

## 7 Zusammengesetzte Systeme

Wir gehen zu zusammengesetzten Systemen über und stellen zunächst wieder den mathematischen Rahmen zur Verfügung. Dann werden die Postulate verallgemeinert und der Spezialfall der Messungen an Teilsystemen ausführlich diskutiert. Die Konsequenzen von Verschränkung werden verdeutlicht. Die unitäre Dynamik kann wieder mit Hilfe von Liouville-Operatoren formuliert werden. Die Wirkung einfacher Quantengatter auf mehreren Qubit-Systemen wird vorgestellt.

### 7.1 Teilsysteme

Wir sind von der klassischen Physik her gewohnt, dass *zusammengesetzte Systeme* (composite systems, compound systems) in *Teilsysteme* oder Untersysteme (subsystems) zerlegt werden können und dass umgekehrt Systeme zu Gesamtsystemen zusammengesetzt werden können. Das klassische Gesamtsystem ist dabei vollständig durch die Zustände der Teilsysteme und ihre dynamischen Wechselwirkungen untereinander beschreibbar. Das Sonnensystem mit Sonne, Planeten und Gravitationsfeld ist ein Beispiel. In der Quantenphysik zeigt sich, dass zusammengesetzte Systeme darüber hinaus völlig andere und überraschende ganzheitliche Eigenschaften aufweisen können. Sie treten auf, wenn sich zusammengesetzte Quantensysteme in *verschränkten Zuständen* (entangled states) befinden. In diesen Fällen ist tatsächlich „das Ganze mehr als die Summe seiner Teile“. Wir werden zur Darstellung der Einzelheiten ähnlich wie in Abschn. 1.2 vorgehen und die Diskussion von Präparation und Messung an den Anfang stellen.

Was sind zusammengesetzte Systeme? Es gibt spezielle Quantensysteme, die eine innere Struktur aufweisen. Man kann bei ihnen zwei oder mehrere Teilsysteme unterscheiden, auf die man getrennt Zugriff hat. Damit ist gemeint, dass sich experimentell Teilsysteme finden lassen, an denen man jeweils einzeln (und in diesem Sinne lokal) Eingriffe durchführen kann. Diese Operationen werden *lokale Operationen* (local operations) genannt. Es können z. B. Messungen sein.

Wir geben einige *2-Teile-Systeme* (bi-partite-systems) an. Es können z. B. Quantensysteme präpariert werden, bei denen man an zwei verschiedenen Orten bei Messungen jeweils ein Photon registriert. Analoge Systeme gibt es für Elektronen. Es gibt Systeme, bei denen an einem Ort ein Photon und an einem anderen Ort ein Atom registriert wird. Teilsysteme werden allgemein als *lokal* bezeichnet, müssen aber tatsächlich nicht räumlich getrennt sein. Es kann

sich beim zusammengesetzten System z. B. auch um die Bahn (äußerer Freiheitsgrad) und die Polarisierung (innerer Freiheitsgrad) vom einzelnen Quantenobjekt handeln. Selbstverständlich kann man auch zwei getrennte Systeme, die völlig unabhängig voneinander sind, formal als ein Gesamtsystem auffassen.

Wesentlich ist, dass man z. B. bei einem 2-Photonen-System nicht davon ausgeht, dass die beteiligten Photonen unterscheidbar sind (was sie bekanntlich nicht sind). Unterscheidbar sind z. B. die Orte, an denen bei einer Messung eine Photonenpolarisation gemessen wird. Von Messungen wissen wir auch, dass immer zwei und nicht mehr Photonen zusammen präpariert werden und daher das Gesamtsystem ein 2-Teile-System ist. Die entsprechenden Teilsysteme  $S^A$  und  $S^B$  sind in diesem Fall den Orten  $A$  und  $B$  zugeordnet (Photon am Ort  $A$  bzw. am Ort  $B$ ). Allgemein sind Geräte klassische Objekte und haben daher Individualität. Demgegenüber macht es wegen der Ununterscheidbarkeit der Photonen keinen Sinn zu fragen, welchem der beiden Photonen bei einer Messung z. B. am Ort  $A$  gemessen wurde.

**Alice und Bob** Um besonders deutlich zu machen, dass an verschiedenen Teilsystemen  $S^A$  und  $S^B$  des zusammengesetzten Systems  $S^{AB}$  gemessen oder manipuliert wird, werden häufig die Experimentatoren *Alice* und *Bob* eingeführt, die am Teilsystem  $S^A$  bzw.  $S^B$  (oft aber nicht notwendig an verschiedenen Orten) lokale Operationen ausführen. Mit dem Bezug auf Alice und Bob unterstreicht man auch nochmal, dass sehr viele quantentheoretische Aussagen *operational* (operational) oder *operativ* (d. h. als Handlungsanweisungen) zu verstehen sind z. B. von der Art: Wenn Alice am Teilsystem  $S^A$  dieses ausführt, wird Bob am Teilsystem  $S^B$  jenes messen.

**Existenz** Wir werden gemäß der Standardinterpretation aus Abschn. 1.2 wiederum annehmen, dass solche Teilsysteme keine gedanklichen Hilfskonstruktionen sind wie die Quantensysteme in der Minimalinterpretation, sondern tatsächlich existieren. Damit ist allerdings nicht gemeint, dass dem einzelnen Teilsystem ein vom Zustand der anderen Teilsysteme unabhängiger Zustand zugeschrieben werden kann. Bei verschränkten Gesamtsystemen liegt diese Unabhängigkeit gerade nicht vor. Dies ist die Ursache für viele verblüffende quantenphysikalische Effekte. Es ist darüber hinaus mit der Existenzaussage auch nicht unterstellt, dass gleichartige Elementarteilchen derselben Sorte, wie z. B. zwei Photonen, Individualität besitzen und daher unterscheidbar sind. So weit geht die Annahme, dass die Photonen existieren, nicht. Die einzelne Zugriffsmöglichkeit und nicht die Individualität von Quantenobjekten definiert das Teilsystem.

## 7.2 Produktraum

Wir wollen zunächst den mathematischen Formalismus bereitstellen, mit dessen Hilfe die Physik der zusammengesetzten Systeme formuliert werden kann. Wir benötigen hierzu den *Produkt-Hilbert-Raum*.

### 7.2.1 Vektoren

Das *Tensorprodukt*  $\mathcal{H}^{AB}$  aus zwei Hilbert-Räumen  $\mathcal{H}^A$  und  $\mathcal{H}^B$ , deren Dimensionen nicht übereinstimmen müssen

$$\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \quad (7.1)$$

ist wieder ein Hilbert-Raum. Wir nennen  $\mathcal{H}^A$  und  $\mathcal{H}^B$  die *Faktorräume*. Zu jedem Paar von Vektoren  $|\varphi^A\rangle \in \mathcal{H}^A$  und  $|\chi^B\rangle \in \mathcal{H}^B$  gehört ein *Produktvektor* (product vector) aus  $\mathcal{H}^{AB}$ , der unterschiedlich geschrieben werden kann

$$|\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle =: |\varphi^A\rangle|\chi^B\rangle =: |\varphi^A, \chi^B\rangle =: |\varphi, \chi\rangle. \quad (7.2)$$

Er ist bezüglich der Multiplikation mit komplexen Zahlen in jedem Argument linear. Mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$|\varphi^A\rangle \otimes (\lambda|\chi_1^B\rangle + \mu|\chi_2^B\rangle) = \lambda|\varphi^A\rangle \otimes |\chi_1^B\rangle + \mu|\varphi^A\rangle \otimes |\chi_2^B\rangle, \quad (7.3)$$

$$(\lambda|\varphi_1^A\rangle + \mu|\varphi_2^A\rangle) \otimes |\chi^B\rangle = \lambda|\varphi_1^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle + \mu|\varphi_2^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle. \quad (7.4)$$

