1 Aussagen, Mengen und Funktionen

In diesem und dem folgenden einführenden Abschnitt sollen einige Grundregeln der mathematischen Sprech- und Ausdrucksweise vereinbart werden. Hierzu werden die wichtigsten Begriffe über Aussagen, Mengen und Funktionen sowie später über die Zahlbereiche zusammengestellt. Den Studierenden sollte der Stoff dieser Abschnitte im Wesentlichen von der Schule bekannt sein (mit Ausnahme vielleicht der komplexen Zahlen). Das Augenmerk sollte also hierbei eher auf dem Einüben der Notation liegen.

1.1 Aussagen

Aussagen sind Sätze, die wahr oder falsch sind. Vom Standpunkt der Aussagenlogik, aber auch für das formale Umformen von Aussagen ist nicht der Inhalt einer Aussage von Interesse, sondern ihr **Wahrheitswert**. Ist A eine Aussage, so legen wir fest:

$$\begin{array}{lcll} w(A) = 0 & :\Longleftrightarrow & A & \text{ist falsch} \\ w(A) = 1 & :\Longleftrightarrow & A & \text{ist wahr.} \end{array} \tag{1.1.1}$$

$w(A)$ bezeichnet dabei den Wahrheitswert der Aussage A; das Symbol $:\Longleftrightarrow$ bezeichnet die definierende Äquivalenz, sprachlich: „... wird definiert durch ...“. Wir gehen davon aus, dass es nur zwei Wahrheitswerte gibt (tertium non datur) und dass jede (sinnvolle) Aussage entweder wahr oder falsch ist.

Sind A und B Aussagen, so werden die folgenden **Verknüpfungen** dieser Aussagen betrachtet:

$$\begin{array}{lcll} \neg A & : & \text{„nicht } A\text{“} & \text{(Negation)} \\ A \wedge B & : & \text{„}A \text{ und } B\text{“} & \text{(Konjunktion)} \\ A \vee B & : & \text{„}A \text{ oder } B\text{“} & \text{(Disjunktion)} \\ A \Rightarrow B & : & \text{„aus } A \text{ folgt } B\text{“} & \text{(Implikation)} \\ A \Leftrightarrow B & : & \text{„}A \text{ äquivalent zu } B\text{“} & \text{(Äquivalenz)}\,. \end{array}$$

Definiert werden diese „neuen“ Aussagen durch Festlegung ihrer Wahrheitswerte (in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B):

Tafel (1.1.2): Wahrheitswertetafel

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Man beachte:

(i) $A \vee B$ ist auch wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. $\vee$ beschreibt also das „nicht ausschließende oder“ im Gegensatz zum „entweder ... oder“.

Mathematik für Ingenieure Band 1, 4.Aufl., R. Ansorge, H. J. Oberle, K. Rothe und Th. Sonar

ISBN: 978-3-527-40980-8

(ii) Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die **Prämisse** (das ist die Aussage A) falsch ist.

Mit Hilfe dieser Verknüpfungen lassen sich nun formal weitere Aussagen bilden, wie etwa:

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)\,. \tag{1.1.3}$$

Nun gilt: Die Aussage (1.1.3) ist immer, d.h. unabhängig von den Aussagen A und B, wahr. Solche Aussagen heißen **Tautologien**. Wir überprüfen diese Eigenschaft anhand der zugehörigen Wahrheitswertetafel:

Tafel (1.1.4): Wahrheitswertetafel zu (1.1.3)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	(1.1.3)
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Tautologien lassen sich dazu benutzen, mathematische Aussagen in andere, äquivalente Aussagen umzuwandeln.

Liste häufig verwendeter Tautologien (1.1.5)

(1)	$A \vee \neg A$	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
(2)	$\neg(A \wedge \neg A)$	Satz vom Widerspruch
(3)	$\neg\neg A \iff A$	doppelte Verneinung
(4)	$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$	Regel von de Morgan[1]
(5)	$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$	Regel von de Morgan
(6)	$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Kontraposition
(7)	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$	modus ponens
(8)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	modus tollens
(9)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	modus barbara
(10)	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivgesetz
(11)	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivgesetz

Beispiel (1.1.6)

Zum Nachweis, dass die beiden Regeln von de Morgan (4) und (5) Tautologien sind, stellen wir die zugehörige Wahrheitswertetafel auf.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1

[1] Augustus de Morgan (1806–1871); London

Aussageformen sind Aussagen, die von Variablen abhängen. So ist z.B.

$$A(x,y) \quad :\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2<2$$

eine (zweistellige) Aussageform in den Variablen x,y. Eine Aussageform selbst hat keinen Wahrheitswert. Erst wenn man für die Variablen konkrete Objekte (hier etwa reelle Zahlen) einsetzt, erhält man eine Aussage, die dann wahr oder falsch ist. Für obiges Beispiel ist etwa $A(\frac{1}{2},1)$ eine wahre und $A(-3,2)$ eine falsche Aussage.

