Lösungen: 18 Potential und Spannung

18–7 Kathodenstrahlröhre mit Ablenkkondensatoren

Bemerkungen: Bei der Berechnung der Elektronenbahnen werden folgende Näherungen gemacht:

- Das elektrische Feld wird zwischen den Platten des Ablenkkondensators als konstant und außerhalb als null angenommen. In der extrem kurzen Zeit, in der ein schnelles Elektron durch den Ablenkkondensator fliegt, ist die angelegte Spannung (nahezu) konstant.
- Der Schirm wird nicht als gewölbt, sondern als eben angenommen.
- Wir rechnen mit den bekannten Gln. der nichtrelativistischen Mechanik, obwohl die Elektronen durch die Anodenspannung auf etwa 30% der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden (siehe Beispiel 20.2–1).
- Die thermischen Geschwindigkeiten der Elektronen nach Verlassen der Kathode werden vernachlässigt gegenüber den Geschwindigkeiten beim Erreichen der Anode. Kleine vertikale Geschwindigkeiten vor dem Erreichen des Ablenkkondensators werden ebenfalls vernachlässigt. Natürlich wird auch die extrem kleine Gravitationskraft auf die leichten Elektronen außer Acht gelassen.

Auf dem Weg zur Anode werden die Elektronen auf die horizontale Geschwindigkeit

$$v_x \underset{\text{Gl. (18.2–5)}}{=} \sqrt{\frac{2\,e_0\,U_{\text{Anode}}}{m_\text{e}}} \tag{1}$$

beschleunigt. Anschließend werden die Elektronen im Plattenkondensator durch das (nahezu) konstante elektrische Feld $E = U_{\text{Ablenk}}/d$ gleichförmig nach oben oder unten beschleunigt. Daher kann die Bewegung der Elektronen im Plattenkondensator mit der reibungsfreien Bewegung massiver Körper im homogenen Schwerefeld verglichen werden. Nach den bekannten Gln. für gleichförmig beschleunigte Bewegungen sind am Ende des Plattenkondensators die vertikale Geschwindigkeit

$$v_y = a\,t = \frac{e_0\,E}{m_\text{e}}\,\frac{b}{v_x}$$

die vertikale Auslenkung

$$s_{\text{Ab}} = \frac{a}{2}\,t^2 = \frac{e_0\,E}{2\,m_\text{e}}\left(\frac{b}{v_x}\right)^2$$

und der Tangens des Richtungswinkels α

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e_0\,E\,b}{m_\text{e}\,v_x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad s_{\text{Bild}} = s_{\text{Ab}} + l\tan\alpha = \frac{e_0\,E}{m_\text{e}\,v_x^2}\,b\left(\frac{b}{2} + l\right)$$

Mit $E = U_{\text{Ablenk}}/d$ und mit Gl. (1) folgt

$$s_{\text{Bild}} = \frac{1}{2\,d}\,\frac{U_{\text{Ablenk}}}{U_{\text{Anode}}}\,b\left(\frac{b}{2}+l\right)$$

Die Ablenkung s_{Bild} ist direkt proportional zur Ablenk-Spannung U_{Ablenk}.

Bemerkung: Die lineare Abbildung mit $s_{\text{Bild}} \sim U_{\text{Ablenk}}$ ist nur gewährleistet, wenn sich die Ablenk-Spannung U_{Ablenk} während der Anwesenheit der Elektronen im Plattenkondensator nicht wesentlich ändert. Schnelle Oszillographen verwenden daher hohe Beschleunigungsspannungen U_{Anode} und Platten mit kleiner Breite *b*. So können noch Vorgänge mit Grenzfrequenzen bei $1-2\,\text{GHz}$, d. h. Vorgänge im Nanosekunden-Bereich dargestellt werden.

Lösungen: 19 Kondensatoren

19–2 Kugelkondensator

a) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{-\int_{r_2}^{r_1} E\,dr}$$

Wir integrieren radial von außen nach innen, um eine *positive* Spannung U zu erhalten. Mit Gl. (17.4–8) für $E(r)$ finden wir

$$C = \frac{Q}{-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{r^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{1}$$

b) Für $r_2 \to \infty$ ergibt sich die Kapazität einer Kugel zu $C_{\text{Kugel}} = 4\pi\varepsilon_0 r_1$. (2)

c) $C_{\text{Erde}} = 710\ \mu\text{F}$

19–5 Kondensator mit leicht geneigter Platte

a) Da der Plattenabstand $d(x) = d_0 + (d_1 - d_0)\,x/a$ nicht konstant ist, kann die Gl. $C = \varepsilon_0 A/d$ nicht direkt angewendet werden. Wir betrachten je einen schmalen Streifen in y-Richtung auf der unteren und oberen Platte. Die Streifen mit Länge b, infinitesimaler Breite dx und Koordinate x haben an der ganzen Kapazität den Anteil [1]

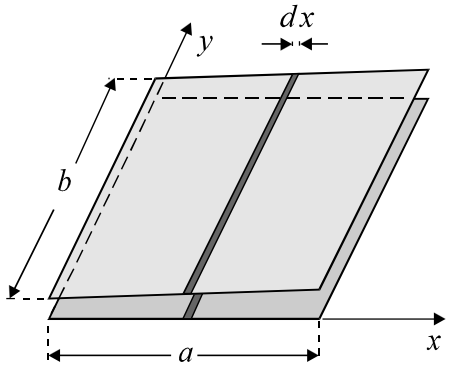


Abb. 1 Der Streifen der Breite dx liefert den Beitrag dC zur Kapazität.

$$dC = \frac{\varepsilon_0\,dA}{d(x)} = \frac{\varepsilon_0\,b\,dx}{d_0 + \frac{d_1 - d_0}{a}\,x}$$

$$\Rightarrow \qquad C = \varepsilon_0\,b\int_0^a \frac{dx}{d_0 + \frac{d_1 - d_0}{a}\,x} =$$

$$= \varepsilon_0\,b\,\frac{a}{d_1 - d_0}\ln\left(d_0 + \frac{d_1 - d_0}{a}\,x\right)\Bigg|_0^a = \frac{\varepsilon_0\,a\,b}{d_1 - d_0}\ln\frac{d_1}{d_0}$$

---

[1] In Unterkapitel 19.1 wurde betont, dass nur solche Plattenkondensatoren berechnet werden können, bei denen die Plattenlänge und –breite viel größer sind als der Plattenabstand d. Nur so konnten wir Randeffekte vernachlässigen.