**Verschränkte Vektoren** Wenn  $\{|n^A\rangle\}$  eine Basis von  $\mathcal{H}^A$  und  $\{|i^B\rangle\}$  eine Basis von  $\mathcal{H}^B$  ist, dann ist

$$\{|n^A\rangle \otimes |i^B\rangle\} \quad (7.5)$$

eine von  $\mathcal{H}^{AB}$ . Für die Dimension von  $\mathcal{H}^{AB}$  gilt  $\dim\mathcal{H}^{AB} = (\dim\mathcal{H}^A) \cdot (\dim\mathcal{H}^B)$ . Jeder Vektor  $|\psi^{AB}\rangle$  aus  $\mathcal{H}^{AB}$  kann nach der Basis zerlegt werden

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{ni} |n^A, i^B\rangle. \quad (7.6)$$

Alle Definitionen und Aussagen lassen sich direkt auf das Produkt einer endlichen Zahl von Hilbert-Räumen  $\mathcal{H}^{AB\dots M} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^M$  übertragen. Vektoren aus  $\mathcal{H}^{AB}$ , die keine Produktvektoren sind, werden *verschränkt* (entangled) genannt. Durch sie werden wir verschränkte reine Zustände repräsentieren, die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen werden. An der Zerlegung (7.6) nach der Basis ist zumeist nicht direkt ablesbar, ob ein Vektor  $|\psi^{AB}\rangle$  verschränkt ist. Wir werden hierzu später ein Kriterium entwickeln (Abschn. 8.2.1) und auch das Konzept der Verschränkung auf Dichteoperatoren erweitern (Abschn. 8.1.1).

**Skalarprodukt** Der Bra-Vektor zum Produktvektor  $|\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle$  hat die Form

$$(|\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle)^\dagger = \langle\varphi^A| \otimes \langle\chi^B| =: \langle\varphi^A|\langle\chi^B| =: \langle\varphi^A, \chi^B| =: \langle\varphi, \chi|. \quad (7.7)$$

Daraus folgt für  $|\psi^{AB}\rangle$  von Gl. (7.6)

$$(|\psi^{AB}\rangle)^\dagger = \langle\psi^{AB}| = \sum_{n,i} \alpha_{ni}^* \langle n^A, i^B|. \quad (7.8)$$

Das Skalarprodukt wird „raumweise“ gebildet:

$$\langle \varphi^A, \chi^B | \xi^A, \zeta^B \rangle = \langle \varphi^A | \xi^A \rangle \langle \chi^B | \zeta^B \rangle . \quad (7.9)$$

Eine Basis  $\{|n^A, i^B\rangle\}$  von  $\mathcal{H}^{AB}$  ist orthonormal, wenn

$$\langle n^A, i^B | n'^A, i'^B \rangle = \delta_{nn'} \delta_{ii'} \quad (7.10)$$

gilt, d. h. wenn  $\{|n^A\rangle\}$  und  $\{|i^B\rangle\}$  ONB sind.

**Bell-Basis**<sup>1</sup> Wie man leicht nachprüfen kann bilden die folgenden vier Vektoren eine spezielle ONB im Raum  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}_2^A \otimes \mathcal{H}_2^B$  der 2-Qubit-Vektoren:

$$|\Phi_{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle \pm |1, 1\rangle), \quad |\Psi_{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle \pm |1, 0\rangle). \quad (7.11)$$

Diese Basis spielt bei vielen Untersuchungen eine besondere Rolle. Wir werden später zeigen, dass diese häufig verwendeten *Bell-Zustände* maximal verschränkt sind.

## 7.2.2 Operatoren

**Produktoperatoren**  $C^A$  sei ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}^A$  und  $D^B$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}^B$ . Das Tensorprodukt

$$C^A \otimes D^B =: C^A D^B \quad (7.12)$$

bezeichnet einen *Produktoperator*, der „raumweise“ wirkt

$$[C^A \otimes D^B] |\varphi^A, \chi^B\rangle = |C^A \varphi^A, D^B \chi^B\rangle . \quad (7.13)$$

Der Produktoperator ist ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}^{AB}$ .

$$[C^A \otimes D^B] \sum_{n,i} \alpha_{ni} |n^A, i^B\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{ni} |C^A n^A, D^B i^B\rangle . \quad (7.14)$$

Der aus den Produktvektoren  $|\psi^{AB}\rangle = |\varphi^A, \chi^B\rangle$  und  $|\theta^{AB}\rangle = |\xi^A, \zeta^B\rangle$  gebildete dyadische Operator  $|\psi^{AB}\rangle \langle \theta^{AB}|$  ist ebenfalls ein Produktoperator.

$$|\psi^{AB}\rangle \langle \theta^{AB}| = |\varphi^A, \chi^B\rangle \langle \xi^A, \zeta^B| = (|\varphi^A\rangle \langle \xi^A|) \otimes (|\chi^B\rangle \langle \zeta^B|) . \quad (7.15)$$

Man kann die Klammern auch weglassen. Der Identitätsoperator auf  $\mathcal{H}^{AB}$  kann mit der Basis von Gl. (7.5) dyadisch zerlegt werden:

$$\mathbb{1}^{AB} = \sum_{n,i} |n^A, i^B\rangle \langle n^A, i^B| = \mathbb{1}^A \otimes \mathbb{1}^B . \quad (7.16)$$

---

<sup>1</sup>Benannt nach J.S. Bell (1928-1990)

Mit dem Identitätsoperator eines Faktorraums lassen sich spezielle Produktoperatoren bilden. Die durch ein Dach gekennzeichneten *erweiterten Operatoren (Teilsystem-Operatoren)*

$$\hat{C}^{AB} = C^A \otimes \mathbb{1}^B; \quad \hat{D}^{AB} = \mathbb{1}^A \otimes D^B \quad (7.17)$$

sind auf  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$  definiert, wirken jedoch nur in den jeweiligen Faktor-Hilberträumen in nicht-trivialer Weise.  $\hat{C}^{AB}$  und  $\hat{D}^{AB}$  kommutieren auf  $\mathcal{H}^{AB}$  und es gilt

$$\hat{C}^{AB} \otimes \hat{D}^{AB} = \hat{D}^{AB} \otimes \hat{C}^{AB} = C^A \otimes D^B. \quad (7.18)$$

**Allgemeine Operatoren** Mit Bezug auf die dyadische Zerlegung (7.16) von  $\mathbb{1}^{AB}$  können wir den allgemeinen Operator  $Z^{AB}$  auf  $\mathcal{H}^{AB}$  in der Form

$$Z^{AB} = \mathbb{1}^{AB} Z^{AB} \mathbb{1}^{AB} = \sum_{n,m} \sum_{i,j} \langle n^A, i^B | Z^{AB} | m^A, j^B \rangle (|n^A\rangle \langle m^A| \otimes |i^B\rangle \langle j^B|) \quad (7.19)$$

schreiben. Er ist durch seine Matrixelemente in der orthonormalen Basis (7.5) bestimmt.

**Spur und Teilspur** Die *Spur* (trace) ist auch in  $\mathcal{H}^{AB}$  über eine orthonormale Basis in gewohnter Weise definiert

$$\text{tr}_{AB}[Z^{AB}] := \text{tr}[Z^{AB}] := \sum_{n,i} \langle n^A, i^B | Z^{AB} | n^A, i^B \rangle. \quad (7.20)$$

Für Produktoperatoren folgt daraus

$$\text{tr}[C^A \otimes D^B] = \sum_{n,i} C_{nn}^A D_{ii}^B = \text{tr}_A[C^A] \text{tr}_B[D^B], \quad (7.21)$$

mit den Matrixelementen  $C_{nn}^A$  und  $D_{ii}^B$ . Die Spur wird „raumweise“ gebildet.

Die Bildung der *Teilspur* (partial trace) über einen der Faktorräume, beispielsweise den Raum  $\mathcal{H}^A$ , ist für die Physik besonders wichtig. Sie ist durch

$$\text{tr}_A[Z^{AB}] := \sum_n \langle n^A | Z^{AB} | n^A \rangle \quad (7.22)$$

definiert. Wie man an Gl. (7.19) ablesen kann, entsteht dabei ein Operator auf  $\mathcal{H}^B$ . Für Produktoperatoren folgt

$$\text{tr}_A[C^A \otimes D^B] = \text{tr}_A[C^A] D^B. \quad (7.23)$$

Die Gesamtspur ergibt sich als Abfolge von Teilspuren

$$\text{tr}[Z^{AB}] = \text{tr}_B[\text{tr}_A[Z^{AB}]] = \text{tr}_A[\text{tr}_B[Z^{AB}]]. \quad (7.24)$$

Dabei kommt es auf die Reihenfolge der Bildung der Teilspuren nicht an.