Für eine einstellige Aussageform $A(x)$ werden die folgenden Aussagen definiert:

$$\begin{array}{rcl} \forall x:\ A(x) & :\Longleftrightarrow & \textbf{Für alle } x \text{ ist } A(x) \text{ wahr.} \\ \exists x:\ A(x) & :\Longleftrightarrow & \textbf{Es gibt } \text{(wenigstens) ein } x, \text{ so dass } A(x) \text{ wahr ist.} \\ \exists_1 x:\ A(x) & :\Longleftrightarrow & \textbf{Es gibt genau } \text{ein } x, \text{ so dass } A(x) \text{ wahr ist.} \end{array}$$

Die Symbole $\forall$, $\exists$ und $\exists_1$ heißen **Quantoren**.

Die allgemeine Form eines **mathematischen Satzes** ist die Implikation $A \Rightarrow B$.

Dabei heißt A die **Voraussetzung** (**Prämisse**), B die **Behauptung** (**Konklusion**). Man sagt dann auch: B ist eine **notwendige Bedingung** für A und A ist eine **hinreichende Bedingung** für B.

Für den **Beweis** eines mathematischen Satzes $A \Rightarrow B$ wird in der Regel ein so genannter **Kettenschluss** durchgeführt:

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n = B.$$

Eine Begründung hierzu liefert die Tautologie (9) in (1.1.5). Die einzelnen Schlüsse sind dabei einsichtig, sie sind z.B. bereits früher bewiesen worden oder sie folgen unmittelbar aus Axiomen. Diese Form des Beweises heißt **direkter Beweis**.

Beim so genannten **indirekten Beweis** benutzt man die Kontraposition bzw. den modus tollens. Anstelle von $A \Rightarrow B$ beweist man $\neg B \Rightarrow \neg A$ oder: wenn die Behauptung B nicht gilt, so ergibt sich ein Widerspruch zur Voraussetzung A.

Wir betrachten zwei einfache Beispiele für diese Beweisformen:

Satz (1.1.7)

Für eine natürliche Zahl n gilt $\quad n \text{ gerade} \iff n^2 \text{ gerade.}$

Beweis

Wir beweisen die Äquivalenz, indem wir die beiden Implikationen

$$\begin{array}{lrcl} & n \text{ gerade} & \Rightarrow & n^2 \text{ gerade} \\ \text{und} & n \text{ gerade} & \Leftarrow & n^2 \text{ gerade} \end{array}$$

einzeln nachweisen.

$\Rightarrow$**:** (direkter Schluss)

$$\begin{array}{rlcll} n \text{ gerade} & \Rightarrow n & = & 2k, & k \text{ natürliche Zahl,} \\ & \Rightarrow n^2 & = & 4k^2 = 2\,(2k^2) & \\ & \Rightarrow n^2 & \text{ist gerade.} & & \end{array}$$

$\Leftarrow$: (indirekter Beweis)

$$\begin{aligned}
\text{Annahme: } n \text{ ungerade} \;\Rightarrow\; n &= 2k-1, \quad k \text{ natürliche Zahl,}\\
\Rightarrow\; n^2 &= (2k-1)^2\\
&= 4k^2-4k+1\\
&= 2(2k^2-2k)+1\\
\Rightarrow\; n^2 &\text{ ist ungerade,}\\
&\text{ im Widerspruch zur Voraussetzung!}
\end{aligned}$$

■

Wir betrachten ein zweites Beispiel für einen indirekten Beweis. Die äußere Form des Satzes ist dabei etwas anders, da keine Voraussetzung explizit genannt wird. Tatsächlich bilden jedoch die (üblichen) Rechenregeln für natürliche bzw. rationale Zahlen hier die Voraussetzungen.

Satz (1.1.8)

$\sqrt{2}$ ist irrational, d.h., $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ mit n, m natürliche Zahlen darstellen.

Anmerkung

Die klassische geometrische Fragestellung lautet: Sind die „Strecken" 1 und $\sqrt{2}$ kommensurabel (lat.: mit gleichem Maß messbar)?

Oder anders gesagt: Gibt es eine „kleine" Strecke Δ mit

$$1 = m \cdot \Delta \quad \text{und} \quad \sqrt{2} = n \cdot \Delta$$

(m, n natürliche Zahlen)?

Wenn es ein solches Δ gibt, so ist $\Delta = \dfrac{1}{m}$ und damit $\sqrt{2} = n \cdot \Delta = \dfrac{n}{m}$ eine rationale Zahl.

