinem Gewicht, das Pflanzenwachstum von der Intensität der Sonnenstrahlen, die Nachfrage vom Preis.[18] Wer die Welt beschreiben möchte, muss nach Funktionen suchen, die diese Zusammenhänge abbilden.

Betrachten wir beispielhaft zwei denkbar einfache Abhängigkeiten (Abb. 7):

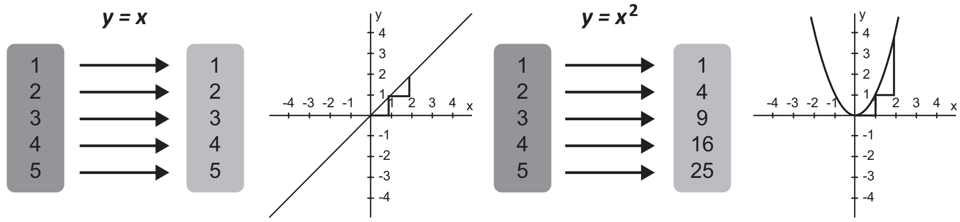


**Abb. 7:** Lineare und exponentielle Funktionen.

$y = x$ besagt, dass der abhängige Wert dem unabhängigen genau entspricht. Wendet man diese Funktionsvorschrift auf die unendliche Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an, und überträgt sie in ein kartesisches Koordinatensystem, erhält man den Funktionsgraphen, eine Gerade, die von links unten nach rechts oben ansteigt. Der Funktionsgraph macht den Zusammenhang geometrisch sichtbar und somit anschaulich. Die Steigung der Funktion ist leicht zu beschreiben: Immer, wenn man, wie auf einer Treppe, eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben geht, stößt man wieder an die Linie des Funktionsgraphen. Die Steigung, der Quotient aus Höhe und Tiefe der Stufen, beträgt also stets „1", ganz gleich, welchen Punkt der Geraden wir betrachten.

Bei der zweiten Funktion, $y = x^2$, kommen wir mit der Treppen-Metapher jedoch sofort ins Stolpern, denn die Höhe jeder Treppenstufe verändert sich nun von Schritt zu Schritt. Der Funktionsgraph ist eine Kurve und Kurven zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Steigung an jedem Punkt eine andere ist.

Lineare und exponentielle Funktionen leisten sehr unterschiedliche Beiträge zu unserem Weltverständnis. Unsere Wahrnehmung und Intuition ist von linearem Denken geprägt. Das entspricht unserer Alltagserfahrung und der evolutionären Prägung der letzten Jahrhunderttausende: Wir benötigen einen Tag, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen und zwei Tage für die doppelte Strecke. Wenn wir ein Feld an einem Morgen bestellen, brauchen wir drei Vormittage für drei ähnlich große Felder und fünf Rinder fressen fünfmal so viel Heu wie ein Rind.

Exponentielle Zusammenhänge hingegen sind Ausdruck von Wachstums- und Zerfallsprozessen, wie sie uns vielfach in der Natur begegnen: Erdbeschleunigung, Radioaktivität, Bakterienkolonien, Kaninchenpopulationen, Weltbevölkerung. Sie finden sich aber auch in kulturellen und technischen Zusammenhängen, etwa bei Infektionsraten, Zinsen oder dem Wachstum von Informationsspeicherkapazitäten auf Computerchips.

Sind wir mit exponentiellen Verläufen konfrontiert, ist unsere Intuition dahin. Eine Kugel, die mit doppelter Geschwindigkeit aufschlägt, verdoppelt ihre Wirkung nicht, sondern vervierfacht sie. Die dreifache Geschwindigkeit führt bereits zu einem neunfach verstärkten Effekt. Wir neigen dazu, exponentielles Wachstum zu unterschätzen, insbesondere weil der anfänglich flache Kurvenverlauf von einer linearen Entwicklung kaum zu unterscheiden ist. Doch haben exponentielle Prozesse erst einmal Fahrt aufgenommen, geraten sie sehr schnell außer Kontrolle. Das bekannte Beispiel, das harmlos mit einen Reiskorn auf dem ersten Feld eines Schachbretts beginnt und bei dem sich die Körnerzahl mit jedem neuen Feld verdoppelt, führt dazu, dass sich auf dem letzten Feld eine Reismenge türmt, für deren Abtransport man einen Zug von über 100 Millionen Kilometern Länge bräuchte. Ließe sich ein Blatt Papier 42-mal hintereinander falten, so würde seine Höhe von der Erde bis zum Mond reichen. Die Evolution hat uns das intuitive Verständnis für Wachstumsdynamiken nicht in die Wiege gelegt. Allein die Mathematik kann uns hier auf den Boden der Tatsachen zurückholen.

Doch zurück zu Newtons Problem. Ihn beschäftigte die Frage, wie sich die laufend ändernde Steigung von Exponentialfunktionen für einen beliebigen Punkt ermitteln lässt. Seine Idee leuchtet jedem ein, der schon einmal das Meer betrachtet hat: Der Horizont erscheint uns als eine gerade Linie. Tatsächlich aber ist er gekrümmt; wir nehmen es nur deshalb nicht wahr, weil wir lediglich einen sehr kleinen Ausschnitt des Erdumfangs sehen. Diesen Gedanken können wir auf die Kurve übertragen: Dazu legen wir eine Gerade so durch einen Kurvenabschnitt, dass sie den Funktionsgraphen in zwei Punkten schneidet. In der Geometrie spricht man in diesem Fall von einer Sekante.