**Operatorbasis** Auch dieses Konzept, das wir in Abschn. 1.2 kennen gelernt haben, lässt sich direkt auf den Produktraum  $\mathcal{H}^{AB}$  übertragen. Wenn  $\{Q_\alpha^A, \alpha = 1, \dots, (\dim \mathcal{H}^A)^2\}$  eine Operatorbasis auf  $\mathcal{H}^A$  und  $\{R_\kappa^B, \kappa = 1, \dots, (\dim \mathcal{H}^B)^2\}$  eine Operatorbasis auf  $\mathcal{H}^B$  ist, dann bilden die Produktoperatoren

$$T_{\alpha\kappa}^{AB} := Q_\alpha^A \otimes R_\kappa^B \quad (7.25)$$

wegen

$$\text{tr}[T_{\alpha\kappa}^{AB\dagger} T_{\beta\lambda}^{AB}] = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\kappa\lambda} \quad (7.26)$$

eine Operatorbasis des Produktraums  $\mathcal{H}^{AB}$ . Man kann jeden Operator  $Z^{AB}$ , der auf  $\mathcal{H}^{AB}$  wirkt, nach ihr entwickeln:

$$Z^{AB} = \sum_{\alpha,\kappa} T_{\alpha\kappa}^{AB} \text{tr}[T_{\alpha\kappa}^{AB\dagger} Z^{AB}]. \quad (7.27)$$

Es gibt Operatoren auf  $\mathcal{H}^{AB}$ , die nicht als Produkt von zwei Operatoren in der Form  $C^A \otimes D^B$  geschrieben werden können. Aber alle Operatoren auf  $\mathcal{H}^{AB}$  können als Summe von Produktoperatoren geschrieben werden.

**Produkt-Liouville-Raum** Wir übertragen die Konzepte aus Abschn. 1.2 und bilden den *Produkt-Liouville-Raum*

$$\mathbb{L}^{AB} = \mathbb{L}^A \otimes \mathbb{L}^B. \quad (7.28)$$

Seine Elemente sind die Operatoren

$$C^{AB} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} Q_\alpha^A \otimes R_\beta^B. \quad (7.29)$$

auf  $\mathcal{H}^{AB}$ . Der *Liouville-Operator* wird in Verallgemeinerung von Gl. (1.84) mit dem Hamilton-Operator  $H^{AB}$  auf  $\mathcal{H}^{AB}$  definiert:

$$\mathcal{L}^{AB} Z^{AB} := \frac{1}{\hbar} [H^{AB}, Z^{AB}]_-. \quad (7.30)$$

## 7.3 Grundlagen der Physik zusammengesetzter Quantensysteme

### 7.3.1 Postulat für zusammengesetzte Systeme und Ausblick

Wir betrachten *zusammengesetzte Quantensysteme* (composite quantum systems), die selber abgeschlossen sein sollen. Daher können wir alle Postulate von Kap. 2 und 4 direkt übertragen. Insbesondere wird der Zustand des zusammengesetzten Systems durch einen Dichteoperator in einem Hilbert-Raum beschrieben. Die operationale Interpretation des Konzepts „Zustand“

eines Quantensystems als „das System hat ein bestimmtes Präparationsverfahren durchlaufen“ überträgt sich. Das zusammengesetzte System  $S^{AB\dots}$  soll aus *Teilsystemen* (subsystems)  $S^A, S^B, \dots$  bestehen. Da wir Teilsysteme betrachten wollen, die selber Quantensysteme sind, liegt es nahe, ihnen zur Beschreibung jeweils einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}^A, \mathcal{H}^B, \dots$  zuzuordnen. Dann bleibt zunächst noch die Frage offen, welche Struktur der Hilbert-Raum des Gesamtsystems hat, d. h. wie er sich aus den  $\mathcal{H}^A, \mathcal{H}^B, \dots$  mathematisch zusammensetzt. Hier gibt es im Prinzip viele Möglichkeiten. Eine ist z. B. die direkte Summe  $\mathcal{H}^{AB\dots} = \mathcal{H}^A \oplus \mathcal{H}^B \oplus \dots$ . Tatsächlich postuliert man aber das Tensorprodukt, wie wir es in Abschn. 7.2.1 beschrieben haben, um Übereinstimmung mit den Experimenten zu erzielen. Diese Festlegung hat weitreichende Konsequenzen für alle physikalischen Aussagen über zusammengesetzte Quantensysteme, deren Teilsysteme nicht völlig voneinander isoliert sind. Wir sind im Folgenden gerade an diesen Aussagen interessiert.

**Postulat** Die Zustände eines aus den Teilsystemen  $S^A, S^B, \dots$  zusammengesetzten abgeschlossenen Gesamtsystems  $S^{AB\dots}$  werden durch Dichteoperatoren  $\rho^{AB\dots}$  im Produkt-Hilbert-Raum

$$\mathcal{H}^{AB\dots} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \dots \quad (7.31)$$

beschrieben. Die Postulate für abgeschlossene Systeme aus Abschn. 2.1 und Abschn. 4.2 übertragen sich auf das Gesamtsystem  $S^{AB\dots}$ .

**Ausblick** An dem Postulat kann man unmittelbar eine Reihe von Besonderheiten der Physik zusammengesetzter Systeme ablesen. Die mathematische Produktstruktur (7.31) gibt eine Gliederung vor. Wir stellen sie am Beispiel eines 2-Teile-Systems  $S^{AB}$  dar.

- (i) Zustände: Ein reiner Zustand kann ein Produktzustand  $|\psi^{AB}\rangle = |\phi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle$  oder ein verschränkter Zustand  $|\psi^{AB}\rangle \neq |\phi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle$  sein. Die ungewöhnlichen Eigenschaften verschränkter Zustände, insbesondere das Auftreten nicht-klassischer Korrelationen und ihre Nutzung, werden wir im Rest dieses Kapitels und in allen weiteren Kapiteln im Einzelnen diskutieren. Auf korrelierte Dichteoperatoren  $\rho^{AB} \neq \rho^A \otimes \rho^B$  gehen wir in Abschn. 8.1 ein.
- (ii) Observablen: Es gibt den Spezialfall der erweiterten Observablenoperatoren, wie z. B.  $\hat{C}^{AB} = C^A \otimes \mathbb{1}^B$ , die mit einem Observablenoperator gebildet werden, der nur auf einem der Produkträume wirkt. Mit ihnen werden *lokale Messungen* (local measurements) beschrieben, die nur an einem der Teilsysteme durchgeführt werden (z. B. Messung der Observablen  $C^A$  am Teilsystem  $S^A$ ). Es gibt aber auf  $\mathcal{H}^{AB}$  allgemeinere hermitesche Operatoren  $Z^{AB}$ , die nicht als erweiterte Operatoren schreibbar sind. Auch ihnen entsprechen Messungen physikalischer Observablen  $Z^{AB}$ . Diese Observablen werden *nicht-lokale Observablen* (non-local observables) oder *kollektive Observablen* (collective observables) genannt. Die entsprechenden Messungen sind *nicht-lokale Messungen* (non-local measurements), die i. a. nicht direkt als lokale Messungen an  $S^A$  und  $S^B$  durchgeführt werden können. Das gilt auch für den Spezialfall der Observablen, die Operatorprodukten entsprechen (z. B.  $Z^{AB} = C^A \otimes D^B$ ). Nicht-lokale Messungen werden im Zusammenhang mit Quantenkorrelationen und der nicht-lokalen Speicherung von Information wichtig. Wir besprechen sie daher erst in Abschn. 9.2.