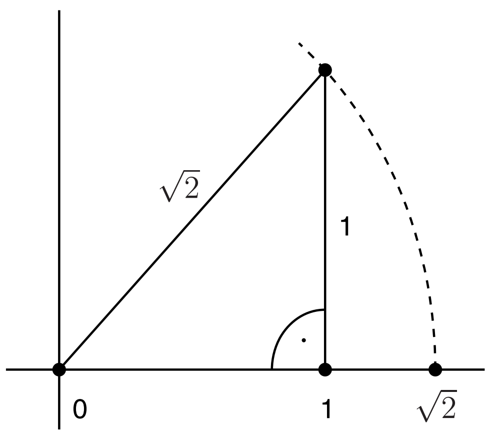

Abb. 1.1. Konstruktion von $\sqrt{2}$

Beweis zu (1.1.8) (indirekt)

Annahme: $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$; n, m natürliche Zahlen. Weiter können wir annehmen, dass der Bruch $\dfrac{n}{m}$ gekürzt ist, d.h., n und m teilerfremd sind.
Es folgt:

$$\begin{array}{cl} & 2m^2 = n^2 \\ \Longrightarrow & n^2 \text{ gerade} \\ \underset{(1.1.7)}{\Longrightarrow} & n \text{ gerade, etwa } n = 2k, \;\; k \text{ natürliche Zahl.} \end{array}$$

Dies in obige Gleichung eingesetzt liefert:

$$\begin{array}{cl} & 2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \\ \Longrightarrow & m^2 = 2k^2 \\ \Longrightarrow & m^2 \text{ gerade} \\ \underset{(1.1.7)}{\Longrightarrow} & m \text{ gerade.} \end{array}$$

Damit haben wird einen Widerspruch konstruiert zu unserer Voraussetzung, dass n und m teilerfremd sind.
Die Annahme $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ ist also falsch! ■

1.2 Mengen

Wir verwenden den „naiven“ Mengenbegriff nach Georg Cantor[2]. Hiernach ist eine Menge eine „Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen“. Es soll jedoch kritisch angemerkt werden, dass sich hierdurch der Begriff „Menge“ nicht streng definieren lässt; er ist ein Grundbegriff. Der korrekte Weg wäre es, Regeln festzulegen, wie man mit Mengen umzugehen hat. Dies führt auf die axiomatische Mengenlehre nach Ernst Zermelo und David Hilbert[3].

Bezeichnungen

$$\begin{array}{l} A, B, \ldots, M, N, \ldots \text{ Mengen,} \\ a \in M \;\; :\Longleftrightarrow \;\; a \text{ ist Element der Menge } M\,, \\ a \notin M \;\; :\Longleftrightarrow \;\; \neg(a \in M)\,. \end{array}$$

Mengen lassen sich definieren durch:

a) Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$,

b) eine charakterisierende Eigenschaft $A(x)$: $M := \{x \in \Omega : A(x)\}$.

[2] Georg Cantor (1845–1918); Berlin, Halle
[3] Ernst Zermelo (1871–1953); Göttingen, Zürich, Freiburg
David Hilbert (1862–1943); Königsberg, Göttingen

Hierbei bezeichnet $:=$ die definierende Gleichheit („... wird definiert durch ...“), $A(x)$ ist eine Aussageform, die für Objekte (Elemente) aus einem Grundbereich Ω erklärt ist.

Gleichheit (1.2.1)

$$M = N \;:\Longleftrightarrow\; \forall\, x : \; (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Teilmenge (1.2.2)

$$M \subset N \;:\Longleftrightarrow\; \forall\, x : \; (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

Eine Menge, welche kein Element enthält, heißt **leere Menge**; nach (1.2.1) existiert nur eine leere Menge, diese wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Ordnungseigenschaft (1.2.3)

a) $M \subset M$,

b) $M \subset N \wedge N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$,

c) $M \subset N \wedge N \subset P \quad \Rightarrow \quad M \subset P$.