Der Sekantenabschnitt innerhalb der Kurve lässt sich als Hypotenuse – die längste Seite eines rechtwinkligen Steigungsdreiecks – betrachten. Sie beschreibt die Steigung zwischen den beiden Schnittpunkten. Im Durchschnitt steigt die Gerade genauso stark wie der durch sie begrenzte Kurvenabschnitt, nur, dass die Gerade gleichmäßig ansteigt, während das Kurvensegment zunächst weniger stark, dann aber stärker als die Gerade zunimmt. Nähern wir nun die beiden Schnittpunkte einander an, indem wir etwa den unteren Punkt entlang der Kurve nach oben schieben, wird das Steigungsdreieck zunehmend kleiner. Damit wird es immer schwieriger, einen Unterschied zwischen der Hypotenuse des Steigungsdreiecks und dem durch sie definierten Kurvenabschnitt auszumachen; der Fehler, der durch die Krümmung der Linie entsteht, wird, wie beim Meereshorizont, in dem Maße kleiner, in dem wir den betrachteten Abschnitt verringern. Gleichzeitig wird das Verhältnis der beiden kurzen Dreieckseiten – der so genannte Differenzenquotient – größer, denn die Kurve steigt im Verlauf ja immer stärker an. Wenn wir nun den unteren Punkt so weit nach oben schieben, dass er sich mit dem oberen Punkt deckt, verschwindet das Dreieck. Die Sekante ist zu einer Tangente geworden: Die Steigungsgerade schneidet die Kurve jetzt nicht mehr, sondern berührt sie nur noch in einem einzigen Punkt (Abb. 8).

In dem Augenblick, in dem aus der Sekante eine Tangente wird, ist die Länge der beiden kurzen Dreiecksseiten null; mit diesem Übergang wird aus dem Differenzenquotient

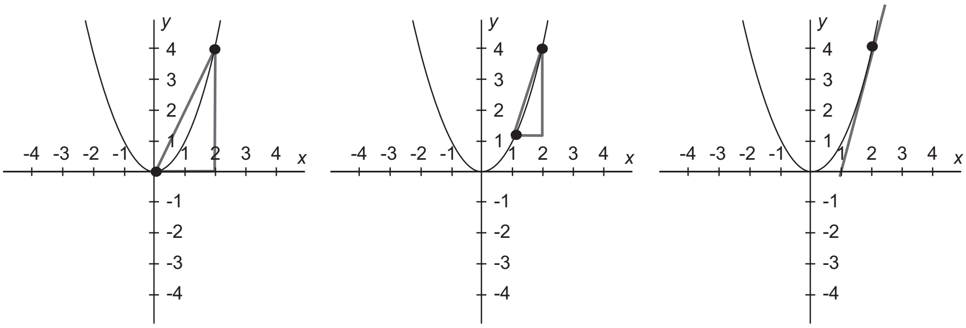


**Abb. 8:** Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten.

der „Differenzialquotient" – er gibt uns die Steigung der Kurve am Tangentenpunkt an. Das ist der ganze Trick! Durch Umformung des Differenzialquotienten lässt sich zeigen, dass die Steigung für einen beliebigen Kurvenpunkt als eine neue Funktion – die so genannte Ableitung der ursprünglichen Kurvenfunktion – dargestellt werden kann. Beispielsweise erhält man die Ableitung einer Funktion der Form $y = x^{\mathrm{n}}$, indem man den Exponenten n der unabhängigen Variablen $x$ um eins verringert und $n$ vor die Variable schreibt. Die erste Ableitung unserer Funktion $y = x^2$ lautet also $y = 2x^1$. Wir können nun beliebige Werte entlang der $x$-Achse einsetzen und für jeden dieser Werte die Steigung am entsprechenden Kurvenpunkt ermitteln. Am Punkt $x = 0$ ist, wie sich direkt aus dem Funktionsgraphen ablesen lässt, die Steigung null. An der Stelle $x = 0{,}5$ beträgt die Steigung 1, an der Stelle 2 beträgt sie 4.

Die Differenzialrechnung war das Werkzeug, das bisher gefehlt hatte. Ihr genialer Kunstgriff ist die Einbindung eines irrealen Konstrukts – der Vorstellung eines unendlich kleinen Dreiecks – um ein höchst reales Problem zu lösen. Auch bei der Differentialrechnung lässt sich die Perspektive umkehren: Dies führt uns zur Integralrechnung, die es uns beispielsweise erlaubt, die Größe der Fläche unterhalb einer Kurve zu bestimmen. Die grundlegende Überlegung ist die gleiche. Betrachten wir dazu die Fläche, die seitlich durch die beiden senkrechten Geraden an den Stellen a und b, unten durch die $x$-Achse und oben durch die Kurve begrenzt wird: Wäre diese Fläche rechteckig, ließe sie sich rechnerisch leicht bestimmen. Wenn wir die Fläche mit kleinen Rechtecken ausfüllen, erhalten wir immerhin einen Näherungswert. Was die Methode jedoch ungenau macht, sind die weißen Flächen unter der Kurve. In dem Maße, in dem wir nun die Rechtecke weiter verkleinern, verringern wir diese Unschärfe. Die weißen Flächen unter der Kurve schrumpfen und nähern sich zunehmend einer Dreiecksform, die wir schließlich mit dem bereits bekannten Unendlichkeits-Trick verschwinden lassen können.[19] Vergegenwärtigen wir uns noch einmal, was wir gerade getan haben: Wir haben unendlich viele, unendlich kleine Flächen addiert und erhalten so eine Zahl, die uns eine reale Fläche unter einer Kurve angibt (Abb. 9).

