Lösungen : Newtonsche Axiome und Kräfte

3–14 Gleitender Stab

Die Finger A und B tragen das Gewichtskräfte F_A und F_B. Es gilt:

$$F_A\, a \underset{\text{Hebelgesetz}}{=} F_B\, b \qquad\qquad F_A + F_B = m\, g$$

$$\Rightarrow \qquad F_A = \frac{b}{a+b}\, m\, g \qquad\qquad F_B = \frac{a}{a+b}\, m\, g$$

Zu Beginn des Versuches sei $a < b$ und daher $F_A > F_B$. Das Gleiten beginnt dann bei B. Da die Haftreibungszahl μ_0 größer als die Gleitreibungszahl μ ist, kommt B noch nicht zur Ruhe, wenn $a = b$, sondern erst, wenn

$$\mu_0\, F_A = \mu_0\, \frac{b}{a+b}\, m\, g = \mu\, F_B = \mu\, \frac{a}{a+b}\, m\, g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{b} = \frac{\mu_0}{\mu} > 1$$

Jetzt beginnt der Stock auf dem Finger A zu gleiten usw. Da jedesmal der Koeffizient μ_0/μ auftritt, nähern sich A und B in geometrischer Progression. Unter dem Schwerpunkt S treffen sie zusammen.

3–15 Reibung auf Kreisbahn

a) Die Reibungskraft hat die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit. Durch die Reibungskraft wird die Masse in tangentialer Richtung abgebremst. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom gilt für die tangentiale Beschleunigung a_T :

$$m\, a_T \underset{\text{Gl. (2.5–10)}}{=} m\, R\, \dot{\omega} = -\, F_R = -\,\mu \cdot \underbrace{m\, \omega^2\, R}_{\text{Zentrifugalkraft}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\,\mu\, \omega^2$$

Wir trennen die Variablen, integrieren die Gl. auf beiden Seiten und erhalten (nach Gl. 2.5–6) mit $\omega_0 = v_0 / R$:

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = -\,\mu\, dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\omega_0}^{\omega(t)} \frac{d\omega}{\omega^2} = -\,\mu \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \qquad -\,\frac{1}{\omega'}\bigg|_{\omega_0}^{\omega(t)} = -\,\mu\, t \qquad \Rightarrow \qquad \omega(t) = \frac{1}{\dfrac{R}{v_0} + \mu\, t} \tag{1}$$

b) Wegen $\omega = \dot{\varphi}$ gilt

$$2\,\pi\, n = \varphi(T_n) - \varphi(0) \underset{\substack{\text{Hauptsatz}\\ \text{der Analysis}}}{=} \int_0^{T_n} \dot{\varphi}(t)\, dt \underset{\text{Gl. (1)}}{=} \int_0^{T_n} \frac{dt}{\dfrac{R}{v_0} + \mu\, t} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{R}{v_0} + \mu\, t \right) \bigg|_0^{T_n} = \frac{1}{\mu} \ln\left(1 + \frac{\mu\, v_0\, T_n}{R} \right)$$

$$\Rightarrow \qquad T_n = \frac{R}{\mu\, v_0}\left(\mathrm{e}^{\,2\pi n\mu} - 1\right)$$

In dem betrachteten Modell kann die Masse beliebig viele Umläufe machen, da die Reibungskraft $F_R \sim \omega^2$ mit abnehmender Winkelgeschwindigkeit quadratisch fällt. In der Wirklichkeit aber bleibt die Masse nach einigen Umläufen wegen der *konstanten* (hier vernachlässigten) Bodenreibung liegen.

c) $\qquad v_n = R\,\omega\big(T_n\big) = v_0\,\mathrm{e}^{-2\pi n\mu}$

3–18 Abgebremste Bewegung mit linear fallender Reibungskraft

Viele Studenten wollen diese Aufgabe mit den Gln. (2.4–4/5) für gleichförmig beschleunigte Bewegungen lösen. Das ist ein schwerer Fehler, da die Bremskraft und damit auch die Beschleunigung *nicht konstant* sind.