- (iii) Unitäre Entwicklungen: Auch die unitären Entwicklungen müssen nicht von der Struktur  $U^{AB} = U^A \otimes U^B$  sein. Es kann z. B. eine Wechselwirkung zwischen den Systemen  $S^A$  und  $S^B$  existieren. Wir diskutieren das in Abschn. 7.3.5. Nicht-lokale unitäre Entwicklungen können verschränkend und entschärkend wirken. .

### 7.3.2 Messungen an einem Teilsystem und reduzierter Dichteoperator

Über das Postulat sind insbesondere die Einzelheiten der projektiven Messung einer Observablen des Gesamtsystems festgelegt. Diese Messung am Gesamtsystem wird durch einen hermiteschen Operator auf  $\mathcal{H}^{AB\dots}$  beschrieben. Die Messung einer Observablen mit Observablenoperator  $C$  nur an einem Teilsystem, z. B. an  $S^A$ , ist als ein Spezialfall enthalten. Ihr ist ein Observablenoperator  $C^A$  zugeordnet, der auf  $\mathcal{H}^A$  wirkt. Dieser *lokalen Messung* (local measurement) entspricht in  $\mathcal{H}^{AB\dots}$  ein *lokaler Observablenoperator* (local observable)

$$\hat{C}^{AB\dots E} = C^A \otimes \mathbb{1}^B \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^E . \quad (7.32)$$

Wir wollen uns in diesem Kapitel auf Gesamtsysteme beschränken, die aus zwei Teilsystemen zusammengesetzt sind. Die Erweiterung auf mehr Teilsysteme ist trivial.

**Wahrscheinlichkeitsaussagen** Gemäß Postulat übertragen sich die Regeln für die Messdynamik auf die Zustände  $\rho^{AB}$  des zusammengesetzten Systems  $S^{AB}$ . Wir wollen die sich daraus ergebenden Konsequenzen für lokale Messungen untersuchen. Hierzu ist es nützlich jedem Teilsystem durch die Bildung der Teilspur über das andere Teilsystem einen *reduzierten Dichteoperator* (reduced density operator) zuzuordnen.

$$\rho^A := \text{tr}_B [\rho^{AB}], \quad \rho^B := \text{tr}_A [\rho^{AB}] \quad (7.33)$$

Da  $\rho^{AB}$  ein Dichteoperator ist, erfüllen  $\rho^A$  und  $\rho^B$  ebenfalls die Bedingungen für einen Dichteoperator. Das Eigenwertproblem des Observablenoperators  $C^A$

$$C^A |c_n^{(r)A}\rangle = c_n |c_n^{(r)A}\rangle, \quad r = 1, \dots, g_n \quad (7.34)$$

führt auf die ONB  $\{|c_n^{(r)A}\rangle\}$  von  $\mathcal{H}^A$  und die Eigenwerte  $\{c_n\}$  mit Entartung  $g_n$ . Die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von  $C$  am System  $S^A$  den Messwert  $c_n$  zu erhalten, ist dann mit dem *lokalen Projektionsoperator*

$$\hat{P}_n^A = P_n^A \otimes \mathbb{1}^B, \quad P_n^A := \sum_{r=1}^{g_n} |c_n^{(r)A}\rangle \langle c_n^{(r)A}| \quad (7.35)$$

durch

$$p(c_n) = \text{tr}[\hat{P}_n^A \rho^{AB}] = \text{tr}_A[\text{tr}_B\{\hat{P}_n^A \rho^{AB}\}] = \text{tr}_A[P_n^A \rho^A] \quad (7.36)$$

gegeben. In analoger Weise erhalten wir für den Erwartungswert der Observablen  $C$

$$\langle \hat{C}^A \rangle = \text{tr}[\rho^{AB} \hat{C}^A] = \text{tr}_A[\rho^A C^A] . \quad (7.37)$$

Zusammenfassend stellen wir fest: *Alle Wahrscheinlichkeitsaussagen für lokale Messungen am Teilsystem  $S^A$  ergeben sich indem man dem System  $S^A$  den reduzierten Dichteoperator  $\rho^A$  von Gl. (7.33) zuordnet und die für die Dichteoperatoren abgeschlossener Systeme postulierte Regeln anwendet.*



**Zustand eines Teilsystems** Da alle Wahrscheinlichkeitsaussagen für Messungen an  $S^A$  durch den reduzierten Dichteoperator  $\rho^A$  eindeutig bestimmt sind, liegt es nahe davon zu sprechen, dass sich das Teilsystem  $S^A$  im Zustand  $\rho^A$  befindet. So hatten wir in Kap. 2 das Zustandskonzept eingeführt. Das Gesamtsystem  $S^{AB}$  durchläuft ein Präparationsverfahren, das auf den Zustand  $\rho^{AB}$  führt. Damit ist zugleich der Zustand  $\rho^A = \text{tr}_B [\rho^{AB}]$  präpariert.

**Gemische allgemein** Bei einem Produktzustand  $|\alpha_k^A, \beta_k^B\rangle$  des Gesamtzustands  $S^{AB}$  ist das Untersystem  $S^A$  im reinen Zustand  $|\alpha_k^A\rangle$ . Ist der Zustand von  $S^{AB}$  speziell ein statistisches Gemisch (Gemenge) aus solchen Produktzuständen präpariert worden (vergl. Kap. 4)

$$\rho^{AB} = \sum_s p_s |\alpha_s^A, \beta_s^B\rangle \langle \alpha_s^A, \beta_s^B|, \quad \sum_s p_s = 1, \quad (7.38)$$

dann befindet sich  $S^A$  ebenfalls in einem statistischen Gemisch

$$\rho^A = \text{tr}_B [\rho^{AB}] = \sum_k p_k |\alpha_k^A\rangle \langle \alpha_k^A| \quad (7.39)$$

aus den Zuständen  $\{|\alpha_k^A\rangle\}$ . Eine Ignoranzinterpretation (vergl. Abschn. 4.3) ist möglich (proper mixture). Im allgemeinen wird der Zustand  $S^A$  nach der Präparation von  $\rho^{AB}$  aber kein statistisches Gemisch reiner Zustände sein wie in Gl. (7.39). Dennoch wird er durch einen Dichteoperator  $\rho^A$  beschrieben. Man überträgt daher operational den Begriff *Gemisch* (mixture) auch auf diesen Zustand  $\rho^A$  von  $S^A$ , dem – wie schon in Abschn. 4.2 beschrieben – kein Mischen zugrunde liegt, und lässt zur Verdeutlichung den Zusatz „statistisches“ weg. Zur Kennzeichnung wird in diesem Fall auch von *improper mixture* im Gegensatz zur *proper mixture* gesprochen. Gemisch ist also der Überbegriff. Bei Teilsystemen können Gemische auftreten, die hinsichtlich ihrer Präparation keine statistischen Gemische sind und daher keine Ignoranzinterpretation zulassen. Für sie gibt es formal viele Ensemblezerlegungen. Es gibt daher viele statistische Gemische eines abgeschlossenen Systems  $S^A$ , durch die sie hinsichtlich aller Wahrscheinlichkeitsaussagen für lokale Messungen ununterscheidbar *simuliert* werden können. Dies rechtfertigt noch einmal die Übertragung des Begriffs Gemisch auf alle reduzierten Dichteoperatoren.