Hier hingegen betrachten wir einen Plattenkondensator mit infinitesimaler Breite dx. Das ist erlaubt, weil hier sehr viele Kondensatoren direkt nebeneinander stehen, so dass keine Randeffekte auftreten.

b) $$C = \frac{\varepsilon_0\, a\, b}{\Delta d}\, \ln\frac{d_0 + \Delta d}{d_0} = \frac{\varepsilon_0\, a\, b}{\Delta d}\, \ln\left(1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylorentwicklung} \\ \text{für } \Delta d \ll d_0}}{\approx}$$

$$\approx \frac{\varepsilon_0\, a\, b}{\Delta d}\, \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{\varepsilon_0\, a\, b}{d_0}$$

Lösungen: 20 Elektrischer Strom

20–2 Widerstand einer Kugelschale

In der Gl. $R = \rho\, l/A$ ist l die Länge des Weges, den der Strom zurücklegt, und A die *konstante* Fläche, die der Strom senkrecht durchfließt.

Beim Anlegen einer Spannung an beide Metallkörper fließt ein Strom durch den Isolator in *radiale* Richtung. Da die senkrecht vom Strom durchflossene Querschnittsfläche $A(r) = 4\pi r^2$ nicht konstant ist, sondern von innen nach außen monoton mit dem Radius r zunimmt, kann die Gl. $R = \rho\, l/A$ nicht direkt angewendet werden. Der Isolator muss wie eine Zwiebel in dünne Schichten mit infinitesimaler Dicke dr und Flächen $4\pi r^2$ zerlegt werden. Jede Schicht setzt dem in radiale Richtung fließenden Strom den Widerstand

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

entgegen. Da der ganze Isolator eine Reihenschaltung der dünnen Zwiebelschichten ist, müssen die Widerstände dR summiert bzw. integriert werden. Der gesamte Widerstand des Isolators für Ströme in radiale Richtung ergibt zu

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{\rho}{4\pi}\frac{r_2 - r_1}{r_2\, r_1}$$

Für $d := r_2 - r_1 << r_1$, also für eine sehr dünne Kugelschale folgt wie erwartet $R \approx \rho\, d/(4\pi r_1^2)$.

20–6 Schaltung mit Widerständen

a) Knoten- und Maschenregel liefern sechs Gln. für die sechs Unbekannten $I, I_1, \ldots I_5$. Drei Knotengln. lauten:

$$I = I_1 + I_3 \tag{1}$$

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 \qquad\qquad I_5 = I_2 - I_1 \tag{2/3}$$

Bemerkung: Weitere Knotengln. wie z. B. $I_5 = I_3 - I_4$ oder $I = I_2 + I_4$ hängen von den drei Gln. (1/2/3) ab und sind daher nicht unabhängig von diesen.

Drei Maschengln. lauten:

Linke Masche : $\qquad R_1\, I_1 - R_5\, I_5 - R_3\, I_3 = 0 \tag{4}$

Rechte Masche : $\qquad R_2\, I_2 - R_4\, I_4 + R_5\, I_5 = 0 \tag{5}$

Große Masche, oben herum: $\qquad R_1\, I_1 + R_2\, I_2 - U = 0 \tag{6}$

b) $\qquad I_1 = \dfrac{1 + a + b\,(1+a)}{1 + 3\,a + 2\,b\,(1+a)}\,\dfrac{U}{R} \qquad\qquad I_2 = \dfrac{2\,a + b\,(1+a)}{1 + 3\,a + 2\,b\,(1+a)}\,\dfrac{U}{R}$

$$I_3 = \frac{1 + a + 2\,b}{1 + 3\,a + 2\,b\,(1 + a)}\,\frac{U}{R} \qquad I_4 = \frac{2\,(1 + b)}{1 + 3\,a + 2\,b\,(1 + a)}\,\frac{U}{R}$$

$$I_5 = \frac{a - 1}{1 + 3\,a + 2\,b\,(1 + a)}\,\frac{U}{R} \qquad I = \frac{2\,b + (1 + a)\,(2 + b)}{1 + 3\,a + 2\,b\,(1 + a)}\,\frac{U}{R}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Für $b \to \infty$ folgt: $I_1 = I_2 = \dfrac{U}{2\,R}$ $\quad I_3 = I_4 = \dfrac{1}{1 + a}\,\dfrac{U}{R}$ $\quad I_5 = 0$ $\quad I = \dfrac{3 + a}{2 + 2\,a}\,\dfrac{U}{R}$

  Diese Ergebnisse sind einleuchtend und benötigen keine weitere Erklärung.
- Für $b = 0$ folgt: $I_1 = I_3 = \dfrac{I}{2} = \dfrac{1 + a}{1 + 3\,a}\,\dfrac{U}{R}$ $\quad I_2 = \dfrac{2\,a}{1 + 3\,a}\,\dfrac{U}{R}$ $\quad I_4 = \dfrac{2}{1 + 3\,a}\,\dfrac{U}{R}$ $\quad I_5 = \dfrac{a - 1}{1 + 3\,a}\,\dfrac{U}{R}$

  Die Ergebnisse $I_1 = I_3 = I/2$, $I_2 / I_4 = a$ sowie das Vorzeichen von I_5 sind sofort einsichtig.
- Für $a = 1$ folgt: $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \dfrac{I}{2} = \dfrac{U}{2\,R}$ $\quad I_5 = 0$. Auch diese Gln. sind stichhaltig.

20–8 Berechnung von Widerständen

Komplizierte Schaltungen – wie z. B. die in Abb. 20.6–7 dargestellte Schaltung – können natürlich mit der Knotengl. und der Maschengl. berechnet werden. Dieses Vorgehen ist aber wegen der zahlreichen Ströme mühsam; die Schaltung in Abb. 20.6–7 hat 12 Ströme.

Einfacher ist es, nur die Knotengl. zu benutzen und mit *Symmetriebetrachtungen* zu arbeiten.

Wir betrachten Abb. 1 und legen eine Spannung U_{14} an die Punkte 1 und 4. Aus *Symmetriegründen* gilt für die Ströme I_{ij} vom Punkt i zum Punkt j :

$$I_{12} = 2\,I_{23} = I_{34} = \frac{I_{\mathrm{AB}}}{3} \qquad (1)$$

Dabei ist I_{AB} der gesamte Strom von 1 nach 4.

