Mechanik

Physik mit Büroklammern

Büroklammern sind allgegenwärtig. Sie schaffen aber nicht nur Ordnung im Papierstapel sondern lassen sich auch für verblüffende physikalische Experimente einsetzen. So geben sie einfache Kreisel ab und veranschaulichen die Formen von Ketten und Hängebrücken.

Dem Norweger Johan Vaaler wird die Erfindung der Büroklammer zugeschrieben. Er ließ sie 1899 in Deutschland patentieren, da Norwegen kein Patentamt hatte. Im Jahr 1999 erschien eine Briefmarke zum Gedächtnis dieser epochalen Erfindung (Abbildung 1). Vaaler vermarktete seine Erfindung nicht. Das geschah kurze Zeit später in den Vereinigten Staaten. Dort beruft man sich auf ein noch früheres US-Patent. Mittlerweile gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Formen von Büroklammern; Milliarden werden jährlich verbraucht.

Abb. 1 ***Die Büroklammer wurde 1899 in Norwegen erfunden.***

Kreisel aus Büroklammern

Wie kann man aus einer Büroklammer in möglichst einfacher Weise einen Kreisel herstellen? Der Japaner Takao Sakai hat einige interessante Möglichkeiten beschrieben [1]. Man biege den Draht der Büroklammer auf einem Kreis so um eine Achse, dass der Schwerpunkt des Kreisels in der Kreiselachse liegt, die wiederum aus zwei Halbachsen besteht (Abbildung 2). Dazu muss der Winkel β zwischen den Speichen gerade eine Größe von 53,13 Grad haben. Diesen Winkel zu berechnen ist eine Aufgabe für Physikstudenten im ersten Jahr ihres Studiums. (siehe Infokasten „Der Büroklammerkreisel"). Bei der Konstruktion nehme man Büroklammern mit möglichst weichem Draht. Die lassen sich sogar ohne Zange verformen. Auf die genaue Einhaltung des Winkels und der Kreisform kommt es nicht an. Am Wichtigsten ist, dass der Schwerpunkt in der Achse liegt.

Dieser Kreisel ist ersichtlich unsymmetrisch. Es gibt jedoch auch einen symmetrischen Büroklammerkreisel (Abbildung 3). Der Winkel β zwischen den Speichen beträgt hier 33,69 Grad. Die Berechnung dieses Winkels ist aufwändiger [2]. Auch die Konstruktion ist schwieriger, da mehr Speichen und Rundungen gebogen werden müssen. Weitere Kreisel aus Büroklammern inklusive eines instabilen Kreisels sind in [2] besprochen.

Ungewöhnlich einfach ist die Konstruktion eines – zweidimensionalen – Stehaufkreisels aus einer Büroklammer (Abbildung 4), die wir nur bei Kamishina gesehen haben [3]. Wie aus der Abbildung ersichtlich, fällt der Schwerpunkt des Kreisels nicht mit dem Mittelpunkt des äußeren Kreises zusammen. Das ist ein charakteristisches Konstruktionsmerkmal des klassischen Stehauf- oder Wendekreisels, der normalerweise aus einem Kugelteil mit Stift besteht. Das Andrehen dieses Stehaufkreisels ist etwas mühsam, da man ihn außen am Kreisrand anfassen muss und deswegen keine sehr hohe Drehzahl erreicht. Der Effekt ist jedoch deutlich sichtbar. Etwas besser geht es, wenn man mit den Zeigefingern (jeweils in entgegengesetzte Richtung) gegen die gegenüberliegenden Seiten des Kreisels stößt. Aber das muss man etwas üben. In jedem Fall ist dieser Stehaufeffekt nicht so spektakulär wie bei dem massiven Stehaufkreisel.

Der Stehaufkreisel aus einer Büroklammer ist eine Variation des Kreisels aus einer Münze oder Scheibe mit einem exzentrischen Loch. Auch hier fällt der Schwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkt der Münze zusammen [4].

Für das Verhalten des Stehaufkreisels gibt es leider keine einfache Erklärung, die sich mit wenigen Sätzen formulieren lässt (siehe auch den Beitrag zum Stehaufkreisel).

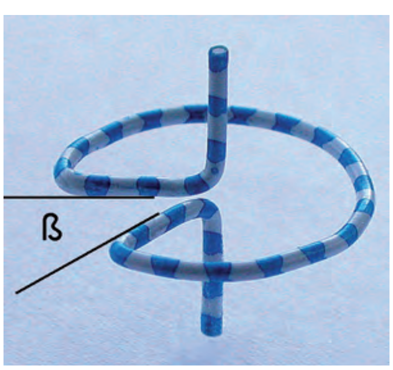

Abb. 2 ***Ein Kreisel, der sich aus einer Büroklammer biegen lässt.***

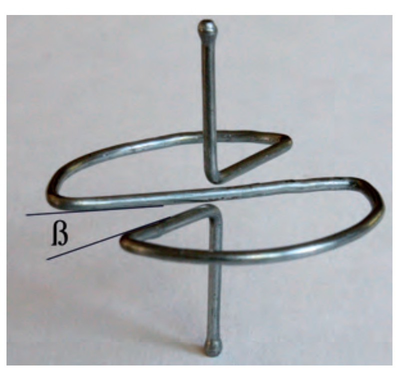

Abb. 3 ***Ein symmetrischer Büroklammer-Kreisel.***

Abb. 4 ***Ein Stehaufkreisel aus einer größeren Büroklammer.***

Abb. 5 ***Kettenlinie mit 16 Büroklammern. Die Büroklammern sind hinter der idealen Kettenlinie (rot) und Parabel (blau) noch zu erkennen.***

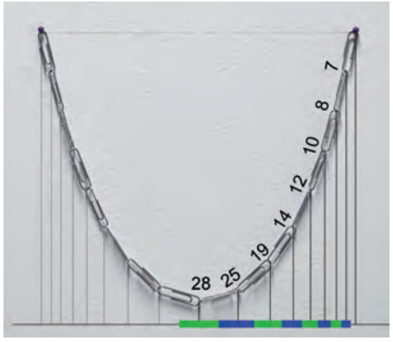

Abb. 6 ***Konstruktion einer Hängebrücke. Die Zahlen stellen den in Millimeter gemessenen Abstand der Tragekabel dar.***

Abb. 7 ***Parabel mit 16 Büroklammern und Gewichten. Aus Übersichtsgründen sind die langen Ketten der hängenden Büroklammern nicht ganz abgebildet. Eine ideale Parabel (blau) wurde grafisch darüber gelegt.***

Ketten aus Büroklammern

Welche Kurvenform nimmt eine Kette an, die an ihren beiden Enden aufgehängt wird? Diese Frage stellte sich schon Galileo Galilei – und beantwortete sie falsch, indem er auf eine Parabel tippte. Erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts leiteten die Brüder Jacob und Johann Bernoulli sowie Gottfried Wilhelm Leibniz und Christiaan Huyghens die richtige Form ab. Es handelt sich um die Funktion cosinus hyperbolicus (cosh), die auch als Summe zweier Exponentialfunktionen ausgedrückt werden kann. Die Ableitung der Kettenlinie findet sich in vielen Lehrbüchern der Mathematik und Mechanik sowie im Internet, weswegen wir sie hier nicht wiedergegeben.