### 7.3.3 Zustand nach einer Messung an einem Teilsystem

Auch den Zustand  $\rho_n^{A'}$  nach der selektiven Messung der Observablen  $C$  am System  $S^A$  mit Messwert  $c_n$  erhalten wir nach den für das Gesamtsystem gültigen Postulaten mit Hilfe des lokalen Projektionsoperators  $\hat{P}_n^A$  von Gl. (7.35) wie in Gl. (4.19)

$$\rho^A \rightarrow \rho_n^{A'} = \frac{\text{tr}_B [\hat{P}_n^A \rho^{AB} \hat{P}_n^A]}{\text{tr}_A [\text{tr}_B \{\hat{P}_n^A \rho^{AB}\}]} \quad (7.40)$$

Mit Gl. (7.33) finden wir für diese selektive lokale Messung

$$\rho^A \rightarrow \rho_n^{A'} = \frac{P_n^A \rho^A P_n^A}{\text{tr}_A [P_n^A \rho^A]} \quad (7.41)$$

Für die entsprechende nicht-selektive lokale Messung gilt mit Gl. (7.36) in Analogie zu Gl. (4.25)

$$\rho^A \xrightarrow{n.s.} \rho'^A = \text{tr}_B \left[ \sum_n \hat{P}_n^A \rho^{AB} \hat{P}_n^A \right] = \sum_n P_n^A \rho^A P_n^A. \quad (7.42)$$

Wir können für lokale Messungen auch hinsichtlich der resultierenden Zustände die Regeln für Dichteoperatoren von Kap. 4 anwenden, wenn wir dabei dem Teilsystem  $S^A$  den reduzierten Dichteoperator  $\rho^A$  von Gl. (7.33) zuordnen. Entsprechendes gilt für das Teilsystem  $S^B$ . Die Messwahrscheinlichkeiten (7.36) lassen sich wieder mit dem unnormierten (Spur  $\neq 1$ ) Dichteoperator  $\tilde{\rho}_n^{A'} = P_n^A \rho^{AB} P_n^A$  nach der Messung schreiben:

$$p(c_n) = \text{tr}_A [\tilde{\rho}_n^{A'}] \quad (7.43)$$

Wir betrachten noch den Spezialfall, dass sich das Gesamtsystem  $S^{AB}$  vor der Messung in einem verschränkten reinen Zustand  $|\psi^{AB}\rangle$  befindet. Nach Definition (vergl. Abschn. 7.2.1) ist ein verschränkter reiner Zustand nicht als Produktvektor schreibbar. Im Hinblick auf die Messung der Observablen  $C$  am Teilsystem  $S^A$  entwickeln wir  $|\psi^{AB}\rangle$  nach der ONB von  $\mathcal{H}^{AB}$ , die die Eigenvektoren  $\{|c_n^A\rangle\}$  von  $C^A$  enthält. Es möge keine Entartung vorliegen.

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{ni} |c_n^A, d_i^B\rangle. \quad (7.44)$$

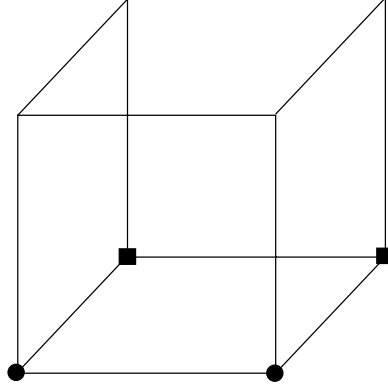
Wenn die Messung auf den Wert  $c_n$  führt, ergibt sich (Tilde kennzeichnet fehlende Normierung)

$$\begin{aligned} |\psi^{AB}\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}_n^{AB}\rangle &= P_n^A |\psi^{AB}\rangle = \\ &= |c_n^A\rangle \otimes \sum_i \alpha_{ni} |d_i^B\rangle = \\ &= |c_n^A, \tilde{w}_n^B\rangle \end{aligned} \quad (7.45)$$

mit

$$|\tilde{w}_n^B\rangle := \sum_i \alpha_{ni} |d_i^B\rangle. \quad (7.46)$$

Die Messung überführt somit in einen Produktzustand. Für einen verschränkten Zustand  $|\psi^{AB}\rangle$  bricht die nicht entartete Messung an einem Teilsystem die Verschränkung. Es ist bemerkenswert, dass dabei das andere Teilsystem  $S^B$  in einen speziellen Zustand  $|\tilde{w}_n^B\rangle$  übergeht, der über den Index  $n$  bei  $\alpha_{ni}$  vom Ergebnis der Messung an  $S^A$  abhängt. Auch wenn die verschränkten Teilsysteme  $S^A$  und  $S^B$  räumlich weit voneinander getrennt sind, hat die lokale Messung an  $S^A$  instantan eine wohlbestimmte Zustandsänderung des Systems  $S^B$  zur Folge. Die Messung an einem Teilsystem  $S^A$  wirkt präparierend auf das andere Teilsystem  $S^B$ . Wenn für ein System im Bell-Zustand  $|\Phi_+^{AB}\rangle$  die Messung von  $\sigma_z$  an einem Teilsystem in den Zustand  $|0\rangle$  überführt, dann auch beim anderen und entsprechend mit dem Zustand  $|1\rangle$  (vergl. den Neckerschen Würfel in Abb. 7.1). Dies ist Ausdruck der besonderen Ganzheitlichkeit des verschränkten Systems. Entsprechendes gilt für zusammengesetzte klassische Systeme nicht.



**Abbildung 7.1:** Der Neckersche Würfel und die Analogie zum verschränkten System. Die beiden linken unteren Eckpunkte (Kugel und Würfel) entsprechen den verschiedenen Zuständen von Teilsystem  $S^A$ , die rechten denen von Teilsystem  $S^B$ . Messen wird durch Hinsehen realisiert. Entweder sind als Ergebnis die beiden Kugelzustände vorn oder die beiden Würfelzustände sind vorn (Blick von oben oder von unten auf den Würfel). Immer wird bei Überführung des einen Teilsystems in einen Zustand auch das andere in den korrelierten Zustand überführt. Vor der Messung durch Hinsehen ist der Zustand des Neckerschen Würfels eine klassisch unmögliche „Superposition“.

### 7.3.4 Lokale Messungen an zwei Teilsystemen

Nachdem wir lokale Messungen an einem Teilsystem beschrieben haben, gehen wir zu lokalen Messungen an beiden Teilsystemen über. Wir betrachten wieder ein Quantensystem  $S^{AB}$ , das aus den Systemen  $S^A$  und  $S^B$  zusammengesetzt ist. Wir wollen am Teilsystem  $S^A$  die Observable  $C$  und am Teilsystem  $S^B$  die Observable  $D$  messen. Die zugehörigen Observablenoperatoren  $\hat{C}^A = C^A \otimes \mathbb{1}^B$  und  $\hat{D}^B = \mathbb{1}^A \otimes D^B$  kommutieren

$$[\hat{C}^A, \hat{D}^B]_- = 0. \quad (7.47)$$

Wir notieren noch die entsprechenden Eigenwertgleichungen

$$C^A |c_n^A\rangle = c_n |c_n^A\rangle, \quad D^B |d_i^B\rangle = d_i |d_i^B\rangle. \quad (7.48)$$

Die Vektoren  $\{|c_n^A\rangle\}$  und  $\{|d_i^B\rangle\}$  bilden ONB von  $\mathcal{H}^A$  bzw.  $\mathcal{H}^B$ . Die möglichen Messwerte  $\{c_n\}$  und  $\{d_i\}$  der lokalen Messungen sollen der Einfachheit halber nicht entartet sein.

**Relativzustände** Das Gesamtsystem  $S^{AB}$  soll sich vor den Messungen in einem reinen Zustand  $|\psi^{AB}\rangle$  befinden, den wir nach der den Messungen angepassten Basis von  $\mathcal{H}^{AB}$  zerlegen

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{ni} |c_n^A, d_i^B\rangle. \quad (7.49)$$

Es erweist sich als geschickt, im Hinblick auf das Ergebnis (7.45) die Doppelsumme in der Form

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_n |c_n^A, \tilde{w}_n^B\rangle \quad (7.50)$$

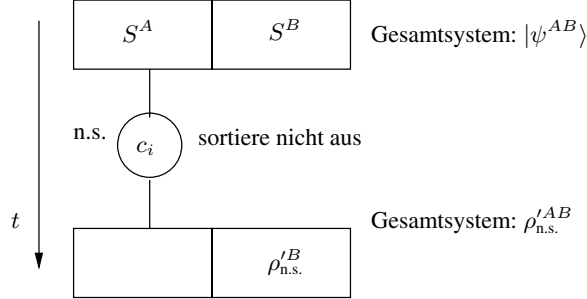


Abbildung 7.2: Nicht-selektive Messung am Teilsystem  $S^A$ .

aufzuspalten mit

$$|\tilde{w}_n^B\rangle := \sum_i \alpha_{ni} |d_i^B\rangle; \quad |w_n^B\rangle = \frac{|\tilde{w}_n^B\rangle}{\sqrt{\langle \tilde{w}_n^B | \tilde{w}_n^B \rangle}}. \quad (7.51)$$

Der Vektor  $|w_n^B\rangle$  heißt der *relative Zustand* (relative state) zu  $|c_n^A\rangle$ . Unnormierte Zustände sind wieder durch eine Tilde gekennzeichnet. Die relativen Vektoren  $\{|w_n^B\rangle\}$  bilden i.a. kein Orthonormalsystem. Ihre Anzahl muß auch nicht mit der Dimension des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}^B$  übereinstimmen.  $|\psi^{AB}\rangle$  lässt sich analog zu Gl. (7.50) auch bezüglich der zu  $\{|d_i^B\rangle\}$  relativen Zustände  $\{|\tilde{v}_i^A\rangle\}$  zerlegen.