Da Leibniz unabhängig von Newton fast zur gleichen Zeit dieselbe Idee hatte, gerieten die beiden über die Urheberschaft der Infinitesimalrechnung in einen langjährigen, erbitterten Prioritätsstreit, bei dem fast jedes Mittel recht war, um den anderen zu diskreditieren – ganz offenbar sind auch Mathematiker nur Menschen.[20] Die Wissenschaft hielt jedenfalls am Ende des 17. Jahrhunderts ein neues, mächtiges Werkzeug in der Hand, mit dem sich die zahllosen Windungen, Wellen und Wachstumsprozesse der Natur korrekt beschreiben ließen. Newton konnte nun die Geschwindigkeit des sich beschleunigenden

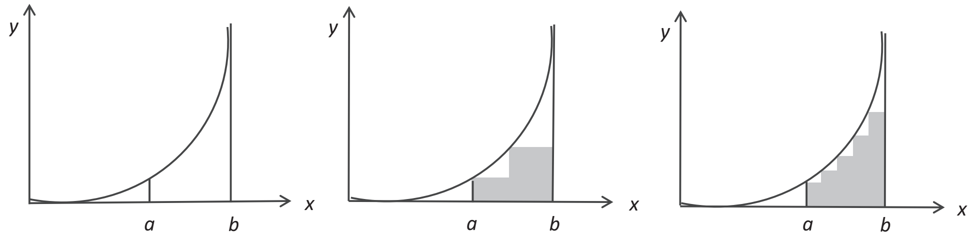


**Abb. 9:** Das Prinzip der Integralrechnung.

Apfels für jeden Zeitpunkt exakt berechnen und so dem Gesetz der Gravitation auf die Spur kommen.

Die Möglichkeit, Naturgesetze mathematisch exakt darstellen zu können, eröffnete neue Perspektiven: Auch künftige Ereignisse ließen sich nun verlässlich prognostizieren. Der mathematische Fortschritt befeuerte ein Euphorie, die Hoffnung, die Welt mithilfe der Mathematik vollständig beschreiben zu können. Der Franzose Pierre-Simon Laplace spann diesen Gedanken weiter. 1814 ersann er einen fiktiven, allwissenden Weltgeist, der sämtliche Kausalitäten des Universums in Form von Funktionsgleichungen erfassen und simultan verarbeiten kann. Rein theoretisch ließ sich damit die Bewegung aller Materie und damit die Zukunft der Welt bis an ihr Ende vorausberechnen. Der Laplacesche Dämon – wir würden ihn heute als „Supercomputer“ bezeichnen – wurde zum Leitmotiv eines deterministischen Weltbilds, das neben den Naturphilosophen bald auch das Denken von Militärs, Sozialutopisten und Ökonomen bestimmen würde: Warum sollte nicht auch menschliches Handeln mathematisch beschreibbar und somit prinzipiell berechenbar sein? Einmal mehr verhieß Mathematikbeherrschung Macht. Doch es gab da noch ein kleines Problem: Bislang hatte man die Rechnung ohne den Zufall gemacht.

## Der verlässliche Zufall

Bis in die Antike hinein war alles, was geschah der Wille von Dämonen, Geistern oder Göttern – einen Zufall gab es nicht. Die Zukunft war vorherbestimmt; Seher, wie die römischen Auguren und Haruspices, konnten künftige Ereignisse aus dem Flug der Vögel oder aus der Leber von Opfertieren lesen. Erneut waren es die Griechen, die sich als Erste etwas differenzierter mit dem Phänomen Zufall auseinandersetzten. Bereits lange vor Laplace war Demokrit davon überzeugt, dass das, was wir als Zufall wahrnehmen, lediglich menschliches Unvermögen sei, die wahre Ordnung der Welt erkennen zu können. Aristoteles unterschied drei Arten von Ereignissen: sichere, wahrscheinliche und unerkennbare. Am Ende der Antike sorgte jedoch vor allem die Prädestinationslehre des Kirchenvaters Augustinus dafür, dass es für solche Gedanken fortan kaum noch Raum gab: Der allwissende Gott kennt den Lauf der Dinge von Anfang an; da er schon weiß, wie sich jeder einzelne Mensch auf seinem Lebensweg zwischen Gut und Böse entscheiden wird, ist auch das Seelenheil bei der Geburt bereits unweigerlich vorbestimmt. Da der frühneuzeitliche Protestantismus diesen Gedanken übernahm, war der Zufall für die nächsten 12 Jahrhunderte in der westlichen Welt wieder aus dem Spiel.

Das änderte sich erst, als um das Jahr 1650 einige wohlhabende Herren in einem Pariser Wirtshaus zum Karten- und Würfelspiel zusammenkamen. Der Einsatz sollte an denjenigen gehen, der die meisten einer vorher festgelegten Anzahl von Runden für sich entschied. Es wurde spät, der Wein machte die Köpfe schwer und so beschloss die Gesellschaft den Abend zu beenden noch bevor die vereinbarte Zahl Partien gespielt war. Gab es eine faire Methode, den Einsatz des abgebrochenen Spiels unter den Spielern aufzuteilen? Die Herren wandten sich mit dieser Frage an Blaise Pascal (1623–1662), den führenden Universalgelehrten Frankreichs. Der anschließende Briefwechsel, den Pascal mit Pierre de

Fermat über die Gewinnteilungsproblematik führte, gilt heute als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Dem neuen Sujet widmeten sich zunächst vor allem Franzosen. Neben Pascal und Fermat zählen Abraham de Moivre, Marie Jean Condorcet, Siméon Denis Poisson, Pierre-Simon Laplace sowie Jakob und Daniel Bernoulli – letztere Sprösslinge einer Basler Gelehrtenfamilie – zu den Pionieren der Zufallsmathematik. Die von ihnen eingeleitete „probabilistische Revolution" hat unseren Blick auf die Welt grundlegend verändert. Der verwegene Anspruch der Zufallsforscher war es, in den gottgewollten Ereignissen und Schicksalen Gesetzmäßigkeiten zu suchen – ein Anliegen, das manchen Zeitgenossen noch immer der Blasphemie gleichkam. Doch mit der Zeit setzte sich die Erkenntnis durch, dass, wie Goethe es später formulierte, „das Gewebe dieser Welt [.] aus Notwendigkeit und Zufall gebildet" ist.[21] Heute wissen wir, dass der Zufall eine Grundkonstante der Natur ist. Er begegnet uns, wie wir noch sehen werden, unter anderem in der Thermodynamik, der Quantenphysik, der Evolutionstheorie und der Genetik.