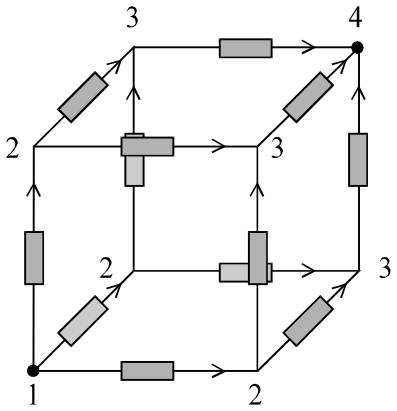


Abb. 1 An die Punkte 1 und 4 wird eine Spannung U_{14} angelegt. Aus Symmetriegründen sind die drei Potentiale in den drei Punkten 2 gleich; die drei Potentiale in den drei Punkten 3 sind ebenfalls gleich.

Ebenfalls aus Symmetriegründen sind die Potentiale φ_2 in den drei Punkten 2 sowie die Potentiale φ_3 in den drei Punkten 3 jeweils gleich groß. Die angelegte Spannung U_{14} zwischen den Punkten 1 und 4 beträgt:

$$U_{14} = U_{12} + U_{23} + U_{34} = R\,I_{12} + R\,I_{23} + R\,I_{34} \underset{\text{Gl. (1)}}{=}$$

$$= \left(R + \frac{1}{2}\,R + R \right) I_{12} = \frac{5}{2}\,R\,\frac{I_{\mathrm{AB}}}{3} = \frac{5}{6}\,R\,I_{\mathrm{AB}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{U_{14}}{I_{\mathrm{AB}}} = \frac{5}{6} R = R_{\mathrm{AB}}$$

Der Gesamt-Widerstand R_{AB} zwischen den Endpunkten der Würfeldiagonalen beträgt also $5\,R/6$.

20–9 Aufladung eines Kondensators

In Abb. 1 treten die sechs Ströme $I, I_1, \ldots I_5$ auf. Sie werden durch sechs Gln. bestimmt. Wegen der vier Knoten existieren drei Knotengln.:

$$I = I_1 + I_2 \tag{1a}$$

$$I_1 = I_3 + I_5 \tag{1b}$$

$$I_4 = I_2 + I_5 \tag{1c}$$

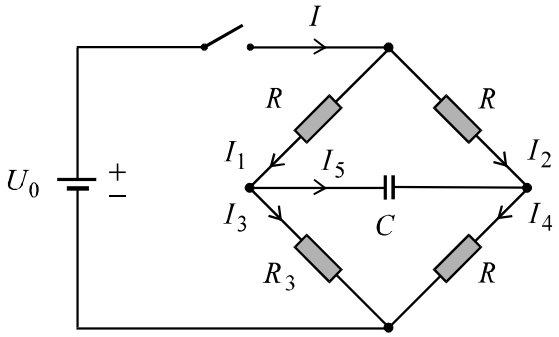


Abb. 1 Sechs Ströme treten im Schaltbild auf.

Drei Maschengln. können aufgestellt werden:

Linke Masche: $R\,I_1 + R_3\,I_3 - U_0 = 0$ (2a)

Obere Masche: $R\,I_2 - \dfrac{Q}{C} - R\,I_1 = 0$ (2b)

Untere Masche: $\dfrac{Q}{C} + R\,I_4 - R_3\,I_3 = 0$ (2c)

Wir setzen die Ströme I_1 und I_4 aus den Gln. (1b/c) in die Gln. (2a/b/c) ein:

$$\left(R + R_3\right) I_3 + R\,I_5 = U_0 \tag{3a}$$

$$R\,I_2 - \frac{Q}{C} - R\,I_3 - R\,I_5 = 0 \tag{3b}$$

$$\frac{Q}{C} + R\,I_2 + R\,I_5 - R_3\,I_3 = 0 \tag{3c}$$

Wir setzen die Ströme I_3 und I_2 aus den Gln. (3a/b) in die Gl. (3c) ein:

$$\frac{2\,Q}{C} + \frac{R - R_3}{R + R_3}\,U_0 + \frac{R^2 + 3\,R\,R_3}{R + R_3}\,I_5 = 0 \tag{4}$$

Ableitung nach der Zeit führt mit $\dot{Q} = I_5$ auf:

$$\frac{2}{C}\,I_5 + \frac{R^2 + 3\,R\,R_3}{R + R_3}\,\dot{I}_5 = 0$$

Separation der Variablen ergibt

$$\frac{dI_5}{I_5} = -\frac{2}{C}\,\frac{R+R_3}{R^2+3RR_3}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{I_5(t)}{I_5(0)} = -\frac{2}{C}\,\frac{R+R_3}{R^2+3RR_3}\,t$$

$$\Rightarrow \qquad I_5(t) = I_5(0)\,\exp\left(-\frac{2}{C}\,\frac{R+R_3}{R^2+3RR_3}\,t\right)$$

Den Anfangsstrom $I_5(0)$ bestimmen wir wie folgt: Zur Zeit $t = 0$ ist der Kondensator nach ungeladen und hat daher auch noch keine Spannung: $U_{\text{Konden.}} = Q/C = 0$. Mit $Q = 0$ gibt Gl. (4)

$$I_5(0) = \frac{R_3 - R}{R^2+3RR_3}\,U_0$$

$$\Rightarrow \qquad I_5(t) = \frac{R_3 - R}{R^2+3RR_3}\,U_0\,\exp\left(-\frac{2}{C}\,\frac{R+R_3}{R^2+3RR_3}\,t\right)$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Das Vorzeichen von I_5 ist richtig. Für $R_3 = R$ verschwindet I_5.
- Der exponentielle Abfall des Stromes $I_5(t)$ dauert um so länger, je größer die Kapazität C ist.
- Nach unendlich langer Zeit hat der Kondensator die Spannung

$$U_{\text{Konden.}}(\infty) = \frac{Q(\infty)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^\infty I_5(t)\,dt = \frac{R_3 - R}{R_3 + R}\,\frac{U_0}{2}$$