Mit hinreichend vielen Büroklammern lässt sich die Kettenlinie gut realisieren. Bei wenigen Büroklammern spielen Länge und Verbindung zwischen den Klammern noch eine Rolle. In Abbildung 5 sind die ideale Kettenlinie und eine Parabel gleicher Länge über eine Kette mit 16 Büroklammern gelegt. Deutlich erkennbar stimmt die rote Kettenlinie mit der Büroklammerkette überein, die blaue Parabel hingegen nicht. Der Unterschied zwischen Kettenlinie und Parabel ist besonders markant bei einem relativ starken Durchhang wie in Abbildung 5.

Hängt an jedem Glied einer Kette ein im Verhältnis zum Gewicht eines Kettenglieds großes Gewicht, wie es zum Beispiel bei Hängebrücken der Fall ist, verändert sich die Kettenlinie tatsächlich in eine Parabel (siehe Infokasten „Die Hängebrückenparabel"). Auch das lässt sich mit Büroklammern realisieren. Die im Folgenden beschriebene Möglichkeit ist zwar mathematisch nicht ganz exakt, führt jedoch in der Realität schon beim ersten Versuch zu einem sehr guten Resultat. Man hänge die Kette mit den Büroklammern vor ein Blatt Papier, markiere die Verbindungspunkte der Büroklammern auf dem Papier und zeichne dann senkrecht nach unten gerade Linien. In Abbildung 6 ist das mit der Büroklammerkette aus Abbildung 5 zu sehen. Eine waagerechte Linie stelle die am Hauptkabel der Hängebrücke hängende Last (die Straße) dar. Der am tiefsten Punkt hängende Teil der Straße (grün) ist zugleich der größte und damit auch schwerste Teil. Er geht von der Mitte der linken bis zur Mitte der rechten Büroklammer. Man hänge an diesen untersten Punkt so viele Büroklammern, wie die Länge des Straßenteils in Millimetern auf dem Blatt Papier beträgt. Der nächste Straßenteil (blau) ist kürzer. An diese Verbindungsstelle hängt man ebenfalls eine der Länge in Millimetern entsprechende Anzahl von Büroklammern usw. Auf diese Weise hängt an jeder Verbindungsstelle das ihm zukommende Gewicht. In Abbildung 6 bedeuten die an der Kette ersichtlichen Zahlen die so ermittelten Millimeter.

Nahe den Endpunkten der Kette hängen nur wenige Büroklammern. Das Verhältnis des Gewichts der hängenden Büroklammern im Verhältnis zum Gewicht des Hauptkabels beträgt hier nur etwa 3 zu 1. Am tiefsten Punkt beträgt das Gewichtsverhältnis etwa 20 zu 1. Diese Veränderung der Gewichtsverhältnisse liegt an unserer Konstruktion, bei der die Abstände der Tragekabel entlang dem Hauptkabel

DER BÜROKLAMMERKREISEL

In Abbildung 9 ist der Kreisel in Aufsicht dargestellt. Wird der Winkel zwischen den Speichen zu groß oder zu klein, liegt der Gesamtschwerpunkt offenbar neben dem Kreismittelpunkt. Zur Berechnung des korrekten Winkels kann man sich auf die Berechnung des Schwerpunkts der beiden Speichen und des gegenüberliegenden, kleinen Kreisbogens der Länge s beschränken. Die anderen Teile des Kreisbogens (rot markiert) liegen symmetrisch zum Kreismittelpunkt und brauchen deshalb nicht berücksichtigt zu werden. Es ist für die Berechnung günstig, den halben Speichenwinkel α einzuführen.

In Abbildung 10 sind Speichen und Kreisbogen herausgehoben. Der Kreismittelpunkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems. Der Abstand des Schwerpunkts des Kreisbogens vom Nullpunkt betrage x_1. Ist s die Länge des Kreisbogens, berechnet sich wegen der Symmetrie zur x-Achse der Schwerpunkt mit dem Linienintegral

$$x_1 = \frac{\int x ds}{s} = \frac{1}{s}\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot d\varphi = \frac{2\cdot r^2}{s}\sin\alpha$$

Sind ρ die Dichte des Drahtmaterials und A der Querschnitt des Drahtes, dann ist die Masse des Kreisbogens $m_1 = s\cdot\rho\cdot A$. Bezüglich des Nullpunktes erzeugt der Kreisbogen ein Moment $M_1 = m_1\cdot x_1 = 2\cdot r^2\cdot\sin\alpha\cdot\rho\cdot A$.

Der Schwerpunkt der Speichen liegt bei $x_2 = r/2\cdot\cos\alpha$, die Masse beträgt $m_2 = 2\cdot r\cdot\rho\cdot A$. Das von den Speichen erzeugte Moment bezüglich des Nullpunktes ist $M_2 = m_2\cdot x_2 = r^2\cdot\cos\alpha\cdot\rho\cdot A$.

Aus dem Gleichsetzen beider Momente ergibt sich $\tan\alpha = 0{,}5$, das heißt $\alpha = 26.565\,°$. Der Winkel zwischen den Speichen ist dann $\beta = 2\alpha = 53.13\,°$.

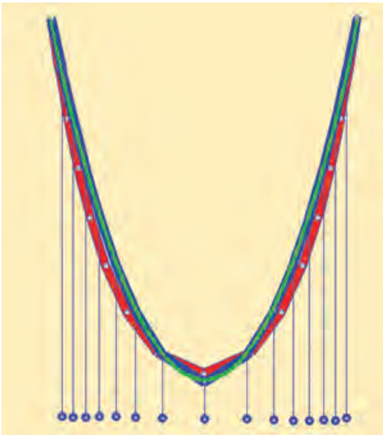

Abb. 8 ***Simulation von Kettenlinie und Parabel mit Interactive Physics.***

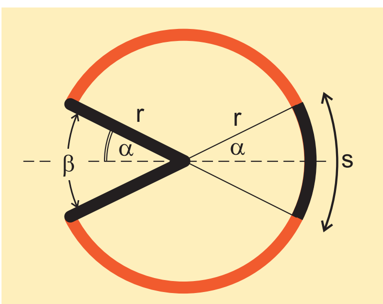

Abb. 9 ***Der Büroklammerkreisel in der Aufsicht.***

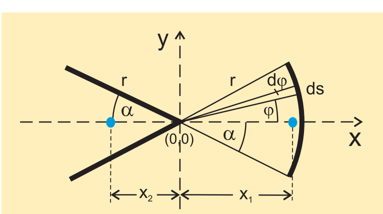

Abb. 10 ***Zur Berechnung des Schwerpunktes werden nur noch die Speichen und der gegenüberliegende Kreisbogen betrachtet.***

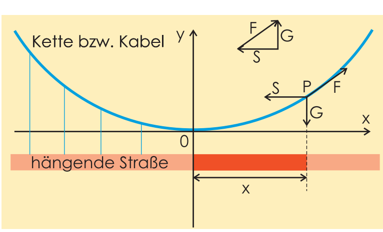

Abb. 11 ***Bei einer Hängebrücke ergibt sich als Kurvenform für das Tragekabel eine Parabel.***

DIE HÄNGEBRÜCKENPARABEL

Stark vereinfacht und idealisiert lässt sich die Form der Kurve von Tragekabeln bei Hängebrücken wie folgt ableiten.