Die Erforscher des Zufalls standen vor dem gleichen Problem wie Newton und Leibniz: In der mathematischen Werkzeugkiste fand sich kein passendes Instrument. Erste grundlegende Einsichten ließen sich aus der Analyse gängiger Glücksspiele wie Karten, Würfeln, Münzwurf oder Lotterie gewinnen. Die daraus entstandene mathematische Grundlagendisziplin bezeichnen wir heute als Kombinatorik. Der Kombinatorik liegen eine Anzahl von einfachen Spielregeln zugrunde: Für „Permutationen", die Anordnung von Objekten in verschiedenen Reihenfolgen, ergibt sich die Anzahl der Möglichkeiten aus der Fakultät: Um etwa vier verschiedenfarbige Kugeln unterschiedlich aufzureihen, gibt es $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten. Bei der „Kombination" wird eine Teilmenge entnommen, beispielsweise zwei der vier Kugeln. Sofern die entnommenen Kugeln nicht wieder zurückgelegt werden dürfen, gibt es sechs mögliche Ergebnisse; mit Zurücklegen erhöht sich die Anzahl auf zehn, denn jede der vier Farben kann nun ein weiteres Mal gezogen werden. Bei der „Variation" wird zusätzlich auch noch die Reihenfolge der gezogenen Objekte berücksichtigt. In diesem Fall gibt es für „zwei-aus-vier" zwölf Möglichkeiten ohne Zurücklegen und sechzehn mit Zurücklegen. Mit diesen Grundlagen gewappnet, konnten die Zufallsforscher nun erstmals Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt bestimmter Ereignisse berechnen.

Ein einfacher Zufallsgenerator ist der Würfel. Da bei ihm die Eintrittswahrscheinlichkeit von einem einzelnen Wurf unabhängig ist, beträgt die Chance für eine bestimmte Augenzahl im Ereignisraum des Würfels ein Sechstel. Die Wahrscheinlichkeit, eine Augenzahl kleiner vier zu erhalten, liegt bei 50% (drei Sechstel). Und in jedem 36. Fall (ein Sechstel mal ein Sechstel) haben wir die Aussicht, zweimal hintereinander dieselbe Zahl zu werfen.

Bei einer Lotterie, bei der 6 aus 49 Kugeln gezogen werden – hier handelt es sich um das Szenario „Kombination ohne Zurücklegen" – ist es bereits wesentlich komplizierter. Die Wahrscheinlichkeiten verändern sich mit jeder neuen Ziehung, da die gezogenen Kugeln aus dem Ereignisraum ausscheiden. Die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten beträgt daher $\frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$. Die Wahrscheinlichkeit für „sechs Richtige" liegt also bei knapp 1 zu 14 Millionen. Rein statistisch müsste man etwa 270.000 Jahre lang jede Woche spielen, um einmal zu gewinnen. Wohl gemerkt: rein statistisch. Denn eine

Gewinngarantie gibt es selbst dann nicht. Wahrscheinlichkeiten lassen sich zwar exakt berechnen, das heißt aber nicht, dass sie auch eintreten müssen.

Kehren wir noch einmal zu dem simplen Würfelspiel zurück. Die Gesetze der Stochastik – so die offizielle Bezeichnung der Zufallsmathematik – lassen sich auch recht einfach experimentell überprüfen. Bei 600 Würfen wird die absolute Häufigkeit jedes einzelnen Augenwerts wahrscheinlich in der Nähe von 100 liegen. Bei 1200 Würfen werden sie sich voraussichtlich der zu erwartenden Verteilung weiter angenähert haben. Jeder folgende Wurf erhöht die Wahrscheinlichkeit einer weiteren Angleichung. Damit war ein fundamentales Muster gefunden: das Gesetz der großen Zahlen. Als Erster formulierte es Jakob Bernoulli: Die Genauigkeit empirischer Untersuchungen wächst mit der Anzahl der Versuche oder allgemeiner formuliert: Das Wahrscheinlichere verdrängt mit der Zeit das Unwahrscheinlichere.

Das Gesetz der großen Zahlen unterliegt allerdings einer beschränkten Haftung. Grundsätzlich ist es nicht auszuschließen, dass eine andere als die erwartete Gleichverteilung der Würfelaugen entsteht. Nichts ist garantiert, nichts *muss* nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschehen, denn die Gesetze beeinflussen keinesfalls den Zufall selbst. Trotzdem ziehen viele Menschen an dieser Stelle intuitiv einen falschen Schluss. Wenn bei 600 Würfen die Augenzahl „Zwei" erst 50-mal statt den erwarteten 100-mal eingetreten ist, heißt das nicht, dass die „Zwei" künftig häufiger auftreten muss. Viele Roulettespieler erwarten, dass nachdem die Kugel 10-mal hintereinander auf „Rot" gefallen ist, nun endlich „Schwarz" an der Reihe ist. Aber dem ist nicht so. Würfel und Kugeln haben kein Gedächtnis; der Roulettekugel ist es völlig gleich, ob sie zuletzt auf Rot oder Schwarz lag, das nächste Ereignis hängt nicht davon ab, was zuvor geschah. Ebenso wenig sagen Wahrscheinlichkeiten etwas über Einzelschicksale. Die Chance, Opfer einer Haifischattacke zu werden, lässt sich zwar berechnen, aber niemand ist zu 0,000715% Opfer des Raubfischs, sondern immer nur zu 100% oder 0%.