Dann fließt kein Strom mehr, so dass man den Kondensator aus der Schaltung herausnehmen kann (siehe Abb. 2). Wenn wir den Punkten 1 und 4 in Abb. 2 die Potentiale $\varphi_1 = U_0$ und $\varphi_4 = 0$ zuordnen, so haben die Punkte 2 und 3 in Abb. 1 die Potentiale

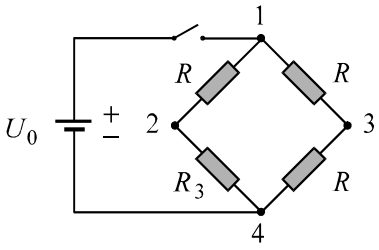


Abb. 2 Nach unendlich langer Zeit kann der Kondensator aus der Schaltung herausgenommen werden.

$$\varphi_2 = \frac{R}{R_3+R}\,U_0 \qquad \varphi_3 = \frac{U_0}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_3 - \varphi_2 = \frac{R_3 - R}{R_3 + R}\,\frac{U_0}{2}$$

(Siehe auch Aufgabe „20–4 Wheatstonesche Brücke“.) Diese Potentialdifferenz ist genauso groß, wie die zuvor berechnete Spannung $U_{\text{Konden.}}(\infty)$.

20–10 Gebogener Leiter

Gl. (20.2–5) $R = \rho\,l/A$ kann nicht direkt angewendet werden, weil die innen fließenden Ströme einen kürzeren Weg l zurücklegen als die außen fließenden Ströme. Daher müssen wir den gebogenen Stab in sehr dünnwandige, kreisförmig gebogene Stäbchen zerlegen, deren Leitwerte sich wegen ihrer Parallelschaltung addieren.

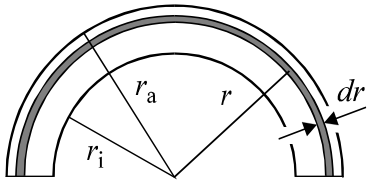


Abb. 1 Die infinitesimalen elektrischen Leitwerte dünnwandiger, gebogener Stäbe werden addiert.

In dem dünnwandigen, gebogenen Stäbchen, das die Dicke dr hat und in Abb. 1 dunkel dargestellt wird, muss der

Strom die Strecke $l = \pi r$ zurücklegen. Die Querschnittsfläche $dA = b\,dr$ des Stäbchens ragt die Höhe b aus der Papierebene heraus und wird senkrecht vom Strom durchflossen. Der elektrische Leitwert des dünnwandigen Stäbchens in Abb. 1 beträgt

$$dG = \frac{b\,dr}{\rho\,\pi\,r}$$

Durch Integration ergibt sich der gesamte elektrische Leitwert:

$$G = \frac{b}{\rho\,\pi}\int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \frac{dr}{r} = \frac{b}{\rho\,\pi}\ln\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{1}{G} = \frac{\rho\,\pi}{b\ln\dfrac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Für einen dünnen gebogenen Leiter mit $d := r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i} << r_\mathrm{i}$ folgt die Gl. (20.2–5):

$$R = \frac{\rho\,\pi}{b\ln\dfrac{r_\mathrm{i}+d}{r_\mathrm{i}}} = \frac{\rho\,\pi}{b\ln\left(1+\dfrac{d}{r_\mathrm{i}}\right)} \underset{\substack{\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon \\ \text{für } \varepsilon<<1}}{\approx} \rho\,\frac{\pi\,r_\mathrm{i}}{b\,d} \;\hat{=}\; \rho\,\frac{\text{Weg}}{A}$$

20–12 Auf- und Entladungen

a) Lange Zeit nach dem Schließen des Schalters fließt kein Strom mehr, so dass der Kondensator Nr. 1 keine Ladung mehr trägt (sie würde über den ohmschen Widerstand abfließen).

Folglich müssen die Kondensatoren Nr. 2 und 3 nach unendlich langer Zeit jeweils die Spannung $U_0/2$ und die Ladung $Q_\infty = C\,U_0/2$ haben. D. h.: Nach dem Schließen des Schalters entleert sich der Kondensator Nr. 1 und die Kondensatoren Nr. 2 und 3 laden sich weiter auf.

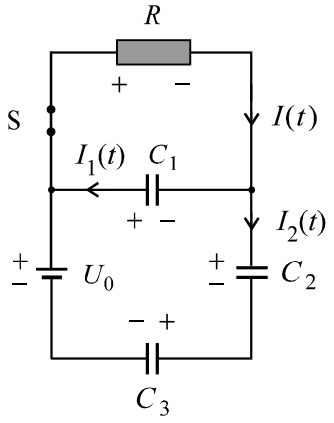


Abb. 1 Technische Ströme nach dem Schließen des Schalters S.

b) Knotengl. : $I = I_1 + I_2$ (1)

Die zwei Maschengln. lauten:

$$\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{C} + \frac{Q_3}{C} - U_0 \underset{\substack{\uparrow \\ Q_2 = Q_3}}{=} \frac{Q_1}{C} + \frac{2\,Q_2}{C} - U_0 = 0 \qquad (2a)$$

$$R\,I - \frac{Q_1}{C} = 0 \qquad (2b)$$

Mit $\dot{Q}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kondensatorentleerg.}}}{=} -I_1 \qquad \dot{Q}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kondensatoraufladg.}}}{=} I_2$

führen Zeitableitungen der Gln. (2a) und (2b) auf

$$-\frac{I_1}{C} + \frac{2\,I_2}{C} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = 2\,I_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (1)}}}{=} \frac{2}{3}\,I \qquad (3)$$

und $$R\,\dot{I} + \frac{I_1}{C} \underset{\text{Gl. (3)}}{=} R\,\dot{I} + \frac{2\,I}{3\,C} = 0$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{dI}{I} = -\frac{2\,dt}{3\,R\,C} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI'}{I} = -\frac{2}{3\,R\,C}\int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \qquad I(t) = I(0)\,\exp\left(-\frac{2\,t}{3\,R\,C}\right)$$

Zur Zeit $t = 0$ liegt am ohmschen Widerstand die Spannung $U_0/3$ an, so dass $I(0) = U_0/(3\,R)$.

$$\Rightarrow \qquad I(t) = \frac{U_0}{3\,R}\,\exp\left(-\frac{2\,t}{3\,R\,C}\right) = \frac{3}{2}\,I_1(t) = 3\,I_2(t)$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Der Kondensator Nr. 1 entlädt sich vollständig, weil

$$\int_0^\infty I_1(t)\,dt = \frac{2\,U_0}{9\,R}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2\,t}{3\,R\,C}\right)dt = C\,\frac{U_0}{3}$$