In einen Punkt P des Tragekabels einer Hängebrücke wirken drei Kräfte, deren vektorielle Addition sich gerade aufheben muss (Abbildung 11). Als Erstes wirkt die Gewichtskraft *G* des Straßenteils der Länge *x* senkrecht nach unten. Als Zweites wird durch die Spannung des Kabels eine horizontale Kraft *S* ausgeübt. Diese ist über das ganze Kabel hinweg konstant. Als Drittes wirkt eine Kraft *F* in Richtung der Tangente des Kabels. Diese Tangentialkraft entspricht gerade der Steigung im Punkt P.

Sei nun μ das Gewicht pro Längeneinheit der am Kabel hängenden Straße. Der Koordinatenursprung 0 liege im Fußpunkt der Kurve. Dann ist das am Punkt P angreifende Gewicht *G* gerade gleich μx. Bezeichnen wir mit *y* die Höhe des Kabels im Punkt *x*, dann ist die Steigung in diesem Punkt

$$y' = \frac{G}{S} = \frac{\mu \cdot x}{S}$$

Daraus erhalten wir durch Integration

$$y = \int \frac{\mu \cdot x}{S} dx = \frac{\mu}{2S} x^2 + C$$

Da der Koordinatenursprung 0 im Fußpunkt der Kurve liegt, muss die Integrationskonstante $C = 0$ sein.

Für die Form der Kurve ergibt sich somit eine Parabel.

gleich groß sind. Bei realen Hängebrücken ist der horizontale Abstand der Tragekabel gleich groß. Bei ihnen beträgt dieses – konstante – Gewichtsverhältnis etwa 10 zu 1 bis 15 zu 1. Da es kein ideales, masseloses Hauptkabel gibt, stellt die Kurvenform des realen Hauptkabels einer Hängebrücke immer eine Mischung aus einer Kettenlinie und einer Parabel dar. Dies ist in Wirklichkeit auch schon deswegen kein Problem für die Konstrukteure, da bei einem geringen Durchhang der Unterschied zwischen Parabel und Kettenlinie praktisch vernachlässigbar ist. In Abbildung 7 ist schon eine sehr gute Übereinstimmung mit einer idealen Parabel (blau) zu erkennen.

Mit Physik-Simulationsprogrammen wie Interactive Physics [5] oder XYZet [6] lassen sich die beschriebenen Sachverhalte ebenfalls sehr schön veranschaulichen. In Abbildung 8 sind eine mit 16 Gliedern simulierte Kette ohne Gewichte (dicke, rote Linie), die mit entsprechenden Gewichten versehene Hängebrücke (dicke, blaue Linie unter der grünen Linie) und eine ideale Parabel (dünne, grüne Linie) übereinander gelegt.

Im Internet finden sich unter den Begriffen Kettenlinie, Katenoide, catenary viele Hinweise, sowohl geschichtlicher Art als auch Ableitungen. Außerdem gibt es sehr anschauliche Applets, die den Unterschied zwischen der Kettenlinie und der Parabel verdeutlichen [7, 8].

Literatur und Internet

[1] T. Sakai, Takao, Mathematical Sciences (in japanisch) **1986**, *271* (1), 18.
[2] C. Ucke, Physikalische Blätter **1998**, *54*, 440.
[3] Y. Kamishina, Proceedings of International Workshop on Hands-On Activities for In-School and Out-of-School Learners Focusing on the Marginalized Youth, Pattaya, Thailand **1999**
[4] www.mpi-inf.mpg.de/~schoemer/silvia/kreisel.html
[5] www.interactivephysics.com/
[6] www.ipn.uni-kiel.de/persons/michael/xyzet/
[7] www.arndt-bruenner.de/mathe/java/kettenlinie.htm
[8] demonstrations.wolfram.com/CatenaryTheHangingChain/

Mit folgenden Stichwörtern findet man bei YouTube videos: paper clip top, paper clip spinner.

Der Schwirrring – Rotierende Scheiben am rotierenden Ring

Unterlegscheiben, Ringe und Reifen können auf überraschende Weise zum Leben erweckt werden, wenn man sie über einen passenden Stab schiebt und in Drehung versetzt. Unter dem Einfluss der eigenen Schwere rotieren sie dann in der einen oder anderen Form am Stab hinab. Wie kommt es zur Drehung und Selbstorganisation solcher Bewegungsfiguren?

Die Spirale ist ein vergeistigter Kreis.
In der Form der Spirale hat der Kreis
– unrund und aufgebogen – aufgehört, schlecht zu sein;
– er ist befreit.

Vladimir Nabokov

Manche Spielzeuge sind Alltagsgegenstände, die einer Spielidee entsprechend benutzt werden. Man denke etwa an Dosendeckel oder andere Wurfscheiben, mit denen schon wie mit einem Frisbee gespielt wurde, als es Frisbees noch gar nicht gab. Der Frisbee ist ein gutes Beispiel dafür, dass kommerzielle Spielzeuge häufig nur eine verbesserte Version längst bekannter Alltagsspielzeuge darstellen.

In diese Kategorie gehört der sogenannte Fiddlestick [1]. Es handelt sich dabei um einen Rundstab, an dem Scheiben zur Drehung und Umrundung des Stabs gebracht werden (Abbildung 1). Hierfür schiebt man eine oder mehrere Scheiben über den Stab und versetzt sie gegen den Stab drückend in horizontale Drehung. In den meisten Fällen rollt die Scheibe dann mit der Innenseite am Stab ab und rotiert leicht gegen die Horizontale geneigt abwärts.

Reizvoll und interessant ist dabei, dass die Scheiben unerwartet gemächlich und mit gleichbleibender Drehfrequenz auf einer spiralförmigen Bahn am Stab hinab rotieren. Auch wenn der Start oft in unterschiedlicher Weise erfolgt, finden sich die Scheiben über kurz oder lang fast immer in ihren Bewegungszustand ein. Und die Bewegungsfigur überlebt ohne Weiteres kleine Störungen in Form von Schwenks mit dem Stab.