Das Gesetz der großen Zahlen, so trivial es uns heute auch erscheinen mag, gehört zu den großen Entdeckungen der Menschheit. Die frühen Stochastiker hatten erkannt, dass sich mit dem blinden Zufall rechnen lässt, wenn sich das zugrundeliegende Ereignis nur oft genug wiederholt. Die einzelnen Launen der Natur bleiben unvorhersehbar, in der Summe aber folgen sie Regeln, die sich mathematisch beschreiben lassen.

Die praktische Bedeutung dieser Erkenntnis ist kaum zu überschätzen: Da die Häufung vieler Ereignisse eine hinreichende Sicherheit erzeugte, konnten Risikogemeinschaften wie Versicherungen nun erstmals auf eine statistische Grundlage gestellt werden. Man begann eifrig Daten über das Wetter, über Schiffskatastrophen und Ernteerträge zusammenzutragen. Von besonderem Interesse waren Leben und Tod. Die Autoritäten hierfür waren Pfarrer, die die Kirchenbücher führten und damit die grundlegenden statistischen Daten selbst erzeugten. Der Breslauer Pastor Caspar Neumann erstellte um 1690 als Erster für seine Heimatstadt eine Geburts- und Sterbestatistik. Johann Peter Süßmilch, ein Berliner Pfarrer, baute Neumanns Werk systematisch aus und erkannte als erster, dass 100 weiblichen Geburten durchschnittlich 105 männliche gegenüberstanden. Zwei schottische Amtskollegen, Robert Wallace und Alexander Webster, rechneten Mitte des 18. Jahrhunderts das Sterberisiko für ihre eigene Berufsgruppe aus und analysierten, wie viele Witwen und Waisen demnach zu versorgen waren. So konnten die Prämien für einen Anlagefonds bestimmt werden, mit dem sich die hinterbliebenen Pfarrerswitwen absichern ließen.[22] Nach und nach entstanden weitere Solidargemeinschaften, mit denen sich Reeder gegen Schiffsunglücke und Hausbesitzer gegen Feuer schützten. Die Versicherten waren nun vor den finanziellen Folgen großer Schicksalsschläge gefeit und konnten fortan freier agieren. Als Deutschland 1889 als erstes Land der Welt eine gesetzliche Rentenversicherung einführte, war die Stochastik auch in der Politik angekommen.

Um das Jahr 1800 waren die Mathematiker der nächsten wichtigen Erkenntnis auf der Spur. Es begann damit, dass Laplace sich die Frage stellte, welcher Wert eigentlich im Durchschnitt bei einem Zufallsereignis zu erwarten sei. Dieser „Erwartungswert" beträgt beim Würfeln beispielsweise 3,5 und ist das arithmetische Mittel, das bei unendlicher Wiederholung des Experiments entsteht: Zählt man die Augen von 10.000 Würfen zusammen und teilt sie durch 10.000, wird der Wert mit großer Wahrscheinlichkeit in der Nähe von 3,5 liegen. Im langfristigen Durchschnitt würfelt man also „dreieinhalb", obwohl der Würfel selbst diese Augenzahl gar nicht kennt.

Wirft man nun beispielsweise gleichzeitig drei Würfel, können nach den Gesetzen der Kombinatorik 16 verschiedene Mittelwerte entstehen. Erzielt man drei Sechser, ist der Mittelwert sechs; bei drei Einsern beträgt er eins. Dazwischen gibt es 14 weitere mögliche Mittelwerte: $5{,}\bar{6} - 5{,}\bar{3} - 5 - 4{,}\bar{6} - 4{,}\bar{3} - 4 - 3{,}\bar{6} - 3{,}\bar{3} - 3 - 2{,}\bar{6} - 2{,}\bar{3} - 2 - 1{,}\bar{6} - 1{,}\bar{3}$. Betrachtet man nun die absolute Häufigkeitsverteilung, zeigt sich, dass bestimmte Mittelwerte öfter erzielt werden als andere: Mit zunehmender Anzahl Würfe steigt die Wahrscheinlichkeit, dass die Mittelwerte umso häufiger vorkommen, je näher sie am Erwartungswert von 3,5 liegen. Mit der größten Wahrscheinlichkeit werden also die Durchschnittswerte $3{,}\bar{6}$ und $3{,}\bar{3}$ erzielt (Abb. 10).

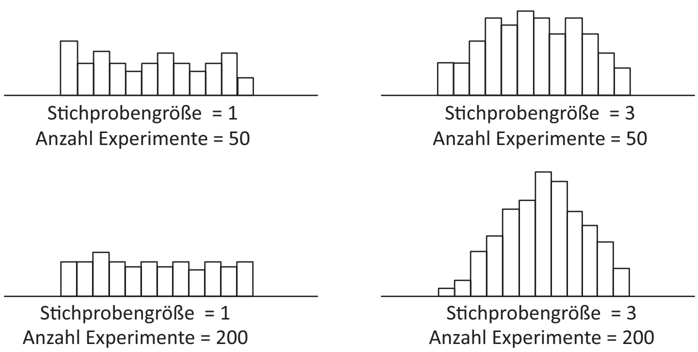


**Abb. 10:** Entwicklung der Verteilmuster bei steigender Stichprobengröße und steigender Anzahl Experimente.

Je mehr Würfel gleichzeitig geworfen werden und je größer die Anzahl der Versuche, umso mehr nähert sich die Verteilung der Mittelwerte einer symmetrischen, glockenförmigen Figur (Abb. 11):

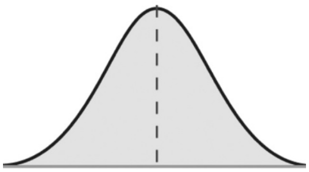

**Abb. 11:** Die Normalverteilungskurve.

Dieses Gebilde kannten die Stochastiker bereits. Der nach England geflohene französische Hugenotte Abraham de Moivre hatte es schon um 1730 beschrieben. Heute bezeichnen wir dieses Muster als Normalverteilungs-, Glocken- oder auch Gaußkurve. (Gauß fand als Erster die exakte Funktion, die diese Verteilform beschreibt.) Das der Normalverteilungskurve zugrunde liegende Gesetz ist der Zentrale Grenzwertsatz, den Laplace erstmalig bewies. Er besagt, dass die Stichprobenmittelwerte gegen eine Normalverteilung streben, wenn Umfang und Anzahl der Stichproben gegen unendlich gehen.