- Die Kondensatoren Nr. 2 und 3 laden sich von $U_0/3$ auf $U_0/2$ auf, weil

$$\int_0^\infty I_2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty I_1(t)\,dt == C\,\frac{U_0}{6}$$

c) Vor und sehr lange Zeit nach dem Schließen des Schalters sind folgende Energien in den drei Kondensatoren gespeichert:

$$E_{\text{vorher}} = 3\,\frac{C}{2}\left(\frac{U_0}{3}\right)^2 = \frac{C}{6}\,U_0^2 \qquad\qquad E_\infty = 2\,\frac{C}{2}\left(\frac{U_0}{2}\right)^2 = \frac{C}{4}\,U_0^2$$

Im Widerstand wird die elektrische Energie

$$E_{\text{ohm}} = R\int_0^\infty I^2(t)\,dt = \frac{C}{12}\,U_0^2$$

verbraucht und die Spannungsquelle liefert die Energie

$$E_{\text{Quelle}} = U_0\int_0^\infty I_2(t)\,dt = \frac{C}{6}\,U_0^2$$

$$\Rightarrow \qquad E_{\text{vorher}} + E_{\text{Quelle}} = E_\infty + E_{\text{ohm}} = \frac{C}{3}\,U_0^2$$

Lösungen: 22 Induktion

22–6 Rollender Holzzylinder

Auf die Leiterstücke, die auf den beiden Stirnflächen des Zylinders liegen und die Länge $2\,r$ haben, wirken Lorentzkräfte in Richtung der Zylinderachse. Diese Kräfte beeinflussen die Bewegung nicht. Auf die Leiterstücke, die parallel zur Zylinderachse liegen und die Länge l haben, wirken zwei entgegengesetzt gleich große, horizontale Lorentzkräfte mit dem jeweiligen Betrag

$$F_\mathrm{L} = N\, I_\mathrm{ind}\, l\, B$$

(Siehe Abb. 1) Sie erzeugen das Drehmoment

$$M_\mathrm{L} = F_\mathrm{L}\, 2\,r \sin\varphi = 2\, N\, I_\mathrm{ind}\, l\, B\, r \sin\varphi$$

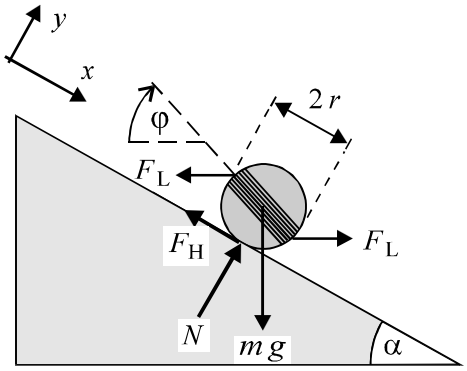


Abb. 1 Auf den Zylinder wirken zwei Lorentzkräfte, die Gewichtskraft, die Normalkraft N und die Haftreibungskraft F_H.

Laut Induktionsgesetz ist der Strom gleich

$$I_\mathrm{ind} = \frac{U_\mathrm{ind}}{R} = -\frac{N\,B}{R}\,\frac{d}{dt}\underbrace{(l\,2\,r\cos\varphi)}_{=A(t)} =$$

$$= \frac{N\,B}{R}\,2\,l\,r\,\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \qquad M_\mathrm{L} = -\frac{\left(2\,N\,B\,l\,r\sin\varphi\right)^2}{R}\,\dot\varphi \tag{1}$$

Die Drehimpulsgl. für Drehungen um den Schwerpunkt S des Zylinders lautet nach Gl. (6.4–1):

$$I_\mathrm{S}\,\ddot\varphi = M_\mathrm{L} + F_\mathrm{H}\,r \tag{2}$$

mit dem Trägheitsmoment $I_\mathrm{S} = \frac{1}{2}\,m\,r^2$.

Die Schwerpunktgl. für die x-Koordinate lautet:

$$m\,\ddot x_\mathrm{S} = m\,g\sin\alpha - F_\mathrm{H} \tag{3}$$

Eine dritte Gl. folgt aus der Rollbedingung:

$$x_\mathrm{S} = r\,\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \ddot x_\mathrm{S} = r\,\ddot\varphi \tag{4}$$

Die drei Gln. (2) bis (4) enthalten die drei Unbekannten F_H, $\ddot x_\mathrm{S}$, $\ddot\varphi$. Auflösung nach $\ddot\varphi$ führt auf

$$\left(I_\mathrm{S} + m\,r^2\right)\ddot\varphi = M_\mathrm{L} + m\,g\,r\sin\alpha$$

Mit Gl. (1) finden wir die nichtlineare Dgl.

$$\left(I_S + m r^2\right)\ddot{\varphi} + \frac{\left(2 N B l r\right)^2}{R} \sin^2\varphi \, \dot{\varphi} = m g r \sin\alpha \tag{5}$$

Diese nichtlineare Dgl. zweiter Ordnung für den Rollwinkel $\varphi(t)$ kann nur numerisch gelöst werden.

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Für $B = 0$ folgt die Dgl. $\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi} = \dfrac{g \sin\alpha}{1 + I_S/(m r^2)}$, die bereits in Beispiel (6.4–2) aufgestellt wurde.
- Der zweite Term in der Dgl. (5) beschreibt die Reibungsverluste, die durch den 'Wirbelstrom' in der Spule entstehen. Die Reibungsverluste wachsen wie erwartet mit der Windungszahl N und mit dem Magnetfeld B.

22–7 Gleitender Draht

a) Wegen der Flussänderung durch die Leiterschleife wird ein Strom induziert. Nach der Lenzschen Regel hat er eine solche Richtung, dass die Lorentzkraft die Entstehung des Stromes hemmen will. Daher zeigt die Lorentzkraft in Abb. 1 nach links; folglich zeigt die technische Stromrichtung aus der Papierebene hinaus auf den Leser zu.