Ich fühlte mich an meine Kindheit erinnert (HJS), in der ich einen solchen Stab zum festen Repertoire meiner selbst hergestellten Spielzeuge zählte. Ich benutzte damals Eisendraht (oft Schweißdraht) und Rundhölzer, an denen ich Unterlegscheiben, Schrauben, Ringe und Reifen verschiedener Größe hinabschwirren ließ. Heute ist das Angebot reichhaltiger. Man muss nur einmal mit offenen Augen durch einen Baumarkt oder ein Bastelgeschäft gehen, um zu entdecken, dass sowohl Ringe als auch Stäbe in den verschiedensten Materialien und Ausführungen zur Verfügung stehen. Auch bei der Kombination von Ring und Stab sind der Fantasie kaum Grenzen gesetzt: Man denke etwa an Besenstiele mit Holz- oder Plastikgardinenringen, Gewindestangen mit Schrauben oder Unterlegscheiben unterschiedlicher Größen, Metall- oder Kunststoffrohre mit Metall- oder Kunststoffscheiben und vieles mehr.

Ein aus Gewindestangen und metallenen Unterlegscheiben hergestelltes Phänobjekt war unter dem Namen Spira eine Zeit lang bei der Schweizer Firma Naef erhältlich (Abbildung 2)

Auch das Phänomen der Rotation der Scheiben lässt sich auf vielfältige Weise variieren. Je nach der Art der Scheibe (Durchmesser, Masse, Form (flache oder runde Innenseite, Rauigkeit der Oberfläche) und des Stabs (Durchmesser, Steifheit, Rauigkeit der Oberfläche) kommt es zu unterschiedlichen Bewegungsfiguren. Hier nur einige Beispiele:

- Die Scheibe windet sich in relativ großem Winkel in kurzer Zeit am Stab hinab.
- Die Scheibe rotiert so lange auf derselben Höhe, bis ihre Rotationsenergie nahezu verbraucht ist, und rutscht dann im freien Fall am Stab hinab. Dem Nabokovschen Zitat entsprechend ist dies ein „schlechter Kreis“. Es gilt, ihn zu einer Spirale aufzubiegen, um der Scheibe die Freiheit des energetischen Austausches mit der Umgebung und damit ein langes Leben zu ermöglichen.

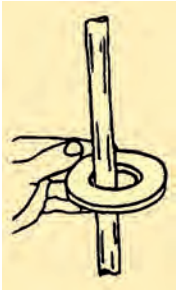

Abb. 1 ***Die Scheibe wird mit der Hand in Gang gesetzt und läuft auf einer Spiralbahn am Stab hinab.***

Abb. 2 ***Das aus Gewindestangen und Unterlegscheiben hergestellte Phänobjekt der Firma Naef.***

- Die im Kreis gefangene einmalig rotierende und dann abstürzende Scheibe schafft es unter bestimmten Umständen – insbesondere dann, wenn noch ein Rest an Drehimpuls vorhanden ist – an einer tieferen Stelle hängen zu bleiben und die Fallenergie nutzend, ein erneutes Rotationsintermezzo einzulegen.
- Benutzt man gleichzeitig mehrere Scheiben, so laufen sie entweder gleichzeitig in schöner Gleichförmigkeit am Stab hinab, oder eine der oberen Scheiben ist schneller oder steiler als die darunter liegenden und läuft in diese hinein. Dabei kann es zu einer Art elastischer Reflexion der kollidierenden Scheiben kommen. Dieser Vorgang kann sich mehrere Male wiederholen.
- Schließlich kann man es mit einiger Übung und einer relativ stabil rotierenden Scheibe erreichen, die Rotation beliebig zu verlängern. Man dreht den Stab sehr schnell um kurz bevor die Scheibe das Stabende erreicht hat. Noch schwieriger ist dies mit mehreren Scheiben.

Vom Stab zum Ring: die Zeit wird zyklisch

Die Idee, die „Lebensdauer“ der rotierenden Scheiben zu verlängern, kann noch vervollkommnet werden. Biegt man den Stab zu einem Ring, indem man Anfang und Ende miteinander verbindet, so kann die Rotation der Scheiben im Prinzip beliebig lange aufrechterhalten werden. Die Drehung des Rings muss so auf die Rotation der Scheiben abgestimmt werden, dass diese auf derselben Höhe des Rings gleichförmig rotieren. In diesem stationären Zustand bleibt die mittlere Energie der Scheiben konstant, weil durch Reibung genauso viel Energie dissipiert wie durch die Drehung mit den Händen zugeführt wird. Und das kann man deutlich spüren. Lässt man den Ring nämlich einfach mit derselben Geschwindigkeit durch die (nahezu) im tiefsten Punkt befindlichen Scheiben hindurch gleiten, so ist dafür viel weniger Energie nötig, als wenn die Ringe in Rotation gehalten werden.

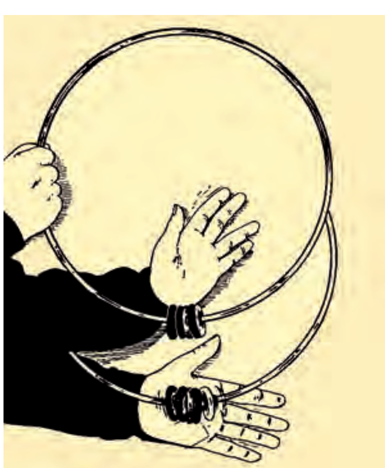

Abb. 3 ***Man versetzt die Scheiben mit der Hand in Rotation und dreht dann den Ring in dem Maße, dass die Scheiben in etwa auf gleicher Höhe bleiben.***

Eine gelungene Realisation dieser Idee ist das seit vielen Jahren auch als Schwirrring bezeichnete Spielzeug [2]. Eine sehr verbreitete Version dieses Rings hat einen Durchmesser von 28 cm und besteht aus 6,4 mm starkem Metall. Er ist mit fünf Hartplastikscheiben ausgestattet, deren Löcher etwa doppelt so groß sind wie die Stärke des Rings.

Einzelne Scheiben lassen sich leicht starten, während der gleichzeitige Start aller Scheiben eine gewisse Geschicklichkeit voraussetzt. Eine Methode besteht darin, die an der tiefsten Stelle des Rings parallel aufgereihten Scheiben mit der von oben nach unten bewegten flachen Hand streifend in Gang zu setzen (Abbildung 3). Die Bezeichnung Schwirrring soll vielleicht an das Schwirren eines Vogels erinnern, der mit schnellen Flügelschlägen auf der Stelle verharrt und dabei ein gleichmäßiges Geräusch erzeugt.

Der spiralförmige Abstieg

Im Folgenden wollen wir das Schwirren aus physikalischer Sicht erklären. Hierfür nehmen wir an, dass der Ring als gebogener Stab angesehen werden kann. Dann ist die Erklärung des Schwirrens für die Scheibe am Stab auch eine Erklärung für die Scheibe am Ring. Wir beschränken uns also der Einfachheit halber auf eine Betrachtung der Scheibe am Stab.