Die Normalverteilung ist die wohl wichtigste Verteilform der Natur. Körpergröße, Intelligenzquotient, Blutdruck, Niederschlagsmengen, aber auch Messfehler, Glücksgefühle und die Rentabilitäten von Investitionsentscheidungen sind normalverteilt. Die symmetrische Form bedeutet, dass positive Abweichungen vom Erwartungswert exakt gleich häufig auftreten wie negative. Die Kurve ist auch Ausdruck dessen, was wir üblicherweise als „normal" empfinden: Das, was auf vieles zutrifft, übersehen wir gewöhnlich; unsere Aufmerksamkeit erregt nur, was davon abweicht.

Wie kommt es zu der verblüffenden Vorherrschaft der Normalverteilung in der Natur? Warum gibt es nicht mehr große Menschen als kleine? Das Geheimnis der Glockenform erschließt sich uns, anhand des Galtonbretts, eine Erfindung des Statistik-Pioniers (und Cousins von Charles Darwin) Francis Galton. Dabei handelt es sich um eine Konstruktion, bei der von oben Bälle auf runde Hölzchen fallen, die symmetrisch in Form eines Dreiecks angeordnet sind (Abb. 12).

Die Bälle springen, wenn sie auf die Rundhölzer treffen, mal nach links, mal nach rechts, um dann unten in Silos zu fallen. Mit der Zeit bildet sich in den Silos das

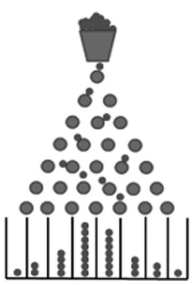

**Abb. 12:** Das Galtonbrett.

Normalverteilungsmuster. So wie Lottokugeln oder ein einzelner Würfel Zufallsmaschinen für Gleichverteilungen sind, ist das Galtonbrett eine Zufallsmaschine für die Normalverteilung. Der Zufall entscheidet in jeder Reihe des Dreiecks mit einer Wahrscheinlichkeit von 50:50 darüber, ob der Ball nach links oder rechts springt. Normalverteilungen entstehen also immer dann, wenn viele kleine, voneinander unabhängige Zufälle ein Ergebnis bestimmen – eine Bedingung, die ganz offenbar in der Natur häufig vorliegt.

Mittelwerte beschreiben Normalverteilungen jedoch noch nicht vollständig. Wenn erwachsene Menschen im Mittel 1,70 m groß sind, ist es ein Unterschied, ob die eine Hälfte der Bevölkerung 1,69 m misst und die andere 1,71 m oder 1,50 m und 1,90 m. Die Größe, die angibt, wie weit ein einzelner Messwert im Durchschnitt vom Durchschnitt abweicht, ist die Standardabweichung.[23]

Wenn wir die durchschnittliche Körpergröße der Menschen in einer Großstadt in Erfahrung bringen möchten, werden wir meist nicht alle Einwohner einzeln vermessen, sondern uns aus praktischen Gründen auf eine zufällige Stichprobe von vielleicht 100 oder 500 Personen beschränken. Das bedeutet aber auch, dass wir den wahren Wert bestenfalls abschätzen können, denn in unserer Stichprobe könnten sich zufällig besonders viele große oder besonders viele kleine Menschen finden. Inwieweit darf man Stichproben also überhaupt vertrauen? Um diese Frage zu beantworten, entwickelte der polnische Mathematiker Jerzy Neyman in den 1930er Jahren ein Verfahren, bei dem er tief in die mathematische Werkzeugkiste griff. Er bediente sich bei so ziemlich allem, was die Mathematik zu bieten hat: Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik.

Neymans Ansatz, Wahrheit und Wahrscheinlichkeit zu verbinden, beruht auf der Berechnung von Konfidenzintervallen. Seine Methode begegnet uns immer dann, wenn beispielsweise von 95%igen Wahrscheinlichkeiten die Rede ist. Nehmen wir an, dass wir für 100 zufällig ausgewählten Personen eine mittlere Körpergröße von 1,68 m ermitteln, während der tatsächliche Durchschnitt in unserer Stadt 1,70 m beträgt. Nehmen wir weiterhin an, dass die Standardabweichung vom Stichprobenmittel 3 cm beträgt. Das heißt, dass die einzelnen Stichprobenwerte im Durchschnitt 3 cm vom den 1,68 m abweichen. Damit ist es nun möglich eine Aussage darüber zu treffen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der (uns unbekannte) wahre Wert von 1,70 m innerhalb einer bestimmten Bandbreite liegt. Das erste Band ist üblicherweise durch die Grenzen der einfachen Standardabweichung „σ" von +/– 3 cm vom Stichproben-Mittelwert definiert, also der Bereich von 1,65 m bis 1,71 m. Mit Hilfe der Integralrechnung lässt sich ermitteln, dass die durch diese Grenzen definierte Fläche, ungefähr 68% der Gesamtfläche unter der Normalverteilungskurve beträgt. Der Mittelwert +/– zweifache Standardabweichung deckt bereits gut 95% der Fläche ab. Dieser Zusammenhang gilt immer, ganz gleich, wie breit die Gaußkurve ist oder wie steil sie verläuft. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% liegt also der tatsächliche Mittelwert in dem Bereich von 1,65 m bis 1,71 m und mit 95%iger Wahrscheinlichkeit zwischen 1,62 m und 1,74 m (Abb. 13).