Auf den Stab wirken Gewichtskraft, Lorentzkraft und die (hier bedeutungslose) Normalkraft der Unterlage. Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und Lorentzkraft $\mathbf{F}_L$ werden jeweils in eine Komponente parallel zum Hang und senkrecht zum Hang zerlegt. Diese Zerlegung ist die einzig sinnvolle, weil die Komponenten senkrecht zum Hang die Bewegung nicht beeinflussen und weil die Komponenten parallel zum Hang nur die Bewegung beeinflussen und keine Kraft auf den Hang ausüben.

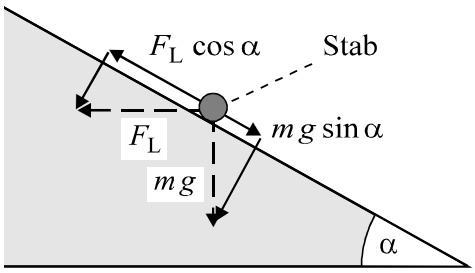


Abb. 1 Die gestrichelten Kräfte $m\mathbf{g}$ und $\mathbf{F}_L$ werden zerlegt in Komponenten parallel und senkrecht zum Hang.

Ein Kräftegleichgewicht besteht für

$$m g \sin\alpha = F_L \cos\alpha$$

Mit Gl. (22.1–6) ergibt sich die Lorentzkraft zu

$$F_L = I l B = \frac{U_{ind}}{R} l B \underset{\substack{v\cos\alpha = \text{horizontale} \\ \text{Komponente von } v}}{=} \frac{B l v \cos\alpha}{R} l B$$

$$\Rightarrow \qquad m g \sin\alpha = \frac{(B l)^2}{R} v \cos^2\alpha \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{m g R}{(B l)^2} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \tag{1}$$

b) Bei konstanter Geschwindigkeit sind die induzierte Spannung und die elektrische Leistung P, die im Widerstand verbraucht wird, konstant. Die Summe aus der Wärme Q, die im ohmschen Widerstand freigesetzt wird, und der potentiellen Energie $E_{pot} = V = m g h$ des Stabes beträgt

$$Q + E_{pot} = P t + m g h = \frac{U_{ind}^2}{R} t + m g \left(h_0 - v t \sin\alpha\right) =$$

$$= m\,g\,h_0 + v\,t\left(\frac{(B\,l\cos\alpha)^2}{R}\,v - m\,g\sin\alpha\right) \underset{\text{Gl. (1)}}{=} m\,g\,h_0$$

c) Nur die Richtung des induzierten Stromes ändert sich.

22–9 Beschleunigung durch Lorentzkraft

a) Die Lorentzkraft beschleunigt den Stab und ist proportional zum Strom durch den Stab. Der Strom wird durch angelegte Batteriespannung U_0 und die induzierte Spannung hervorgerufen.

Wir berechnen zuerst die induzierte Spannung, dann den Strom und die Lorentzkraft. Abschließend wird die Bewegungsgl. aufgestellt und integriert.

Wegen der im Stab induzierten Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = -B\,\frac{d}{dt}\left[l\,x(t)\right] = -B\,l\,v(t)$$

fließt in der Schleife der Strom

$$I(t) = \frac{U_0 + U_{\text{ind}}}{R} = \frac{U_0 - B\,l\,v(t)}{R} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \qquad F_{\text{L}}(t) = B\,l\,I(t) = \frac{B\,l}{R}\left(U_0 - B\,l\,v(t)\right)$$

Das zweite Newtonsche Axiom besagt

$$m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = \frac{B\,l}{R}\left(U_0 - B\,l\,v\right)$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\frac{dv}{U_0 - B\,l\,v} = \frac{B\,l}{m\,R}\,dt$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^{v(t)} \frac{dv'}{U_0 - B\,l\,v'} = \frac{B\,l}{m\,R}\int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{B\,l}\ln\frac{U_0 - B\,l\,v(t)}{U_0} = \frac{B\,l}{m\,R}\,t \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = \frac{U_0}{B\,l}\left[1 - \exp\left(-\frac{(B\,l)^2}{m\,R}\,t\right)\right] \tag{2}$$

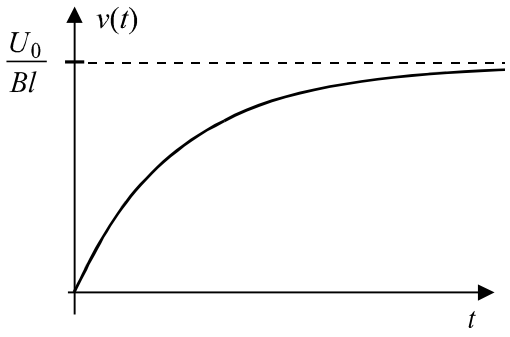


Abb. 1 Geschwindigkeit $v(t)$ nach Gl. (2).

Nach sehr langer Zeit erreicht die Geschwindigkeit den konstanten Wert $U_0/(B\,l)$. Der Strom $I(t)$ und damit auch die Lorentzkraft sind dann null, weil $U_{\text{ind}}(\infty) = -U_0$.

b) Nach den Gln. (1) und (2) lautet der Strom

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left[-\frac{(B\,l)^2}{m\,R}\,t\right] \tag{3}$$

Folglich liefert die Spannungsquelle im Zeitintervall $[0, \infty]$ die Energie

$$E_{\text{Quelle}} = \int_0^\infty P(t)\, dt = U_0 \int_0^\infty I(t)\, dt = m \left(\frac{U_0}{Bl} \right)^2 \tag{4a}$$

Diese Energie wird in kinetische Energie E_{kin} und in Wärme Q umgesetzt. Nach Gl. (2) gilt

$$v(\infty) = \frac{U_0}{Bl} \qquad \Rightarrow \qquad I(\infty) \underset{\text{Gl. (1)}}{=} 0$$

Nach unendlich langer Zeit verschwinden Strom und Lorentzkraft und der Stab gleitet mit konstanter Geschwindigkeit und mit der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2(\infty) = \frac{m}{2} \left(\frac{U_0}{Bl} \right)^2 \tag{4b}$$