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_i |\tilde{v}_i^A, d_i^B\rangle. \quad (7.52)$$

**Nicht-selektive lokale Messung** Wir führen eine Messung der Observablen  $C$  an  $S^A$  durch. Dabei soll sich der Messwert  $c_n$  ergeben. Dann geht das Gesamtsystem in den Produktvektor  $|c_n^A, \tilde{w}_n^B\rangle$  bzw. den normierten Vektor  $|c_n^A, w_n^B\rangle$  über. Die Wahrscheinlichkeit den Messwert  $c_n$  zu erhalten ist gemäß Gl. (7.36) durch das Quadrat der Norm des unnormierten relativen Zustandsvektors  $|\tilde{w}_n^B\rangle$  gegeben

$$p(c_n) = \langle \psi^{AB} | (|c_n^A\rangle\langle c_n^A| \otimes \mathbb{1}^B) | \psi^{AB} \rangle = \langle \tilde{w}_n^B | \tilde{w}_n^B \rangle = \|\tilde{w}_n^B\|^2. \quad (7.53)$$

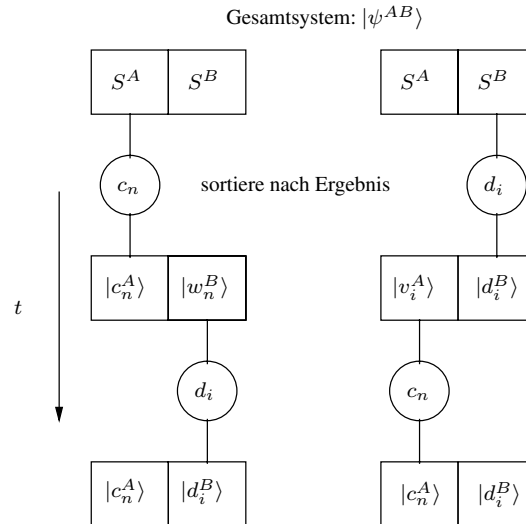
Nach einer nicht-selektiven Messung an  $S^A$  befindet sich das Gesamtsystem  $S^{AB}$  in einem gemischten Zustand mit Dichteoperator

$$\rho_{n.s.}^{AB} = \sum_n p(c_n) |c_n^A, w_n^B\rangle\langle c_n^A, w_n^B| = \sum_n |c_n^A, \tilde{w}_n^B\rangle\langle c_n^A, \tilde{w}_n^B|. \quad (7.54)$$

Dabei haben wir Gl. (7.53) verwendet. Die Superposition von Gl. (7.50) ist in das Gemisch von Gl. (7.54) zerlegt worden.

Alle Messungen am System  $S^B$  nach dieser nicht-selektiven Messung an  $S^A$  können durch den reduzierten Dichteoperator  $\rho_{n.s.}^B$  beschrieben werden

$$\rho_{n.s.}^B = \text{tr}_A \rho_{n.s.}^{AB} = \sum_n |\tilde{w}_n^B\rangle\langle \tilde{w}_n^B|, \quad (7.55)$$



**Abbildung 7.3:** Selektive Messung an den Teilsystemen  $S^A$  und  $S^B$ . Links wird zuerst an  $S^A$  und dann an  $S^B$  gemessen, rechts in der anderen Reihenfolge. Es wird jeweils nach den Messwerten  $d_i$  und  $c_n$  selektiert. Die Wahrscheinlichkeit das Messwertepaar  $(c_n, d_i)$  zu erhalten und der entsprechende Endzustand  $|c_n^A, d_i^B\rangle$  ist in beiden Fällen gleich.

der direkt durch den relativen Zustand  $|\tilde{w}_i^B\rangle$  gegeben ist. Gl. (7.50) zeigt unmittelbar, dass er mit dem reduzierten Dichteoperator des Teilsystems  $S^B$  vor der Messung übereinstimmt.

$$\rho^B = \text{tr}_A[|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|] = \rho_{n.s.}^{\prime B} \quad (7.56)$$

Dies ist ein bemerkenswertes Ergebnis. Betrachten wir die Situation, dass das System  $S^A$  sich bei Alice befindet und das System  $S^B$  räumlich getrennt davon bei Bob. In einem Präparationsverfahren wird sehr oft ein 2-Teile-System im Zustand  $|\psi^{AB}\rangle$  erzeugt. Alice ist es freigestellt, ob sie Messungen der Observablen  $C$  an ihrem System durchführt oder nicht. Bob kann dann in keiner Weise durch Messungen welcher Observablen auch immer an seinem Teilsystem  $S^B$  feststellen, ob Alice Messungen durchgeführt hat oder nicht. Das besagt gerade die Gl. (7.56). Da die Situation vollständig symmetrisch ist, gilt die Aussage entsprechend wenn Bob die ersten Messungen durchführt.

Nicht-selektiv bedeutet in diesem Zusammenhang, dass es Alice nicht erlaubt ist nach ihrer Messung z. B. die Zustände  $|c_n^A, w_n^B\rangle$  des Gesamtsystems herauszusuchen, die zu ihrem Messergebnis  $c_n$  gehören und dafür zu sorgen, dass nur an Systemen in diesen Zuständen weitere Messungen durchgeführt werden. Das könnte sie offenbar nur erreichen, wenn Bob in gleicher Weise bei seinen Teilsystemen selektionieren würde. Dazu müsste Alice nach jeder ihrer Messungen Bob die Information übermitteln, ob er sein zugehöriges Teilsystem für anschließende Messungen weiter verwenden kann oder ob er es aussondern soll. Wenn Bob aber im Gegensatz dazu misst ohne vorher zu selektieren, kann er nicht feststellen, ob Ali-

ce gemessen hat oder nicht. Wenn er Anweisungen für eine Selektion bekommt, weiß er das trivialerweise.

**Selektive lokale Messungen** Wir gehen zu selektiven Messungen über und stellen sie zur Einübung in den Formalismus ausführlicher dar. Zunächst misst Alice und erhält mit der Wahrscheinlichkeit  $p(c_n) = \langle \tilde{w}_n^B | \tilde{w}_n^B \rangle$  den Messwert  $c_n$ . Das System geht in den Gesamtzustand  $|c_n^A, w_n^B\rangle$  über (vgl. Abb. 7.3). Wenn anschließend an diese Selektion Bob misst, erhält er den Messwert  $d_i$  mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$p(d_i|c_n) = \frac{|\alpha_{ni}|^2}{p(c_n)}. \quad (7.57)$$

Dies kann man an den Gl. (7.51) ablesen. Das Gesamtsystem geht dabei in den Produktzustand  $|c_n^A, d_i^B\rangle$  über. Wenn umgekehrt zuerst Bob und dann – nach Selektion nach dem Messwert  $d_i$  – Alice misst, erhalten wir analog (vgl. Abb. 7.3) den gleichen Endzustand für das Messwertepaar  $(c_n, d_i)$ . Für die Wahrscheinlichkeiten ergibt sich

$$p(c_n|d_i) = \frac{|\alpha_{ni}|^2}{p(d_i)}. \quad (7.58)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $p(c_n, d_i)$ , mit der das Messwertepaar  $(c_n, d_i)$  erhalten wird, ist unabhängig von der Reihenfolge der Messungen:

$$p(c_n, d_i) = p(c_n|d_i)p(d_i) = p(d_i|c_n)p(c_n) = |\alpha_{ni}|^2 = \langle \psi^{AB} | P_{ni}^{AB} | \psi^{AB} \rangle \quad (7.59)$$

mit Projektionsoperator  $P_{ni}^{AB} := |c_n^A, d_i^B\rangle\langle c_n^A, d_i^B|$ . Da die Operatoren  $\hat{C}^A$  und  $\hat{D}^B$  kommutieren, war das auch nicht anders zu erwarten. Wir ergänzen noch, dass alle oben für den reinen Ausgangszustand  $|\psi^{AB}\rangle$  gemachten Aussagen sich in bekannter Weise übertragen lassen, wenn der Ausgangszustand ein Gemisch mit Dichteoperator  $\rho^{AB}$  ist.