Das Vertrauen in die Konfidenzintervalle ist heute Grundlage sehr weitreichender Entscheidungen, wie etwa die Zulassung neuer Medikamente oder die Bewertung von Indizien in Strafprozessen. Hier trifft Mathematik auf die ethische Frage, wieviel Rest-Zufall

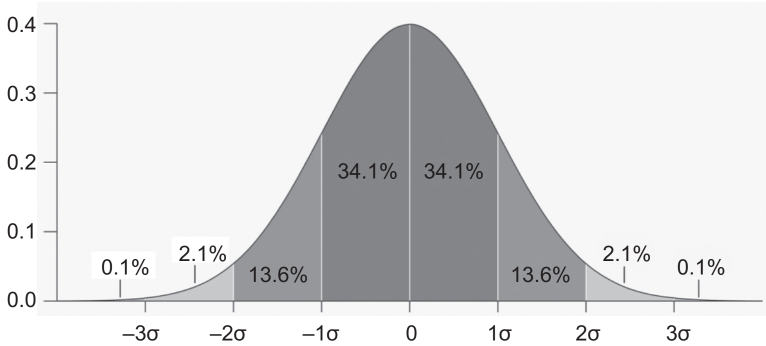


**Abb. 13:** Prozentuale Anteile der Integrale für ein-, zwei- und dreifache Standardabweichung.

man sich leisten will oder darf: Denn von 20 klinischen Studien, die einem Wirkstoff mit „95%iger Wahrscheinlichkeit den gewünschten Effekt zuschreiben, liegt eine falsch.

Hier kommt ein weiterer Aspekt ins Spiel. Subjektiv empfinden wir 95% als sehr sicher, während die Aussage 1:20 für uns eher beunruhigend klingt. Beide Perspektiven sind jedoch mathematisch äquivalent. Ähnlich bei der Frage, ob wir uns lieber von einem Chirurgen operieren lassen möchten, dessen Überlebensrate 90% beträgt, oder von seinem Kollegen, der eine Sterberate von 10% aufweist. Die meisten Menschen ziehen den ersten Arzt vor, obwohl auch dies mathematisch nicht begründet werden kann. Unsere Fähigkeit, statistische Risiken einzuschätzen, hat offenbar auch etwas damit zu tun, wie die Information präsentiert wird.

Der mit dem Nobelpreis ausgezeichnete israelisch-amerikanische Psychologe Daniel Kahneman hat solche Phänomene untersucht und anhand zahlreicher Beispiele aufgezeigt, dass es um unser statistisches Denken nicht besonders gut bestellt ist. Wir neigen allgemein dazu, aus Zahlen falsche Schlüsse zu ziehen.[24] So, wie uns das Gespür für die Bedeutung von Exponentialfunktionen fehlt, liegen wir auch meist bei der Einschätzung von Risiken daneben. Es widerspricht unserer Eingebung, dass die Zahlen eins bis sechs jemals im Lotto gezogen werden könnten, dabei ist die Wahrscheinlichkeit hierfür genauso groß, wie für jede beliebige andere Zahlenkombination.[25]

Charles Darwins Cousin Francis Galton war eine vielseitige und unorthodoxe Persönlichkeit. Neben geographischen Forschungsreisen nach Afrika beschäftigte er sich unter anderem mit Meteorologie, Psychologie sowie Intelligenzforschung; zudem gilt er als einer der Begründer der Eugenik. Als Statistiker und Mathematiker ist Galton insbesondere für seine Pionierarbeit bei der Untersuchung mehrdimensionaler Zusammenhänge bekannt. Seine Konzepte von Korrelation und Regression sind im heutigen Wissenschaftsbetrieb allgegenwärtig. Korrelationen untersuchen, ob zwischen zwei oder mehr Größen ein Zusammenhang besteht und wie sich dieser mithilfe eines Koeffizienten messen lässt. Die Regressionsanalyse ist der Versuch, diesen Zusammenhang so gut wie möglich in Form einer mathematischen Funktion zu beschreiben – etwa mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate, die von dem Franzosen Adrien-Marie Legendre und Gauß unabhängig voneinander in den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts entwickelt wurde. Die Methode erlaubt es, einen Funktionsgraphen zu konstruieren, der den Abstand zu allen beobachteten Messwerten minimiert. Der etwas irreführende Begriff Regressionsanalyse geht unmittelbar auf Galton zurück. Bei einem Experiment hatte er festgestellt, dass die Nachfahren großer Erbsen eher zu einer durchschnittlichen Größe tendieren. Obwohl diese „Regression zur Mitte" eigentlich nur den Zusammenhang zwischen der Größe zweier Hülsenfrucht-Generationen beschrieb, wurde das biologische Phänomen namensgebend für die bei seiner Entdeckung angewandte statistische Methode.

Die Anzahl möglicher Zusammenhänge, die sich so untersuchen lassen, ist schier unendlich. Regressionsanalysen haben beispielsweise gezeigt, dass das Verhältnis von Länge zu Breite steinzeitlicher Faustkeile aus Kenia stark mit den Proportionen des goldenen Schnitts korreliert.[26] Doch was will uns das sagen? Ein Zusammenhang allein ist noch keine Erkenntnis und Korrelation ist nicht automatisch Kausalität. Die Definition des goldenen Schnitts war den Menschen der Altsteinzeit sicherlich nicht bekannt. Ahnten sie unbewusst eine Ästhetik nach, die sie in der Natur beobachtet hatten? Gibt es eine Verbindung zu einem natürlichen Wachstumsprozess? Hat es etwas mit der Anatomie der menschlichen Hand zu tun? Oder ist das alles einfach nur ein Zufall? Jede dieser Erklärungen ist denkbar (Abb. 14).