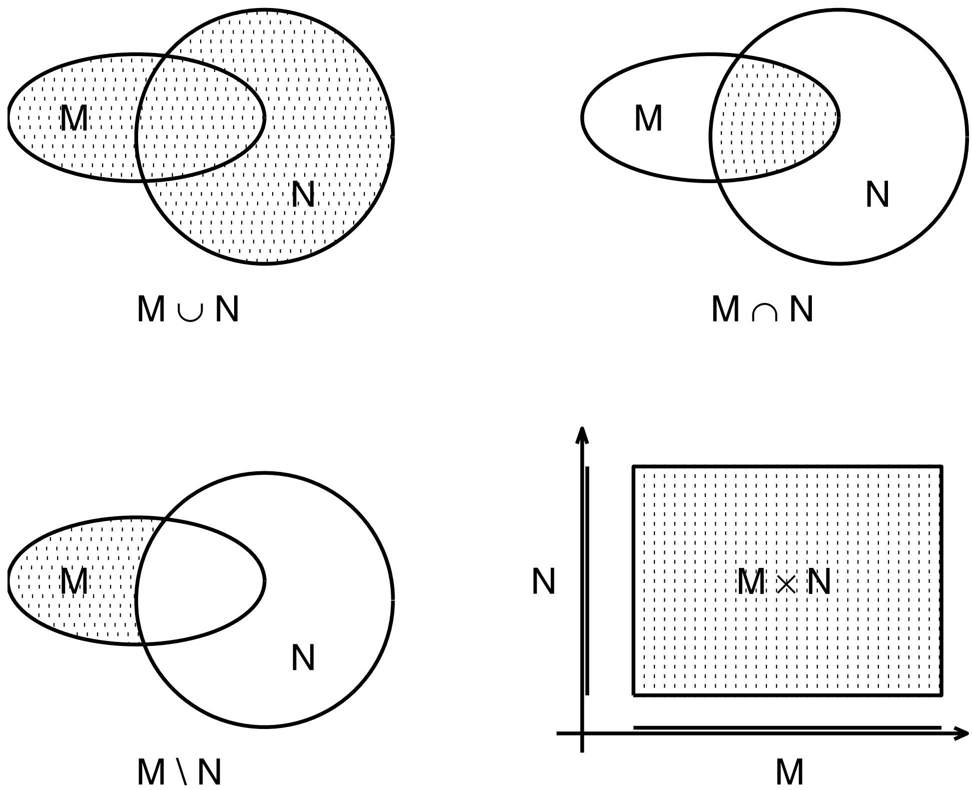

Abb. 1.2. Verknüpfungen von Mengen

Verknüpfungen von Mengen (1.2.4)

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,:\, x \in M \,\vee\, x \in N\} & \text{(Vereinigung)}, \\
M \cap N & := & \{x \,:\, x \in M \,\wedge\, x \in N\} & \text{(Durchschnitt)}, \\
M \setminus N & := & \{x \,:\, x \in M \,\wedge\, x \notin N\} & \text{(Differenz)}, \\
M \times N & := & \{(a,b) \,:\, a \in M \,\wedge\, b \in N\} & \text{(Kartesisches}^4 \text{ Produkt)}, \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,:\, X \,\subset\, M\} & \text{(Potenzmenge)}.
\end{array}
$$

Bemerkungen (1.2.5)

a) Zwei Mengen M, N mit leerem Durchschnitt, d.h., $M \cap N = \emptyset$, heißen **disjunkt**.

b) Die Begriffe Vereinigung, Durchschnitt und Kartesisches Produkt lassen sich unmittelbar auf mehrere Mengen verallgemeinern

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \\
&:= \{a \,:\, \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\}\,, \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \\
&:= \{a \,:\, \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, a \in A_i\}\,, \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,:\, \forall\, i \,:\, a_i \in A_i\}\,.
\end{aligned}
$$

c) Man beachte, dass für geordnete Paare bzw. geordnete n-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \,\wedge\, a_2 = b_2$$

bzw. $$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, x_i = y_i\,.$$

d) Wir geben einige wichtige Beispiele für Kartesische Produkte an. Hierbei und im Folgenden bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, vgl. Abschnitt 2.2.

Die Euklidische Ebene:[5]

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) |\; x, y \in \mathbb{R}\}\,,$$

[4]René Descartes (Cartesius) (1596–1650); Paris, Niederlande
[5]Eukleides bzw. Euklid (um 300 v. Chr.); Alexandria

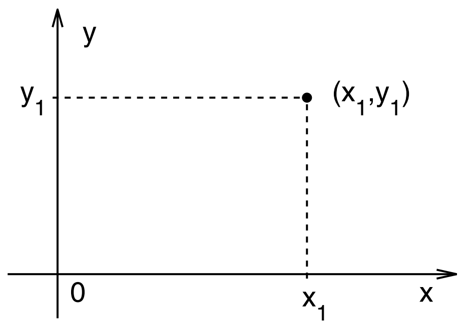

Abb. 1.3. Die Euklidische Ebene

Der dreidimensionale Euklidische Raum:

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z)|\ x,y,z \in \mathbb{R}\},$$

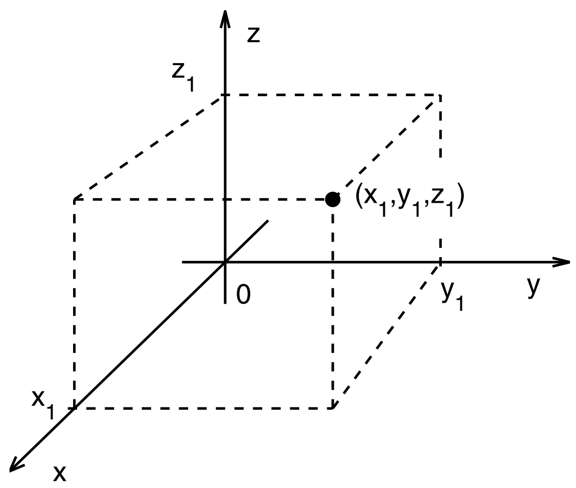

Abb. 1.4. Der dreidimensionale Euklidische Raum

Der n-dimensionale Euklidische Raum:

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{fach}} = \{(x_1,\ldots,x_n)|\ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Beispiele (1.2.6)

a) Kreisfläche: $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$,

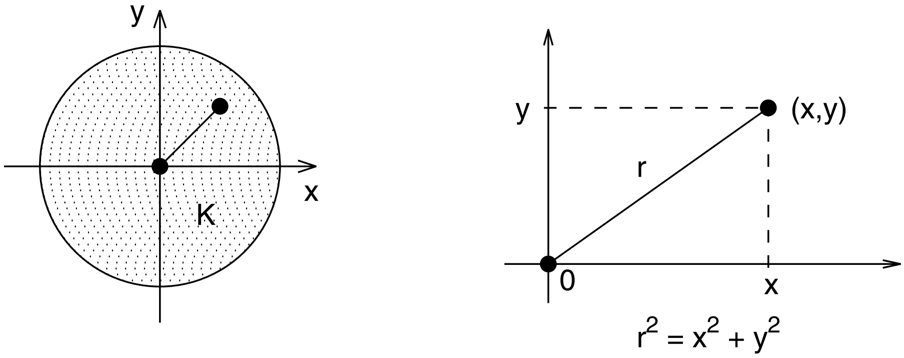

Abb. 1.5. Kreisfläche

b) Streifen: $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$,

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \iff 4 \leq x^2 \leq 16$$
$$\iff 2 \leq x \leq 4 \ \vee \ -4 \leq x \leq -2\,,$$

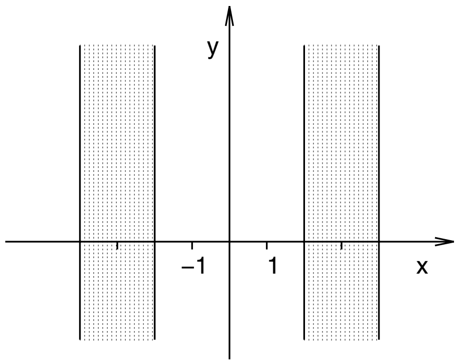

Abb. 1.6. Streifen

c) Für $a \leq b$; $a, b \in \mathbb{R}$ werden Intervalle definiert:

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall,} \\
]a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{offenes Intervall,} \\
[a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \multirow{2}{*}{halboffene Intervalle.} \\
]a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} &
\end{array}$$

d) T-Träger: $T := T_1 \cup T_2$ mit

$$T_1 := \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0]\,, \qquad T_2 := \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]$$

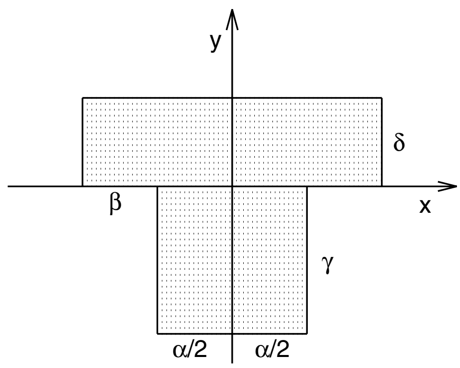

Abb. 1.7. Querschnitt eines T-Trägers

1.3 Funktionen

Seien D und Z Mengen. Unter einer **Funktion** (**Abbildung**) von D in Z verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $y \in Z$ zuordnet. Wir schreiben dann: $f : D \to Z$ und $y = f(x)$ oder $f : x \mapsto y$. Man hat also

$$f : D \to Z \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in D : \exists_1\, y \in Z : y = f(x)\,. \tag{1.3.1}$$

D heißt **Definitionsbereich**, Z heißt **Zielmenge** oder **Bildbereich** von f. Die Menge

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset D \times Z \tag{1.3.2}$$

heißt der **Graph** der Funktion f.

Zu $A \subset D$ heißt

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \tag{1.3.3}$$

das **Bild** von A unter der Funktion f. Zu $B \subset Z$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\} \tag{1.3.4}$$

das **Urbild** von B unter der Funktion f.