Der ohmsche Widerstand R nimmt in der ganzen Zeit folgende elektrische Energie auf und setzt sie als Wärme frei:

$$Q = \int_0^\infty P_{\text{Widerstd.}}(t)\, dt \underset{\text{Gl. (20.3-3)}}{=} R \int_0^\infty I^2(t)\, dt \underset{\text{Gl. (3)}}{=} \frac{m}{2} \left(\frac{U_0}{Bl} \right)^2 \tag{4c}$$

$$\Rightarrow \qquad E_{\text{Quelle}} = E_{\text{kin}} + Q$$

22–15 Induktion in Kreisleiter

Nach dem Induktionsgesetz gilt:

$$\left| U_{\text{ind}} \right| = B \frac{dA_{\text{Segm.}}}{dt}$$

Dabei ist $A_{\text{Segm.}}$ die Fläche des Kreissegments, das im Magnetfeld eingetaucht ist (siehe die *dunkel* graue Fläche in Abb. 1). Der zugehörige Kreissektor mit dem Öffnungswinkel 2α hat die Fläche

$$A_{\text{Sektor}} = \alpha r^2$$

Das Dreieck ACD in Abb. 1 hat die Fläche

$$A_{\text{Dreieck}} = r^2 \cos\alpha \sin\alpha$$

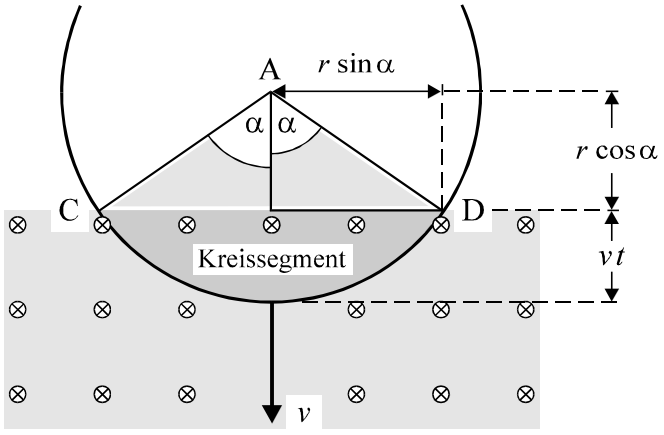


Abb. 1 Die dunkel graue Fläche $A_{\text{Segm.}}$ des Kreissegmentes, das im Magnetfeld eingetaucht ist, wird mit dem Winkel α berechnet.

Das *dunkel* graue Kreissegment ist die Differenz dieser beiden Flächen:

$$A_{\text{Segm.}} = A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}} = r^2 \left(\alpha - \cos\alpha \sin\alpha \right) =$$

$$= r^2 \left(\alpha - \cos\alpha \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \right) \tag{1}$$

Für die Berechnung der Zeitableitung $\dot{A}_{\text{Segm.}}$ benötigen wir Zeitabhängigkeit des Winkels $\alpha(t)$. Nach Abb. 1 gilt:

$$r = v\,t + r\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{v\,t}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(1 - \frac{v\,t}{r} \right)$$

Einsetzen des Winkels α in Gl. (1) führt auf

$$A_{\text{Segm.}}(t) = r^2 \left[\arccos\left(1 - \frac{v\,t}{r} \right) - \left(1 - \frac{v\,t}{r} \right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{v\,t}{r} \right)^2} \right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dA_{\text{Segm.}}}{dt} = 2\,r\,v \sqrt{1 - \left(1 - \frac{v\,t}{r} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left| U_{\text{ind}} \right| = 2\,r\,v\,B \sqrt{1 - \left(1 - \frac{v\,t}{r} \right)^2} \qquad \text{für} \quad 0 \le t < \frac{2\,r}{v} \tag{1}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Die induzierte Spannung ist proportional zur $r\,B$.
- Die induzierte Spannung geht am Anfang und am Ende der Überdeckung gegen Null, weil sich die überdeckte Fläche dann nur sehr langsam ändert.
- Bei halber Überdeckung (dann ist $t = r/v$) ist die induzierte Spannung gleich $2\,r\,v\,B$.

Lösungen: 24 Wechselstromkreise

24–8 Tiefpass, Hochpass und Bandpass

a) $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}_\mathrm{E}}{R + \dfrac{1}{i\,\omega C}}$ mit $\underline{U}_\mathrm{E} = \hat{U}_\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad \underline{U}_\mathrm{A} = \underline{Z}_\mathrm{C}\,\underline{I} = \frac{\underline{I}}{i\,\omega C} = \frac{\underline{U}_\mathrm{E}}{1 + i\,R\,\omega C} = \frac{\underline{U}_\mathrm{E}}{\sqrt{1 + (R\,\omega C)^2}}\,\mathrm{e}^{-i\varphi} \quad \text{mit} \quad \tan\varphi = R\,\omega C$$

$$\Rightarrow \quad \hat{U}_\mathrm{A}(\omega) = \frac{\hat{U}_\mathrm{E}}{\sqrt{1 + \left(R\,\omega C\right)^2}}$$

Der Scheitelwert $\hat{U}_\mathrm{A}(\omega)$ der Ausgangsspannung geht mit zunehmender Frequenz gegen null, weil der Kondensator die Ausgangsspannung kurz schließt. Als „Grenzfrequenz“ ω_G wird die Frequenz bezeichnet, bei der $\hat{U}_\mathrm{A}(\omega_\mathrm{G}) = U_\mathrm{E}/\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{1 + \left(R\,\omega_\mathrm{G}\,C\right)^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_\mathrm{G} = \frac{1}{R\,C}$$

b) $$\hat{U}_\mathrm{A}(\omega) = \hat{U}_\mathrm{R}(\omega) = R\,\hat{I} = \frac{\hat{U}_\mathrm{E}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{R\,\omega C}\right)^2}}$$

Der Scheitelwert $\hat{U}_\mathrm{A}(\omega)$ der Ausgangsspannung geht mit zunehmender Frequenz gegen $\hat{U}_\mathrm{E}$, weil der Blindwiderstand des Kondensators gegen null geht.