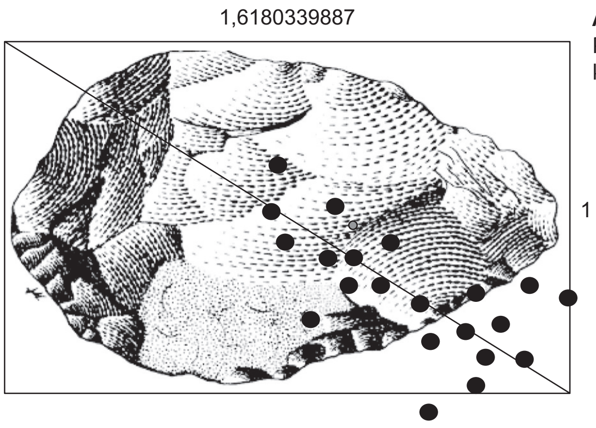


**Abb. 14:** Regressionsgerade für die Proportionen steinzeitlicher Faustkeile.

Seit der Jahrtausendwende ist auch die Informationstechnologie solch verschleierten Zusammenhängen auf der Spur. Sie erlaubt es mittlerweile unvorstellbar große unstrukturierte Datenmengen in kurzer Zeit zu durchleuchten, zunehmend spielen dabei auch die selbstlernenden Algorithmen der künstlichen Intelligenz eine Rolle. Das Gold, das in diesen Datenminen geschürft wird, sind verborgene Zusammenhänge, die Vertriebsstrategen, Verwaltungen, Versicherungen, Genetikern und Geheimdiensten wertvolle Einsichten offenbaren. Polizisten können heute mit 95%iger Wahrscheinlichkeit voraussagen, in welchem Stadtviertel der nächste Einbruch verübt wird und Kreditkartenunternehmen prognostizieren anhand von Kontobewegungen ihrer Kunden mit derselben Zuverlässigkeit, ob sich ein Ehepaar in den nächsten drei Jahren scheiden lässt.[27] Ganz offenbar wissen die Daten mehr über uns als wir selbst. Die Zukunft, die früher in den Sternen lag, lässt sich heute in den Informationsspuren lesen, die wir tagtäglich im World Wide Web selbst erzeugen.

## Das Ende eines Traums?

„Die Mathematik allein befriedigt den Geist durch ihre Gewissheit.“ Die Überzeugung, die in dem Zitat von Johannes Kepler zum Ausdruck kommt, prägte das Selbstverständnis der Mathematiker seit der Antike. Keine andere Wissenschaft versprach Erkenntnisse von vergleichbarer Sicherheit. Als im 19. Jahrhundert die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie diesen Glauben auf einmal ins Wanken brachte, gelang es rasch, für die neue Raumlehre eine eigene Axiomatik aufzustellen und den festen Boden zurückzugewinnen. Davon inspiriert unternahm der deutsche Mathematiker David Hilbert (1862–1943) in den 1920er Jahren den Versuch die gesamte Mathematik auf die Basis vollständiger und widerspruchsfreier Axiome zu stellen und so Keplers „außerordentliche Gewissheit“ lückenlos logisch abzusichern. Hilberts Vision implizierte auch, dass es mit diesem Fundament grundsätzlich immer möglich sein musste, die Richtigkeit jedes mathematischen Theorems zu beweisen – wenn auch die Beweisführung im Einzelfall sehr schwierig sein kann.

Die Ernüchterung kam 1931. In diesem Jahr gelang dem österreichischen Mathematiker Kurt Gödel (1906–1978) der Nachweis, dass es mathematische Aussagen gibt, die zwar wahr sind, die aber dennoch nicht bewiesen werden können.[28] Gödel zeigte, dass die Widerspruchsfreiheit eines axiomatisierten formalen Systems nicht innerhalb des Systems selbst beweisbar ist. Sowenig, wie ein Gehirn sich selbst vollständig erforschen und eine Sprache sich selbst vollständig erklären kann, kann auch die Mathematik allein nicht die Widerspruchsfreiheit der Mathematik beweisen.[29] Dies hat nichts mit dem Unvermögen der Akteure zu tun, es ist vielmehr *grundsätzlich* nicht möglich: Um ein System vollständig zu beschreiben, muss man es von außen betrachten können. Gödels „Unvollständigkeitssatz“ stürzte die Mathematik in eine Identitätskrise, vergleichbar jener Verwirrung, die die Pythagoreer bei der Entdeckung irrationaler Zahlen überkam. Seitdem müssen Mathematiker mit der Erkenntnis leben, dass ihre Denksprache – die vermeintlich reinste aller Wissenschaften – nicht gleichzeitig vollständig und widerspruchsfrei sein kann.

Dass die Mathematik letztlich auf tönernen Füssen steht, liegt auch in der Natur der Axiome. Sie sind unbewiesene mathematische Sätze, von denen wir nur annehmen können, dass sie wahr sind. Als intuitiv erkennbare, triviale Tatsachen, haben sie den Anspruch, so einleuchtend zu sein, dass sie keines Beweises bedürfen. Davon ausgehend, werden schrittweise höhere Wahrheiten konstruiert. Doch am Anfang des gesamten Systems steht Glaube, nicht Wissen.

Dass Gödel die Unmöglichkeit einer widerspruchsfreien Grundlage bewiesen hat, müssen wir übrigens nicht bedauern, wir können es, im Gegenteil, als Befreiung verstehen: Wir dürfen in einer Welt von Widersprüchen leben; die Zwangsjacke einer allumfassenden, gnadenlosen Logik bleibt uns erspart.

Die abstrakte Sprache Mathematik erlaubt es uns sehr unterschiedliche Aspekte der Welt exakt zu beschreiben – anders als die menschliche Sprache, bieten ihre Gleichungen keinen Raum für Interpretationen. Am besten kann sie diesen Vorteil bei jener Wissenschaft ausspielen, die sich der Naturbeschreibung gewidmet hat. Das griechische Wort für Natur lautet physikḗ.