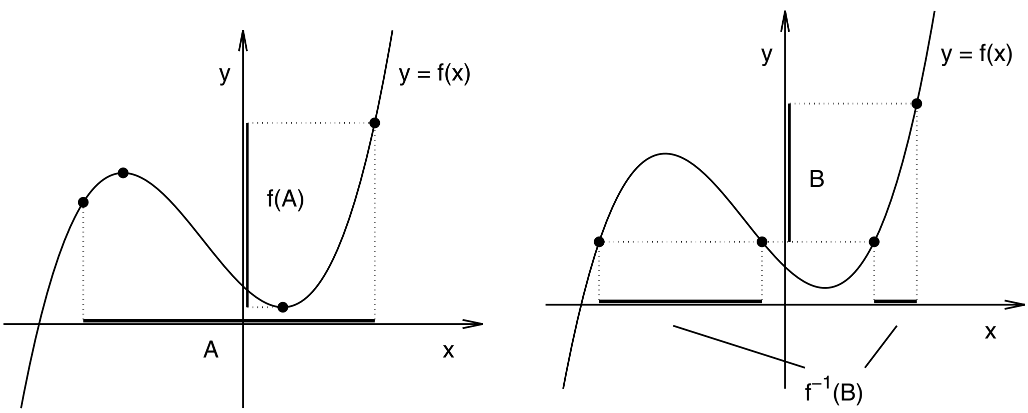

Abb. 1.8. Bild und Urbild einer Funktion $y = f(x)$

Im Zusammenhang mit Funktionen tritt häufig das Problem der **Lösung bzw. Lösbarkeit von Gleichungen** auf, d.h., zu gegebenem $y \in Z$ wird eine Lösung $x \in D$ der Gleichung $f(x) = y$ gesucht.

Wir sagen:

$f: D \to Z$ heißt **surjektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ *wenigstens* eine Lösung $x \in D$ besitzt, falls also gilt

$$\forall y \in Z\ \exists x \in D\ :\ y = f(x); \tag{1.3.5}$$

$f: D \to Z$ heißt **injektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ *höchstens* eine Lösung $x \in D$ besitzt, also

$$\forall x_1,\, x_2 \in D:\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2). \tag{1.3.6}$$

Schließlich heißt eine Funktion $f: D \to Z$ **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist. Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt dann also zu jedem $y \in Z$ genau eine Lösung $x \in D$.

Injektive Funktionen $f: D \to Z$ lassen sich invertieren; zu jedem $y \in f(D)$ existiert nämlich genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$.

Durch die Zuordnung $y \mapsto x$ wird die **Umkehrfunktion** $f^{-1}: f(D) \to D$ definiert. Ist f sogar bijektiv, so hat man also

$$D \ \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \ D\,.$$

Ist f eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen, gilt also $D, Z \subset \mathbb{R}$, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus den Graphen von f durch Spiegelung an der Diagonalen $y = x$, wobei dann aber wieder x die unabhängige Variable bezeichnet.

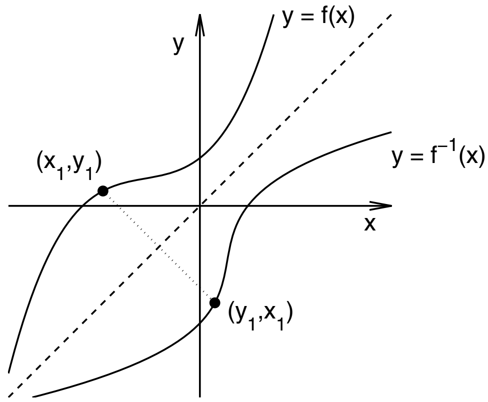

Abb. 1.9. Konstruktion der Umkehrfunktion

Eine wichtige Verknüpfung von Funktionen ist die **Hintereinanderausführung** bzw. **Komposition**.

Dazu seien $f : D \to Z$ und $g : Z \to P$ Funktionen. Dann definiert man die Komposition $g \circ f$ (merke: erst $f(x)$ berechnen, danach $g(f(x))$!!) durch

$$g \circ f : D \to P, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)), \tag{1.3.7}$$

$$D \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} P\,. \qquad \underset{g \circ f}{\longrightarrow}$$

Bemerkung (1.3.8)
Die Komposition von Funktionen ist eine assoziative Operation, sie ist jedoch i. Allg. nicht kommutativ, d.h., es gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

denn: $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$, jedoch gilt i. Allg.:

$$g \circ f \neq f \circ g\,.$$

Die letzte Aussage lässt sich etwa durch das folgende **Gegenbeispiel** belegen

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & f(x) := x^2 + 2x\,, \\ g :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & g(y) := y + 1\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2\,, \\ (f \circ g)(y) &= (y+1)^2 + 2y + 2\,, \end{aligned}$$

also ist $f \circ g \neq g \circ f$.

Bemerkung (1.3.9)
Die Menge der bijektiven Funktionen einer Menge D auf sich

$$S(D) := \{f : D \to D : f \text{ bijektiv}\}$$

bildet bezüglich der Komposition von Funktionen eine **Gruppe**, die so genannte **symmetrische Gruppe** von D, d.h., es gelten:

$$\begin{array}{llll} \text{(G1)} & h \circ (g \circ f) & = (h \circ g) \circ f & \text{(Assoziativgesetz)}, \\ \text{(G2)} & f \circ \mathrm{id}_M & = \mathrm{id}_M \circ f = f & \text{(neutrales Element)}, \\ \text{(G3)} & f \circ f^{-1} & = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D & \text{(inverses Element)}. \end{array}$$

Dabei ist id_D die **Identität**, $\mathrm{id}_M(x) := x$, und f^{-1} die zu f inverse Funktion.