Hat man die Scheibe gestartet, so findet sie sich relativ schnell in einen stationären Rotationszustand ein. Der Stab hindert sie daran, sich in der Richtung weiter zu bewegen, in der sie angeschoben wurde. Ihr (kontinuierlich oft) wiederholter Versuch, aus Trägheit eine geradlinig gleichförmige Bahn zu verfolgen, wird gewissermaßen durch eine kontinuierliche Kollision des inneren Rings der Scheibe mit dem Stab verhindert. Die auf diese Weise entstehende Kreisbewegung wird durch die (elastische) Kraft hervorgebracht, die im umlaufenden Berührpunkt zwischen Scheibe und Stab wirkt. Sie ist umso größer, je schneller die Scheibe rotiert.

Bei genügend schneller Rotation verhindert diese Kraft einen Absturz der Scheibe unter dem Einfluss der Gewichtskraft: Im Berührpunkt von Scheibe und Stab (Punkt A’ in Abbildung 4) bringt sie nämlich eine Haftreibung hervor, die groß genug ist, um die Gewichtskraft zu kompensieren. (Deshalb funktioniert der Start auch nur oberhalb einer Mindestgeschwindigkeit).

Da die Haftreibungskraft anders als die Gewichtskraft nicht im Schwerpunkt der Scheibe angreift, wirkt auf die Scheibe ein kippendes Drehmoment (Kräftepaar in A und A’ in Abbildung 4). Infolgedessen tendiert die Scheibe dazu, sich zu der dem Berührpunkt gegenüber liegenden Seite zu neigen. Da aber durch die Neigung der Bewegungszustand der Scheibe geändert würde, kommt es zu einem trägheitsbedingten „Sträuben“ gegen diese Änderung. Anders als bei geradlinig bewegten Körpern erfolgt diese aber nicht in Richtung der Einwirkung, sondern wie bei einem Kreisel senkrecht dazu. Dabei wird die durch die Neigung hervorgerufene Schräganstellung der Scheibe im Berührpunkt durch ein entsprechendes um 90 Grad phasenverschobenes Anheben (Kräftepaar in B und B’ in Abbildung 4) ständig gerade wieder aufgehoben. Man hat es also mit einer Präzessionsbewegung zu tun, bei der die (gedachte), um den Stab herum rotierende Kreiselachse auf einem Kegelmantel um den Stab herum läuft.

Genau genommen würde nur im reibungsfreien Falle die Schräganstellung der Scheibe durch das trägheitsbedingte Anheben der Scheibe vollständig aufgehoben werden und es zu einer kreisförmigen Bahn kommen. Wegen der reibungsbedingten Energiedissipation wird die Schräganstellung jedoch nicht vollständig aufgehoben. Die Scheibe bleibt etwas schräg nach unten geneigt, und der Kreis um den Stab wird zu einer Spirale zum Fußpunkt des Stabs aufgebrochen.

Dieser Symmetriebruch ist das entscheidende Ereignis. Erst dadurch erwirbt die rotierende Scheibe ganz im Sinne des Ausspruchs von Nabokov die Fähigkeit zur Selbstorganisation, durch die jenes so faszinierende Phänomen hervorgerufen und gegen stets vorhandene äußere Störungen stabilisiert wird.

Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass die Energiedissipation nicht etwa zu einer Verlangsamung der Drehung und damit zu einer Verringerung der Haftreibung führt, womit der baldige Absturz unvermeidlich wäre. Die durch die Dissipation bedingte Abwärtsbewegung ermöglicht es der Scheibe nämlich – ähnlich wie ein eine schiefe Ebene hinab rollender Zylinder –, die dadurch verfügbar werdende potentielle Energie zur Erhöhung der Umlaufgeschwindigkeit zu nutzen.

Der Regelmechanismus: Je schneller, desto langsamer

Anstatt aber immer schneller zu werden, geht die Scheibe bereits unmittelbar nach dem geglückten Start in einen stationären Bewegungszustand über. Das ist nur möglich, wenn die die Scheibe beschleunigende Antriebskraft aufgehoben wird durch eine ebenfalls mit der Geschwindigkeit wachsende Bremskraft. Die bremsende Kraft muss sogar schneller mit der Geschwindigkeit zunehmen als die antreibende Kraft, damit erstere letztere „überholen“ und infolgedessen begrenzen kann. Im stationären Bewegungszustand müssen beide Kräfte gleich groß sein. Energetisch gesehen kann dieser Zustand konstanter kinetischer Energie nur dadurch aufrechterhalten werden, dass die von außen zufließende Antriebsenergie vollständig dissipiert, sprich als Wärme an die Umgebung abgegeben wird. Oder anders ausgedrückt: Die rotierende Scheibe muss im zeitlichen Mittel genau so viel Energie aufnehmen wie sie durch Dissipation einbüßt.

Doch woher „weiß“ die Scheibe, wie viel Energie sie aus dem Reservoir der zur Verfügung stehenden potentiellen Energie aufnehmen muss, um die stationäre Bewegungsstruktur aufrecht zu erhalten und gegen stets vorhandene äußere Störungen, die sich in Geschwindigkeitsänderungen äußern können, abzubauen?

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir zunächst, was passiert, wenn sich die Rotationsgeschwindigkeit erhöht. In diesem Fall überwiegt die Antriebskraft und die Bahnneigung der Scheibe nach unten wird geringer (siehe oben). Folglich verringert sich der Energiezufluss und reicht nicht mehr aus, die Reibungsverluste zu kompensieren: Die Scheibe wird langsamer. Eine Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit hat aber wieder eine Vergrößerung der Bahnneigung zur Folge. Dadurch kommt es erneut zu einer Beschleunigung und einer damit verbundenen erhöhten Energieaufnahme und so immer weiter.

In diesem zyklischen Wechselspiel von Beschleunigung und Verlangsamung beziehungsweise Vergrößerung und Verkleinerung der Bahnneigung erkennt man unschwer einen wesentlichen Regelmechanismus für die Stationarität und Stabilität der am Stab hinab spiralenden Scheibe. Deshalb pendelt die Geschwindigkeit – im Normalfall kaum merklich – um den Wert der stationären Geschwindigkeit, die das stationäre Gleichgewicht zwischen Antrieb und Dissipation charakterisiert. Der Regelvorgang lässt sich letztlich reduzieren auf die Aussage: Eine Vergrößerung der Geschwindigkeit hat eine Verkleinerung der Geschwindigkeit zur Folge, die eine Vergrößerung der Geschwindigkeit bewirkt und so weiter. Wir haben es hier also mit einem Rückkopplungszirkel zu tun, den wir in ähnlicher Form auch bei anderen Systemen vorfinden [3].

Literatur und Internet

[1] J. Walker, Der fliegende Zirkus der Physik, Oldenbourg, München **2008**, 77.

[2] www.perpetuum-mobile.ch/de/produkte/schwirrring-1222.html

[3] H.J. Schlichting, Physik und Didaktik **1989**, *17* (3), 231.

Mit folgenden Stichwörtern findet man Videos bei YouTube: gyro ring, chatter ring, jitter ring.

