

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	<i>IX</i>
1 Einführung	1
1.1 Allgemeines zur Methode der finiten Elemente	1
1.2 Wie überführt man ein Randwertproblem in eine Variationsgleichung?	4
1.2.1 Beispiel 1	4
1.2.2 Beispiel 2	5
2 Grundkonzept	7
2.1 Stetiges und diskretes Problem. Beispiele von finiten Elementen	7
2.1.1 Die Grundzüge der Methode	7
2.1.2 Ein erstes Beispiel und eine theoretische Schwierigkeit	10
2.1.3 Die Lösung: Sobolev-Räume	12
2.1.4 Das erste Beispiel (Fortsetzung)	17
2.1.5 Präzisierung der Grundzüge der Methode	18
2.1.6 Beispiele von finiten Elementen	26
2.2 Der Aufbau des Gleichungssystems	36
2.2.1 Elementmatrizen	36
2.2.2 Die Elementmatrix für eine spezielle Bilinearform und Dreieckelemente vom Typ 1	37
2.2.3 Die Elementmatrix für Dreieckelemente vom Typ 2	43
2.2.4 Die Elementmatrix für Rechteckelemente vom Typ 1 bzw. bilineare Viereckelemente	45
2.2.5 Die Elementmatrix für den Laplace-Operator mit Tetraederelementen	47
2.2.6 Elementmatrix für den Laplace-Operator mit trilinearen Quaderelementen	48
3 Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen	51
3.1 Direkte oder iterative Verfahren?	51
3.2 Direkte Verfahren	53
3.2.1 Der Gaußsche Algorithmus	53
3.2.2 Symmetrische Matrizen. Das Cholesky-Verfahren	58
3.2.3 Weitere direkte Verfahren	60
3.3 Iterative Verfahren	65

3.3.1	Allgemeine Bemerkungen	65
3.3.2	Das Jacobi-Verfahren, das Gauß-Seidel-Verfahren und das Verfahren der sukzessiven Überrelaxation (SOR)	67
3.3.3	Das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG)	71
3.3.4	Vorkonditionierte CG-Verfahren (PCG)	75
3.3.5	Mehrgitterverfahren	80
4	Konvergenzaussagen	85
4.1	Allgemeine Bemerkungen zur Konvergenzproblematik	85
4.2	Ein Beweis einer Fehlerabschätzung für Dreieckselemente vom Typ 1	86
4.2.1	Zurückführung des Konvergenzproblems auf ein Approximationsproblem	86
4.2.2	Die Approximation durch stückweise lineare Funktionen	87
4.2.3	Fehlerabschätzung für Dreieckselemente vom Typ 1	97
4.3	Zusammenfassung der Resultate	99
5	Numerische Integration	107
5.1	Allgemeine Bemerkungen	107
5.2	Der Quadraturfehler für lineare Elemente	108
5.3	Eine Übersicht: passende Integrationsformeln	112
6	Randapproximation. Isoparametrische Elemente	121
6.1	Approximation des Gebietes Ω durch ein Polygon	121
6.2	Isoparametrische Elemente	124
6.3	Randapproximation mit Hilfe isoparametrischer quadratischer Elemente	128
7	Gemischte Verfahren	131
7.1	Ein Strömungsproblem (Stokes-Problem)	131
7.2	Laplace-Gleichung	135
7.3	Biharmonische Gleichung	140
7.3.1	Stetiges und diskretes Problem	140
7.3.2	Formulierung als gemischtes Problem	142
7.4	Lösung der entstehenden Gleichungssysteme	146
8	Nichtkonforme FEM	151
8.1	Laplace-Gleichung	151
8.1.1	Diskretes Problem	151
8.1.2	Konvergenzproblem	156
8.1.3	Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente	158
8.2	Biharmonische Gleichung	164
8.2.1	Stetiges und diskretes Problem	164
8.2.2	Beispiele nichtkonformer finiter Dreieck- und Rechteckelemente	166
8.3	Stokes-Problem	172
9	Nichtstationäre (parabolische) Aufgaben	177
9.1	Das stetige, das semidiskrete und das diskrete Problem	177
9.2	Numerische Integration von Anfangswertaufgaben: eine Übersicht	179

9.3	Die Diskretisierung des semidiskreten Problems mit dem θ -Schema	187
9.4	Eine Gesamtfehlerabschätzung für das θ -Schema	189
10	Gittergenerierung und Gittersteuerung	193
10.1	Erzeugung und Verfeinerung von Dreiecksgittern	193
10.2	Fehlerschätzung und Gittersteuerung	197
10.2.1	Residuale und zielorientierte Fehlerschätzer	198
10.2.2	Schätzer, basierend auf Superkonvergenz und Mittelung	201
Anhang A	Hinweise auf Software und ein Beispiel	205
A.1	Notwendige Files für das MATLAB-Programm <code>fem2d</code>	206
A.2	Einige numerische Ergebnisse	209
	Literaturnachweis	213
	Index	217