**Erwartungswerte von Produktoperatoren** Produktoperatoren repräsentieren spezielle nicht-lokale Observable. Für Anwendungen ist es wichtig, dass ihre Erwartungswerte durch lokale Messungen und klassische Kommunikation bestimmt werden können. Die dyadische Zerlegung des Operators  $C^A \otimes D^B$  ist von der Form (vgl. Gl. (7.48))

$$C^A \otimes D^B = \sum_{n,i} c_n d_i |c_n^A, d_i^B\rangle\langle c_n^A, d_i^B|. \quad (7.60)$$

Für seinen Erwartungswert im Zustand  $\rho^{AB}$  gilt

$$\text{tr} [C^A \otimes D^B \rho^{AB}] = \sum_{n,i} \text{tr} [P_{ni}^A B \rho^{AB}] c_n d_i. \quad (7.61)$$

Die Spur auf der rechten Seite ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei lokalen Messungen an den Teilsystemen  $S^A$  und  $S^B$  das Messwertepaar  $(c_n^A, d_i^B)$  auftritt. *Der Erwartungswert eines Produktoperators stimmt mit dem Erwartungswert der Produkte korrelierter Messwerte überein.* Zu seiner Bestimmung messen Alice und Bob an einem Quantensystem im Zustand  $\rho^{AB}$

an denen ihnen jeweils zugänglichen Teilsystemen, informieren sich über die Messergebnisse und bilden das Produkt der beiden korrelierten Messwerte. Das wiederholen sie an vielen Systemen im Zustand  $\rho^{AB}$  und berechnen schließlich den Mittelwert der Messwertprodukte. Wir kommen auf nicht-lokale Observable noch einmal in Abschn. 9.2 zurück.

### 7.3.5 Unitäre Dynamik zusammengesetzter Systeme

Die von-Neumann-Gleichung (4.9) bzw. (4.10) überträgt sich nach den Postulaten auf zusammengesetzte Systeme

$$i\hbar \frac{d\rho^{AB}}{dt} = [H^{AB}, \rho^{AB}(t)] \quad i \frac{d\rho^{AB}}{dt} = \mathcal{L}^{AB} \rho^{AB}(t) . \quad (7.62)$$

mit dem Liouville-Operator  $\mathcal{L}^{AB} \in \mathbb{L}^A \otimes \mathbb{L}^B$ . Wir verwenden das Schrödinger-Bild.

Wenn eine durch einen Hamilton-Operator  $H_{\text{int}}^{AB} \neq 0$  beschriebenen Wechselwirkung zwischen den Teilsystemen  $S^A$  und  $S^B$  vorliegt, sind die einzelnen Teilsysteme *offen* (open quantum systems). Der Gesamt-Hamilton-Operator hat dann die Form

$$H^{AB} = H^A \otimes \mathbb{1}^B + \mathbb{1}^A \otimes H^B + H_{\text{int}}^{AB} . \quad (7.63)$$

Der zugehörige Liouville-Operator ergibt sich als

$$\mathcal{L}^{AB} = \mathcal{L}^A + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}_{\text{int}}^{AB} \quad (7.64)$$

und für die von-Neumann-Gleichung folgt:

$$i \frac{d\rho^{AB}}{dt} = (\mathcal{L}^A + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}_{\text{int}}^{AB}) \rho^{AB}(t) . \quad (7.65)$$

Dies führt für den reduzierten Dichteoperator  $\rho^A$  auf die Differentialgleichung

$$i \frac{d\rho^A}{dt} = \mathcal{L}^A \rho^A(t) + \text{tr}_B [\mathcal{L}_{\text{int}}^{AB} \rho^{AB}(t)] \quad (7.66)$$

Zur Bestimmung von  $\rho^A(t)$  muss man die volle Gl. (7.65) integrieren. Hierfür gibt es verschiedene Näherungsverfahren. Wir werden in Abschn. 13.1 und 14 einen In-Out-Zugang (in-out-approach) zur Dynamik offener Systeme kennenlernen, der nicht auf dem durch Gl. (7.66) beschriebenen differentiellen zeitlichen Verhalten von  $\rho^A(t)$  beruht, sondern in phänomenologischer Weise durch einen Superoperator den Endzustand  $\rho^A(t_{\text{out}})$  auf den Anfangszustand  $\rho^A(t_{\text{in}})$  zurückführt.

## 7.4 Quantengatter für mehrere Qubit-Systeme

### 7.4.1 Verschränkung durch das CNOT-Gatter

Die Verarbeitung von Quanteninformation wird oft schematisch ohne Bezug auf eine experimentelle Realisierung durch *Quantenschaltungen* (quantum circuits) veranschaulicht. Die

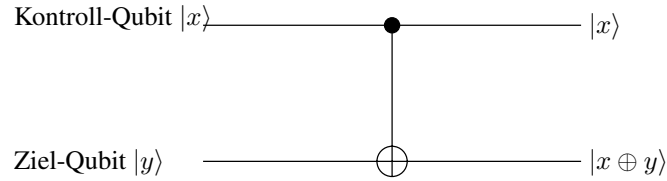


Abbildung 7.4: CNOT-Gatter.

wesentlichen Bauelemente, die dabei auftauchen, sind: *Quantendrähte* (quantum wires), dies sind spezielle Quantenkanäle durch die Quantensysteme unbeeinflusst propagieren, sowie *Quantengatter* (quantum gates), durch die unitäre Transformationen von Quantensystemen bewirkt werden. Die Systeme sind Multi-Qubits aus Räumen  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \dots \otimes \mathcal{H}_2$ . *Messungen* dienen zum Auslesen von Information. Wegen der Unitarität repräsentieren Quantengatter umkehrbare Prozesse. Messungen sind demgegenüber irreversibel. *Quantencomputer* (quantum computers) sind ein Netzwerk von Quantengattern. Quantengatter für Quantensysteme aus  $\mathcal{H}_2$  haben wir bereits in Abschn. 3.4 kennengelernt. Wir gehen jetzt zu Produkträumen über. In Kap. 12 werden wir Quantenschaltungen zu Quantencomputern zusammensetzen.

**Verschränkung durch das CNOT-Gatter** Ein einfaches Quantengatter, das einen Qubit-Produktzustand in einen verschränkten Zustand überführt, ist das *CNOT-Gatter* (CNOT gate, controlled NOT gate, XOR gate). Seine Wirkung auf der Rechenbasis von  $\mathcal{H}_2^A \otimes \mathcal{H}_2^B$  ist durch

$$|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus x\rangle \quad (7.67)$$

mit  $x, y, \dots \in \{0, 1\}$  definiert. Damit liegt die Wirkung auf einen beliebigen Vektor aus  $\mathcal{H}_2^A \otimes \mathcal{H}_2^B$  fest.  $\oplus$  bezeichnet die Addition modulo 2, d. h. es gilt  $1 \oplus 1 = 0$ . Im Einzelnen bedeutet das:

$$|0, 0\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |0, 0\rangle \quad (7.68)$$

$$|0, 1\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |0, 1\rangle \quad (7.69)$$

$$|1, 0\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |1, 1\rangle \quad (7.70)$$

$$|1, 1\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |1, 0\rangle . \quad (7.71)$$

Daraus folgt

$$(\text{CNOT}) \cdot (\text{CNOT}) = \mathbb{1} . \quad (7.72)$$

Mit Hilfe der Matrixdarstellung in der Rechenbasis prüft man leicht die Unitarität nach

$$(\text{CNOT})^\dagger = (\text{CNOT})^{-1} . \quad (7.73)$$

Die Qubits des Systems  $A$  bzw.  $B$  werden *Kontroll-Qubit* (control qubit) bzw. *Ziel-Qubit* (target qubit) genannt (siehe Abb. 7.4). Ein einfaches Beispiel zeigt, dass das CNOT-Gatter



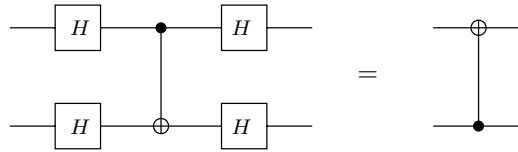


Abbildung 7.5: Zwei äquivalente Netzwerke.