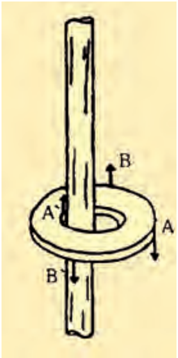

Abb. 4 ***An der Scheibe angreifende Kräfte.***

Zylinder- und Kugelkreisel

Mit einfachsten Mitteln lassen sich ungewöhnliche Kreisel aus Plastikzylindern, Holzkugeln und magnetischen Kugeln herstellen, die in unerwartete Bewegungen versetzt werden können. Etwas aufwendigere Versionen zeigen überdies interessante optische Erscheinungen.

Nicht jeder Kreisel sieht aus wie Kreisel und nicht jeder Kreisel wird angedreht wie ein Kreisel. Drückt man mit dem Zeigefinger auf das markierte Ende eines flach auf einer möglichst glatten Unterlage liegenden und mit einer Farbmarke versehenen Hohlzylinders und lässt ihn dabei wegschnippen, dann entsteht eine erstaunliche Bewegungsfigur: Der Zylinder rotiert gleichzeitig um seine eigene Längsachse und um eine zur Unterlage senkrechte Achse durch die Mitte des Zylinders. Er rollt dabei auf dem Umfang der gegenüberliegenden Seite des angestoßenen Endes ab.

Der Zylinder beschreibt zunächst einen deutlich sichtbaren Präzessionskegel der reibungsbedingt zunehmend flacher wird. Gegen Ende des noch immer schnell rotierenden Kreisels sieht man deutlich eine stationäre Kreisfläche mit drei Farbpunkten (Abbildung 2). Das kann kein Zufall sein! Vielmehr verweist die Struktur auf ein dreizähliges Verhältnis der beiden Rotationen zueinander: Tatsächlich ist die Länge L des Zylinders gleich dem Dreifachen seines Durchmessers d. Bei jeder Umdrehung um die senkrechte Achse durch die Mitte des Zylinders rollt er gerade dreimal ab und lässt dementsprechend den roten Punkt mit erstaunlicher Regelmäßigkeit dreimal erscheinen. Abbildung 2 stellt eine Übereinanderlagerung von drei Bildern aus einem Video des kreiselnden Zylinders dar und gibt etwa den visuellen Eindruck wieder, kurz bevor der Zylinder stoppt. Zu Beginn des Andrehens des Zylinders sieht man weniger, eventuell auch nur schnell wechselnde Punkte.

Massive Zylinder rotieren wegen ihres größeren Trägheitsmomentes länger. Man muss aber auch mehr Energie aufwenden, um sie anzudrehen.

Physik des Zylinderkreisels

Unmittelbar nach dem Andrehen ist der Winkel φ zwischen der Zylinderachse und der Ebene noch relativ groß. Dann ist auch die visuelle Erscheinung noch nicht eindeutig und schwieriger zu beschreiben. Bei kleinen Winkeln ($\varphi < 10\,°$, Abbildung 3) tritt der geschilderte Effekt deutlich in Erscheinung. Das rechtfertigt die folgende Beschränkung der Betrachtung auf kleine Winkel [1].

Der Zylinder rotiert einerseits mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um seine Längsachse, zum anderen präzediert er mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ um eine Achse senkrecht zur Unterlage. Die Geschwindigkeit eines Punktes auf der Zylinderoberfläche setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ aufgrund der Rotation um die Zylinderachse und $\boldsymbol{v}_R$ aufgrund der Rotation um die vertikale Achse (Abbildung 4):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}.$$

Mit der Voraussetzung eines kleinen Neigungswinkels φ kann man näherungsweise $R \approx L/2$ setzen. Außerdem ist $r = d/2$.

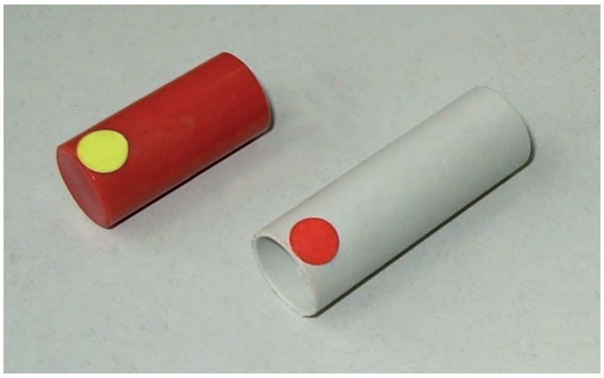

Abb. 1 ***Zylinder als Kreisel.***

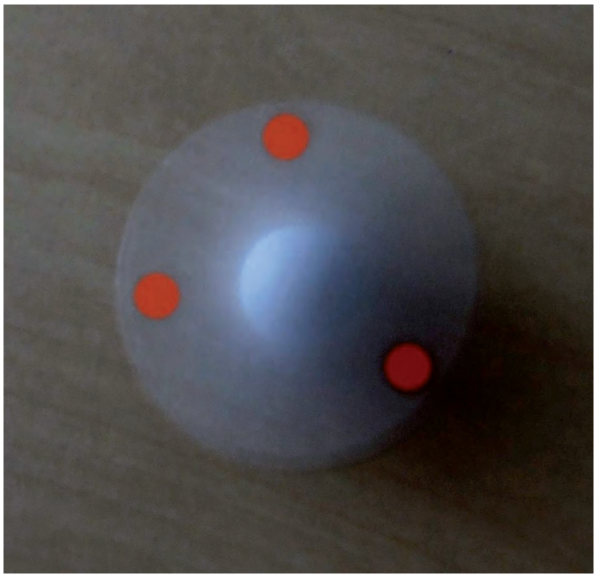

Abb. 2 ***Visueller Eindruck des rotierenden Zylinders.***

Es tönen die Gläser

„Jede Glocke hat ihren Klöppel", heißt es in einem deutschen Sprichwort. Einem Weinglas entlockt man auch ohne Klöppel einen glockenartigen Ton, wenn man mit dem feuchten Finger über den Rand des Glases fährt. Wie kommt dieser Ton zustande?

Ich bin des trockenen Tons nun satt.

Johann Wolfgang von Goethe

Wie eine Glocke klingt das mit einem Löffel leicht angeschlagene Weinglas. Mit dem feinen, aber durchdringenden Ton hat schon so mancher Festredner die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Weniger festlich, dafür aber physikalisch und haptisch umso faszinierender, wird der Ton des Weinglases empfunden, wenn er nicht durch trockenes Anschlagen, sondern durch den feuchten Finger hervorgerufen wird, mit dem man leicht über den Glasrand fährt. Was spricht uns hier an? Ist es die Konstanz des Tons, der so lange nicht verhallt, wie der Finger über das Glas gleitet? Oder ist es die Art und Weise, auf die ein relativ lauter Ton aufgrund einer auffällig leichten Berührung des Glases entsteht?