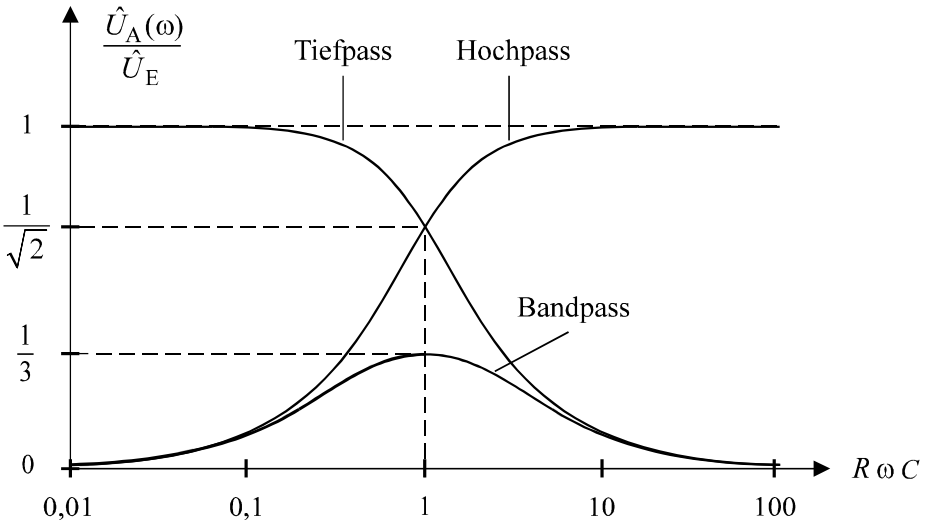


Abb. 1 Frequenzgang des Verhältnisses $\hat{U}_\mathrm{A}(\omega)/\hat{U}_\mathrm{E}$ von Ausgangs- zu Eingangsspannung für Tief-, Hoch- und Bandpass.

Auch hier wird die Grenzfrequenz ω_G durch die Beziehung $\hat{U}_A(\omega_G) = U_E/\sqrt{2}$ definiert:

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{R\,\omega_G\,C}\right)^2} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega_G = \frac{1}{R\,C}$$

c) Nach Gl. (24.6–24c) fließt durch den rechten Widerstand in Abb. 24.13–9c der Strom

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_E\,\dfrac{1}{i\,\omega C}}{\left(R+\dfrac{1}{i\,\omega C}\right)\dfrac{1}{i\,\omega C}+\left(R+\dfrac{1}{i\,\omega C}\right)R+\dfrac{1}{i\,\omega C}\,R} = \frac{\underline{U}_E}{3\,R+i\left(R^2\,\omega C-\dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{U}_A(\omega) = R\,\hat{I}_R = \frac{\hat{U}_E}{\sqrt{9+\left(R\,\omega C-\dfrac{1}{R\,\omega C}\right)^2}}$$

Für die Mittenfrequenz $\omega_M = 1/(R\,C)$ ist die Ausgangsspannung maximal mit

$$\hat{U}_A\left(\omega_M\right) = \frac{\hat{U}_E}{3}$$

24–9 Saugkreis und Sperrkreis

a) Nach Gl. (24.6–24c) ist der Strom durch den Widerstand R_3

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}\;\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\,\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\,\underline{Z}_3} \qquad \text{(24.6–24c)}$$

In dieser Aufgabe bedeutet das:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}\left(i\,\omega L+\dfrac{1}{i\,\omega C}\right)}{R_1\left(i\,\omega L+\dfrac{1}{i\,\omega C}\right)+R_1\,R_3+\left(i\,\omega L+\dfrac{1}{i\,\omega C}\right)R_3} =$$

$$= \frac{\underline{U}}{R_1+R_3-i\,\dfrac{R_1\,R_3}{\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}}$$

Daraus folgt

$$I_3(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{I}_3(t)\right) = \frac{\hat{U}\cos(\omega t+\varphi)}{\sqrt{\left(R_1+R_3\right)^2+\left(\dfrac{R_1\,R_2}{\omega L-1/(\omega C)}\right)^2}} = \hat{I}_3(\omega)\cos(\omega t+\varphi)$$

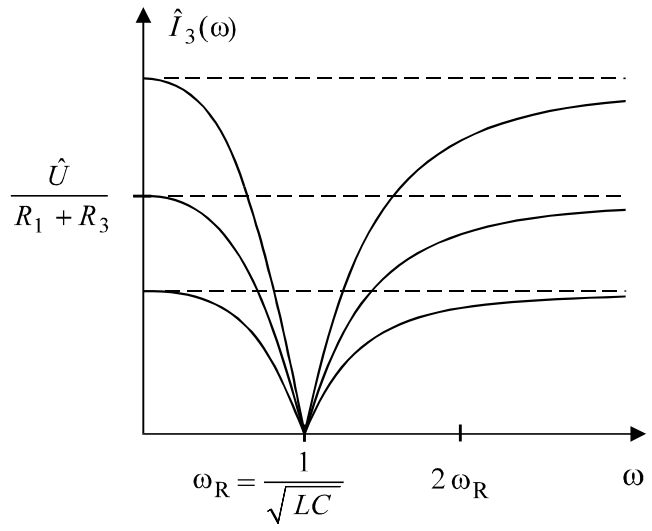


Abb. 1 $\hat{I}_3(\omega)$ für den Saugkreis. Bei der oberen Kurve ist R_3 am kleinsten, bei der unteren Kurve am größten.

mit $\quad \tan\varphi = \dfrac{R_1\,R_3}{R_1 + R_3}\,\dfrac{1}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}$

Für die Resonanzfrequenz $\omega_R = 1/\sqrt{L\,C}$ ist $I_3(t) = 0$, weil die Spannungen an Spule und Kondensator entgegengesetzt gleich groß sind, so dass am Widerstand R_3 keine Spannung abfällt.

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Für $\omega \to 0$ und für $\omega \to \infty$ geht $\hat{I}_3(\omega) \to \hat{U}/\left(R_1 + R_3\right)$. Das ist verständlich, weil der Widerstand des Reihenschwingkreises in diesen Fällen gegen Unendlich geht.

b) $\quad \underline{I}(t) = \dfrac{\underline{U}}{\dfrac{1}{i\,\omega L \cdot \dfrac{1}{i\,\omega C}} + R} = \dfrac{\underline{U}}{R + \dfrac{i}{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C}}$

$$\Rightarrow \quad I(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{I}(t)\right) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C}\right)^2}}\cos(\omega t - \varphi)$$

mit $\quad \tan\varphi = \dfrac{1}{R}\,\dfrac{1}{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C}$

Für die Resonanzfrequenz $\omega_R = 1/\sqrt{L\,C}$ ist $I(t) = 0$, weil die Ströme durch Spule und Kondensator entgegengesetzt gleich groß sind, so dass kein Strom durch den Widerstand R fließt.

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig. Für $\omega \to 0$ und für $\omega \to \infty$ geht $\hat{I}(\omega) \to \hat{U}/R$.