Im Folgenden stellen wir einige Eigenschaften elementarer reeller Funktionen zusammen. Eine genauere Herleitung wird an späterer Stelle nachgeliefert. Man vergleiche hierzu den Abschnitt 11.3.

Einige elementare Funktionen

a) Affin-lineare Funktion (Gerade)

$$y \;=\; f(x) \;=\; a_1 x + a_0 \,. \tag{1.3.10}$$

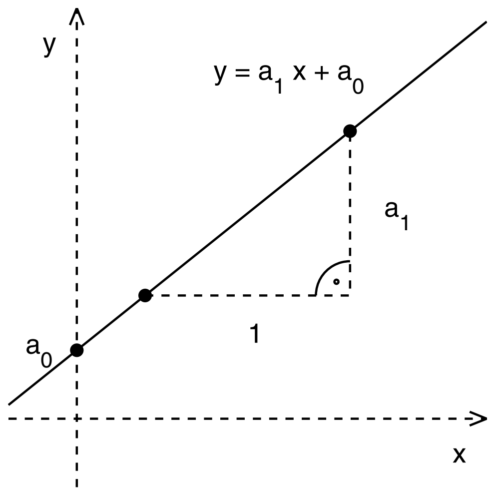

Abb. 1.10. Gerade im $\mathbb{R}^2$

b) Polynome

$$y \;=\; f(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,. \tag{1.3.11}$$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** des Polynoms.

c) Exponentialfunktion

$$y \;=\; f(x) \;=\; a^x, \qquad a > 0 \quad \text{Basis.} \tag{1.3.12}$$

Funktionalgleichung:

$$a^{x+y} \;=\; a^x \cdot a^y \,. \tag{1.3.13}$$

Es gibt genau eine Zahl $\mathrm{e} > 1$, so dass für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ gilt: $f'(0) = 1$. Diese Zahl e heißt die **Eulersche Zahl**[6].
Es gilt (vgl. Abschnitt 11.3) :

$$\mathrm{e} \;=\; 2.7182\,81828\,45904\,52353\ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \,. \tag{1.3.14}$$

d) Logarithmus

Die Logarithmus-Funktion

$$y \;=\; \log_a x, \qquad a > 0\,,\; a \neq 1 \quad \text{Basis,} \tag{1.3.15}$$

[6]Leonhard Euler (1707–1783); Basel, Berlin, St. Petersburg

wird als Umkehrfunktion der (injektiven) Exponentialfunktion $y = a^x$ definiert. Insbesondere ist $y = \log_a x$ daher nur für $x > 0$ erklärt.

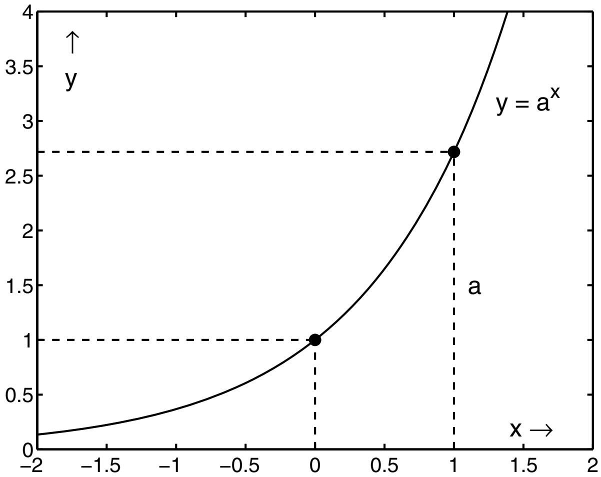

Abb. 1.11. Allgemeine Exponentialfunktion (für $a > 1$)

Funktionalgleichung:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y . \tag{1.3.16}$$

Wählt man als Basis für den Logarithmus die Eulersche Zahl $a = \mathrm{e}$, so erhält man den so genannten **natürlichen Logarithmus** $y = \ln x$. Es gilt somit:

$$\ln 1 = 0 , \quad \ln \mathrm{e} = 1 .$$

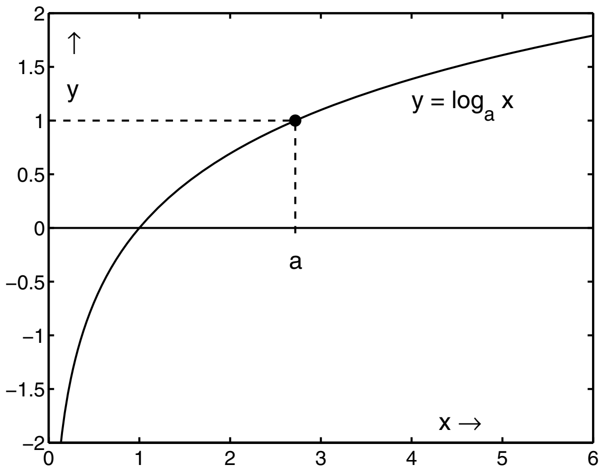

Abb. 1.12. Allgemeiner Logarithmus (für $a > 1$)