Diese ungewöhnliche Art, Töne zu erzeugen, ist nicht neu. Schon Galileo Galilei bewundert in seinem „Saggiatore" (1623) jemanden, „der, mit der Fingerkuppe den Rand eines Glases reibend, ihm einen wunderbar zarten Ton entlockte" [1], und Benjamin Franklin erfand sogar ein Musikinstrument, das aus rotierenden Gläsern unterschiedlicher Größe bestand, deren Rand automatisch feucht gehalten wurde. Es genügte, die verschiedenen Gläser dieser Harmonica zu berühren, um Töne zu erzeugen und ganze Melodien einer feinen „Glasmusik" zu spielen [5].

Tönen heißt schwingen

Wenn man dies nicht schon wüsste, könnte man es zum Beispiel daran feststellen, dass ein an den Rand des tönenden Glases gehaltener Löffel fühlbar und hörbar zum Mitschwingen angeregt wird. Einen sichtbaren Ausdruck findet der Ton des vollgefüllten Weinglases auf der Oberfläche der Flüssigkeit. Solange das Glas tönt, erscheinen dort feine Kräuselungen der Flüssigkeit, die besonders deutlich als senkrecht zum Glasrand orientierte kurzwellige Randwellen in Erscheinung treten (Abbildung 1). Sie ähneln den „Flüstergalerie"-Wellen, die bereits Lord Rayleigh 1904 in der St. Paul's Cathedral in London beobachtete [2].

Die Randwellen ordnen sich in einem karreeartigen Muster an, in dem sich Bereiche relativer Ruhe mit solchen

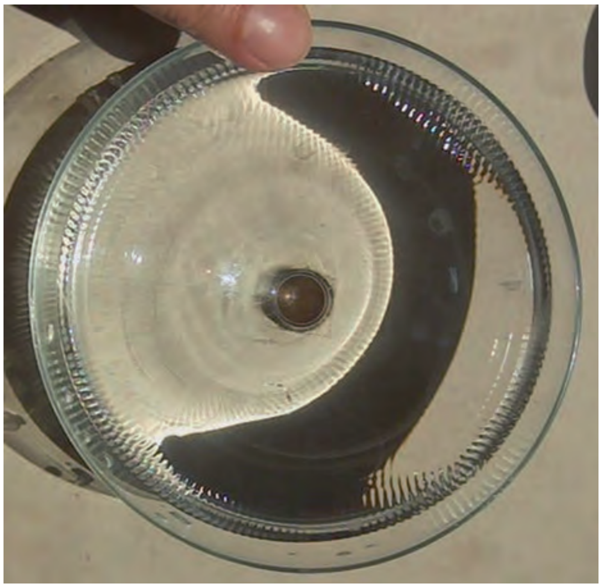

Abb. 1 ***Karreeartig auftretende Randwellen auf der Oberfläche der Flüssigkeit***

stark ausgeprägten Wellen abwechseln. Dieses Randwellenmuster ist allerdings nicht feststehend, sondern folgt dem über den Glasrand streichenden Finger. Es liegt nahe, diese Erscheinung so zu deuten, dass das Glas an den Stellen hin- und herschwingt, an denen diese Wellen auftreten und dazwischen in Ruhe bleibt (Abbildung 2). Die Schwingung des Glases teilt sich nicht nur dem Wein, sondern auch der Luft mit und gelangt auf diese Weise als feiner Ton an unser Ohr.

Übliche (leere) Weingläser lassen sich in einem weiten Bereich um 1000 Hz anregen, wie man beispielsweise durch Vergleich mit einem entsprechenden Klavierton leicht feststellen kann (Quantitative Abschätzung siehe Infokasten: „Resonanzfrequenz").

Diese Weinglasschwingung, die übrigens schon aufgrund der Form des Glases der Schwingung einer Glocke sehr ähnlich ist, lässt sich im Falle des Anschlagens mit ei-

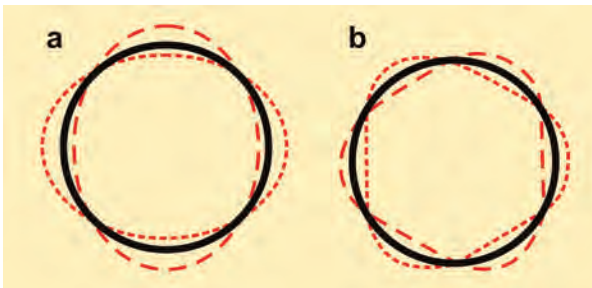

Abb. 2 ***Schwingungsmoden des Glases (stark übertrieben gezeichnet. a) Grundschwingung, b) Oberschwingung***

nem Löffel leicht erklären: Das Glas wird an einer Stelle etwas „eingedellt“. Elastische Rückstellkräfte veranlassen die Glaswand, in die Ausgangslage zurückzuschwingen. Dabei schießt sie – aus Trägheit – etwas über das Ziel hinaus, führt zu einer Auslenkung des Glases nach außen, bewegt sich wieder zurück usw. Obwohl man kaum in der Lage sein dürfte, das Glas immer wieder auf dieselbe Weise anzuschlagen, entsteht doch jedes Mal derselbe Ton. Zwar werden beim Anschlagen unterschiedliche Verformungen hervorgerufen, die jeweils wellenförmig über die Oberfläche des Glases laufen; aber nur Wellen passender Länge können zu einer (quasi-) stationären Schwingung der Glaswand beitragen. Diese Wellen werden durch Resonanz verstärkt, alle anderen werden gedämpft und verschwinden.

Das einfachste Muster einer solchen stationären Schwingung hat die Form eines Karrees, bei der der Rand des Glases abwechselnd zueinander senkrechte, elliptische Verformungen durchläuft (Abbildung 2a). Natürlich sind weitere auf den Glasrand passende Schwingungsmuster denkbar und treten insbesondere beim Anschlagen des Glases auch tatsächlich auf (Abbildung 2b, Oberschwingung). Diese stationären Schwingungen bleiben natürlich nicht an einer bestimmten Stelle, sondern laufen dem über den Rand streichenden, die Schwingung anregenden Finger hinterher, wie an den Wellen auf der Flüssigkeitsoberfläche gut zu sehen ist.

Schwieriger ist die Tonerzeugung im Falle des sanften Reibens zu verstehen. Setzt man den feuchten Finger auf den glatten Glasrand und versucht, ihn unter leichtem Druck in Bewegung zu versetzen, so bemerkt man, wie der Finger wegen der Haftreibung zwischen Glas und Finger zunächst „hängenbleibt“ und eventuell das Glas ein wenig tangential auslenkt. Mit zunehmender Zugkraft wird die Haftreibungskraft überwunden. Der Finger beginnt zu gleiten, und das ausgelenkte Glas schwingt aufgrund der elastischen Rückstellkraft zurück. Dadurch wird der Wert der Haftreibungskraft unterschritten, der Finger bleibt erneut „hängen“, und der Vorgang kann sich wiederholen: In einem subtilen Wechselspiel von Haften und Gleiten (Slip and Stick) [3] gerät der über den Glasrand geschobene Finger gewissermaßen ins „Stottern“ und ruft Schwingungen hervor, die sich wellenartig über die Glaswand ausbreiten. Obwohl das System stottert, vermag es sich auf eindrucksvolle Weise verständlich zu machen: Wie beim Anschlagen des Weinglases werden durch Resonanz nur jene Frequenzen ausgesondert, die zu den Abmessungen des Weinglases passen und sich als charakteristischer Weinglaston Gehör verschaffen. Interessanterweise ist der Ton weitgehend unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der der Finger über den Rand streicht.