Superpositionen im Kontroll-Qubit in Verschränkungen von Kontroll- und Ziel-Qubit überführt:

$$(\alpha|0^A\rangle \pm \beta|1\rangle)|0^B\rangle = \alpha|0^A, 0^B\rangle \pm \beta|1^A, 1^B\rangle, \tag{7.74}$$

$$(\alpha|0^A\rangle \pm \beta|1^A\rangle)|1^B\rangle = \alpha|0^A, 1^B\rangle \pm |1^A, 0^B\rangle. \tag{7.75}$$

Für  $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  entstehen so die vier Bell-Zustände. Der reduzierte Dichteoperator vom Ziel-Qubit ist in diesem Fall  $\rho^B = \frac{1}{2}\mathbf{1}^B$  (entsprechend beim Kontroll-Qubit). Die Messung in irgendeiner ONB von  $\mathcal{H}_2^B$  liefert die beiden Messwerte und Zustände in perfekter Zufälligkeit mit den Wahrscheinlichkeiten  $\frac{1}{2}$ .

Ein CNOT-Gatter und vier Hadamard-Gatter lassen sich zum Inversen eines CNOT-Gatters zusammenbauen (siehe Abb. 7.5).

Die Schaltung von Abb. 7.6 aus drei CNOT vertauscht Kontroll- und Ziel-Qubit

$$|x, y\rangle \rightarrow |x, x \oplus y\rangle \rightarrow |y, x \oplus y\rangle \rightarrow |y, x\rangle. \tag{7.76}$$

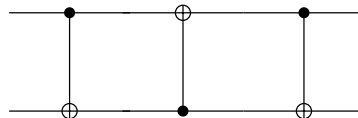


Abbildung 7.6: Vertauschen von zwei Qubits.

Das CNOT-Gatter ist der Spezialfall eines *kontrollierten U-Gatters* (controlled U gate) (siehe Abb. 7.7). Es lässt  $|0, 0\rangle$  und  $|0, 1\rangle$  unverändert.  $|1, y\rangle$  mit  $y = 0, 1$  geht in  $|1\rangle \otimes U|y\rangle$  über. CNOT ergibt sich mit  $U = \sigma_x$ .

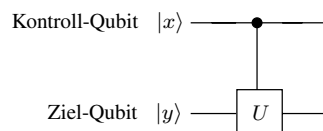


Abbildung 7.7: Kontrolliertes U-Gatter.

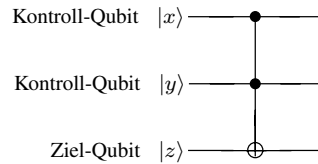


Abbildung 7.8: Toffoli-Gatter.

### 7.4.2 Toffoli-Gatter

Das *Toffoli-Gatter* (Toffoli gate) von Abb. 7.8 wird auch *CCNOT-Gatter* (controlled-controlled NOT) oder doppel kontrolliertes NOT-Gatter genannt. Bei ihm wird das NOT-Gatter genau dann auf das Ziel-Qubit angewendet, wenn beide Kontroll-Qubits im Zustand  $|1\rangle$  sind. Die Wirkung von CCNOT ist

$$|x, y, z\rangle \rightarrow |x, y, z \oplus xy\rangle. \quad (7.77)$$

Analog kann man ein doppel kontrolliertes U-Gatter konstruieren (siehe Abb. 7.9)

*Universelle Quantengatter* (universal quantum gates) sind eine Menge von Quantengattern, mit denen man jede unitäre Transformation auf  $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_2$  erzeugen kann. Es lässt sich zeigen, dass z. B. das *Deutsch-Gatter* (Deutsch gate) hierfür ausreicht. Bei diesem Gatter ist die unitäre Transformation  $U$  von Abb. 7.8

$$U = -i \exp\left(i \frac{\theta}{2} \sigma_x\right). \quad (7.78)$$

Es gibt weitere universelle Gatter (vergl. Abschn. 7.5).

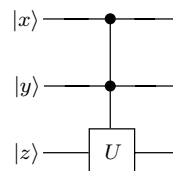


Abbildung 7.9: Doppelt kontrolliertes U-Gatter.

## 7.5 Ergänzende Themen und weiterführende Literatur

- Zu „proper mixture“ und „improper mixture“: [d’Es95], [d’Es99].
- Die Idee, dass das Ganze mehr ist als die Summe seiner Teile, wird in der Philosophie als *Holismus* (holism) oder *Ganzheitlichkeit* bezeichnet. Es gibt eine Reihe von philosophischen Analysen, in denen versucht wird, dieser Idee in ganz verschiedenen Gebieten von der Soziologie bis zur Physik eine präzise Bedeutung zu geben und ihre Konsequenzen

zu untersuchen. Für die naturphilosophische Frage, ob es Holismus in der Physik gibt, haben sich mit den nicht-separablen Zuständen zusammengesetzter Systeme ganz neue Aspekte ergeben. Zwei unterschiedliche darauf aufbauende Analysen werden in [Esf 04] und [See 04] vorgestellt (vergl. [Esf 02]). Dort ist auch weiterführende Literatur angegeben. Siehe auch [Hea 99].

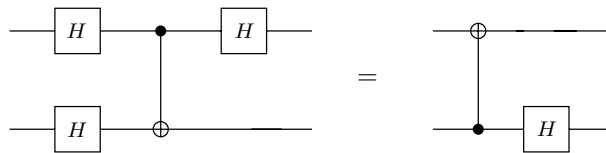
- Das Deutsch-Gatter ist ein universelles Gatter: [Deu 89], [Pre 98, Kap. 6.2.3].
- Zu weiteren universellen Gattern: [Pre 98, Kap. 6.2.3], [NC 00, S. 188], [BBC 95].
- Lokale Messungen und die Forderung der Relativitätstheorie: [PT 04].
- Übersicht über Quantengatter für Qubits: [Bra 02], [DiV 98].

## 7.6 Übungsaufgaben

**ÜA 7.1 [zu 7.3.2]** Zeigen Sie, dass  $\rho^A$  und  $\rho^B$  von Gl. (7.33) die Eigenschaften eines Dichteoperators erfüllen.

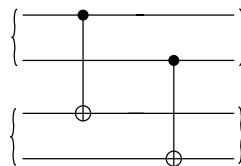
**ÜA 7.2 [zu 7.3.4]** Bestätigen Sie die Ergebnisse von Abschn. 7.3.4 für den Fall, dass der Ausgangszustand kein reiner Zustand  $|\psi^{AB}\rangle$ , sondern ein Gemisch  $\rho^{AB}$  ist.

**ÜA 7.3 [zu 7.4]** Zeigen Sie jeweils die Äquivalenz der Netzwerke von Abb. 7.5 und Abb. 7.10.



**Abbildung 7.10:** Zwei äquivalente Netzwerke.

**ÜA 7.4 [zu 7.4]** Zeigen Sie, dass das Netzwerk von Abb. 7.11 Paare von Bell-Zuständen in Paare von Bell-Zuständen überführt.



**Abbildung 7.11:** Abbildung von Bell-Zuständen auf Bell-Zustände.