e) Trigonometrische Funktionen

Die Koordinaten eines Punktes $P = (x_P, y_P)$ auf dem Einheitskreis werden in Abhängigkeit vom Winkel x mit $x_P = \cos x$, $y_P = \sin x$ bezeichnet. Hierdurch sind die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert. Der Winkel x wird dabei im Bogenmaß gemessen ($=$ Länge des Kreissegments von $(1,0)$ bis zum Punkt P), also:

$$0° \;\widehat{=}\; x = 0, \qquad 45° \;\widehat{=}\; x = \frac{\pi}{4}, \qquad 90° \;\widehat{=}\; x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{usw.}$$

Dabei bezeichnet π die **Kreiszahl**

$$\pi = 3.1415\,92653\,58979\,32384\ldots\ ^{7} \tag{1.3.17}$$

Ferner bezeichnet $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck (Strahlensatz).

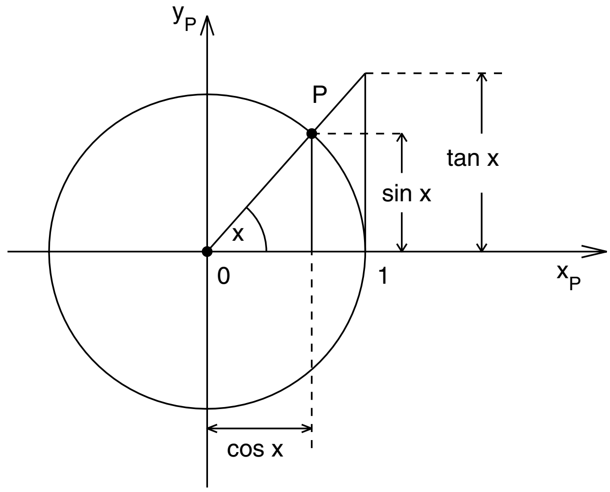

Abb. 1.13. Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Es gelten:

(i) $$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,,}$$

(ii) $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x\,,$

(iii) $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,,$

(iv)

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

, (1.3.18)

[7] Ferdinand von Lindemann (1852–1939); Erlangen, Würzburg, Freiburg, Königsberg und München; er bewies 1882 die Transzendenz der Kreiszahl π.

(v) *Funktionalgleichung* **(Additionstheoreme)**:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y \,, \\ \cos(x+y) &= \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y \,. \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

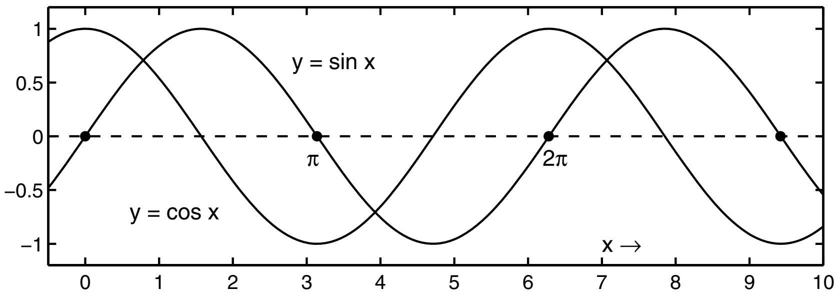

Abb. 1.14. Trigonometrische Funktionen

Beweis zu (v) (elementargeometrisch)
Aus Abb. 1.15 liest man ab

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \frac{AE}{OE} = \frac{BD}{OE} + \frac{CE}{OE} = \frac{BD}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} + \frac{CE}{ED} \cdot \frac{ED}{OE} \\ &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \,, \\ \cos(x+y) &= \frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OE} - \frac{CD}{OE} = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} - \frac{CD}{ED} \cdot \frac{ED}{OE} \\ &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \,. \end{aligned}$$

■

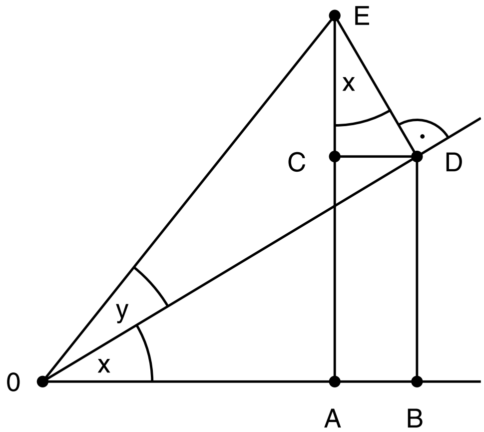

Abb. 1.15. Zu den Additionstheoremen