Im Falle der reibungsbedingten Tonerzeugung bleibt der Ton solange ungedämpft erhalten, wie man durch den „stotternden“ Finger Energie in die Glaswand einspeist. Sobald der Ton erklingt, spürt man diese Energieübertragung gewissermaßen körperlich: Irgendwie „rastet“ der über den Glasrand fahrende Finger ein und erfährt einen gleichbleibenden Widerstand, so lange der Ton erklingt.

Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, dass sich das von Schülern so gefürchtete Quietschen von Kreide auf der Wandtafel, das Knarren und Quietschen nicht geölter Türangeln, aber auch das Anstreichen der Geigensaiten mit dem Geigenbogen demselben Mechanismus verdanken. Auch wenn es sich nach unseren Erfahrungen nicht gerade empfiehlt, dies an einem weinseligen Abend zu tun, reizt

RESONANZFREQUENZ

Zu einer groben quantitativen Abschätzung der Resonanzfrequenz f eines Grogglases kommt man, wenn man sich dieses als einen Zylinder vom Radius r vorstellt, der aus einer Platte gebogen wurde (Die Zylinderform wird durch ein Grogglas besser erfüllt als durch ein Weinglas.) In einer Platte pflanzt sich die Biegewelle näherungsweise mit einer Geschwindigkeit von

$$v = f\lambda = \sqrt{\frac{\pi u f d}{\sqrt{3}}}$$

fort, wobei f und λ Frequenz und Wellenlänge, u die Schallgeschwindigkeit in der Platte und d die Dicke der Platte darstellen. Im Falle der Grundschwingung beträgt der Umfang des Glases gerade zwei Wellenlängen, $2\lambda = 2\pi r$.

Setzt man dies in die obige Gleichung ein und löst nach f auf, so erhält man

$$f = \frac{ud}{3\pi r^2}$$

Für das von uns benutzte Glas ergibt sich mit d = 1 mm, $2r$ = 61 mm und der Schallgeschwindigkeit in Glas u = 5300 m/s *eine* Resonanzfrequenz

$$f = 1047 \text{ Hz}.$$

Mit Hilfe des Klaviers stellen wir eine perfekte Übereinstimmung des Weinglastons mit dem dreifach gestrichenen Cis, also einer Frequenz von 1109 Hz fest. Im Rahmen der groben Abschätzung erhalten wir also gute Übereinstimmung.

French hat vor einigen Jahren eine detaillierte Ableitung der Theorie für Weingläser gegeben, die „mit einigem Erfolg auf reale Weingläser und andere derartige Gefäße“ [4] angewandt werden können.


18. Ein gemeines Trinck-Glaß pfeiffend und tanzend zu machen.

Wann man ein gemeines Wein-Glaß mit reinem und hellen Waſſer anfüllet, den Zeiger-Finger damit benetzet, und alſo naß auf den Rand des Glaſes herum fähret, wie aus beygehender Figur zu erſehen:

So wird man bald einen hellen Thon hören, gleich einem klingenden Metall, wovon das Waſſer im Glaß dermaſſen beweget, daß es vor Luſt zu tantzen und ſpringen ſcheinet.

Dieſes iſt ein ſehr gemeines Experiment, und wird hin- und wieder von denen Gäſten auf Hochzeiten und Gaſtereyen exerciret, welches auch um ſo viel luſtiger fället, als viele zugleich mit mehrer Gläſern ſolches öffter zu probiren pflegen.

Abb. 3 ***Beschreibung des Phänomens in „Natürliches Zauberbuch“, Nürnberg 1745 (S. 89).***

es, den Glockenklang des Weinglases systematisch zu untersuchen.

Vergleicht man Gläser mit etwa gleicher Wandstärke, so stellt man fest, dass sie umso höher tönen, je kleiner ihr Durchmesser ist. Die Glasrandhöhe spielt dabei kaum eine Rolle. Vergleicht man den Umfang des Glasrandes mit der Länge einer schwingenden Saite, so wird dieses Verhalten verständlich.

Sind gleichartige Gläser mit einer Flüssigkeit gefüllt, so klingen sie umso tiefer, je mehr Flüssigkeit sie enthalten. Da mit der Wandschwingung des Glases Flüssigkeit mitbewegt werden muss, wird durch sie die Trägheit erhöht. Dem Glas fällt es „schwerer“, den Auslenkungen zu folgen. Die Frequenz wird also erniedrigt.

Merkwürdigerweise klingen Gläser gleichen Durchmessers (ohne Flüssigkeit oder mit gleicher Füllhöhe) aber unterschiedlicher Wanddicke umso höher, je dicker sie sind. Man könnte meinen, mit wachsender Dicke nehme ähnlich wie bei der Füllung mit einer Flüssigkeit die Trägheit zu. Dies ist auch gewiss der Fall. Außerdem nimmt aber mit der Dicke die Steifheit des Glases zu. Zunehmende Steifheit erhöht aber, ähnlich wie die zunehmende Spannung einer schwingenden Saite, die Frequenz. Dieser Effekt der Frequenzerhöhung durch zunehmende Steifheit überwiegt offenbar den Effekt der Frequenzabnahme durch zunehmende Trägheit.

An entsprechenden Experimenten scheint es auch in der Vergangenheit nicht gefehlt zu haben. Bereits der Herausgeber eines „Natürlichen Zauberbuches“ aus dem Jahre 1745 sagt: „ *Dieses ist ein sehr gemeines Experiment und wird hin und wieder von denen Gästen auf Gastereyen und Hochzeiten exerciret, welches auch um so viel lustiger fället, als viele zugleich mit mehrer Gläsern solches öffters zu probiren pflegen“* [6].

Literatur und Internet

[1] G. Galileo, Il Saggiatore“ 1623, capitolo 21 (kann über it.wikisource.org/wiki/Il Saggiatore/21 direkt eingesehen werden)

[2] R. E. Apfel, American Journal of Physics **1985**, *53*, 1070.

[3] E. Rabinowicz, Scientific American **1956**, 109.

[4] A. P. French, American Journal of Physics **1983**, *51*, 628.

[5] Ein Video demonstriert eine einfache Melodie mit Weingläsern www.myvideo.de/watch/3562719/Musik_mit_Weinglaesern. Klassische Stücke mit einer ‚Glasharfe‘ werden angeboten unter: www.glasharfe.de

[6] S. Witgeest, Natürliches Zauber-Buch, Nürnberg **1745** (kann über books.google.de direkt eingesehen werden).