a) Die Bremskraft ist eine lineare Funktion und lautet daher:

$$F_B(v) = a + b\,v$$

mit a , b = const. Die beiden Vorgaben

$$F_B(0) = a = \frac{F_{B0}}{2} \qquad F_B(v_0) = a + b\,v_0 = F_{B0}$$

führen auf

$$F_B(v) = \left(1 + \frac{v}{v_0}\right)\frac{F_{B0}}{2}$$

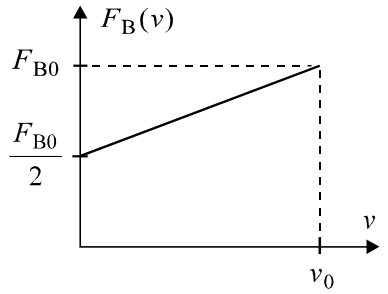


Abb. 1 Die Bremskraft ist eine lineare Funktion der Geschwindigkeit.

b) Die Bewegungsgl. lautet:

$$m\,a = m\,\frac{dv}{dt} = -\,F_B(v) = -\,\frac{v + v_0}{v_0}\,\frac{F_{B0}}{2}$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\frac{dv}{v + v_0} = -\,\frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{d\hat{v}}{\hat{v} + v_0} = -\,\frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}\int_0^t d\hat{t}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln\big(\hat{v} + v_0\big)\Big|_{v_0}^{v(t)} = \ln\frac{v(t) + v_0}{2\,v_0} = -\,\frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}\,t$$

$$\Rightarrow \qquad v(t) = v_0\left[2\,\exp\left(-\,\frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}\,t\right) - 1\right] \qquad \text{für } t \le t_B \tag{1}$$

c) Für die Bremszeit t_B verschwindet die eckige Klammer in Gl. (1):

$$2\,\exp\left(-\,\frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}\,t_B\right) - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\,\frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}\,t_B = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\Rightarrow \qquad t_B = \frac{2\,m\,v_0}{F_{B0}}\ln 2$$

d) Nach Gl. (2.3–5) ergibt sich der Bremsweg durch eine Integration über die Geschwindigkeit:

$$s_0 = \int_0^{t_B} v(t)\,dt = v_0 \int_0^{t_B} \left[2\,\mathrm{e}^{-t/T} - 1 \right] dt \qquad \text{mit} \quad \frac{1}{T} := \frac{F_{B0}}{2\,m\,v_0}$$

$$\Rightarrow \qquad s_0 = v_0 \left[-2\,T\,\mathrm{e}^{-t/T} \Big|_0^{t_B} - t_B \right] = v_0 \left[-2\,T\,\mathrm{e}^{-t_B/T} + 2T - t_B \right] =$$

$$= v_0 \left[\frac{4\,m\,v_0}{F_{B0}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\ln 2} \right) - \frac{2\,m\,v_0}{F_{B0}} \ln 2 \right] = \frac{2\,m\,v_0^2}{F_{B0}} \left(1 - \ln 2 \right)$$

3–19 Kräfte an schiefer Ebene

a) Mit $m_{ges} := m_1 + m_2 + m_3$ finden wir die Hangabtriebskraft F_{ab} und die Gleitreibungskraft F_R:

$$F_{ab} = m_{ges}\,g\,\sin\alpha \qquad F_R = \mu\,m_1\,g\,\cos\alpha$$

b) $$m_{ges}\,a = F - F_{ab} - F_R = F - m_{ges}\,g\,\sin\alpha - \mu\,m_1\,g\,\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{F}{m_{ges}} - g\,\sin\alpha - \mu\,\frac{m_1}{m_{ges}}\,g\,\cos\alpha$$

Die Seilkraft F_{12} überwindet die Hangabtriebskräfte der Massen m_2, m_3 und beschleunigt diese beiden Massen. Daher gilt:

$$F_{12} = \left(m_2 + m_3 \right) \left(a + g\,\sin\alpha \right) =$$

$$= \left(m_2 + m_3 \right) \left(\frac{F}{m_{ges}} - g\,\sin\alpha - \mu\,\frac{m_1}{m_{ges}}\,g\,\cos\alpha + g\,\sin\alpha \right) =$$

$$= \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \left(F - \mu\,m_1\,g\,\cos\alpha \right)$$

3–20 Kraft auf rollenden Wagen

Alle drei Massen sollen durch die Kraft F gleich stark beschleunigt werden. Daraus folgt

$$F = \left(m_1 + m_2 + m_3 \right) a \tag{1}$$

Die Gewichtskraft $m_3\,g$ der dritten Masse muss die Masse m_2 beschleunigen, so dass

$$m_3\,g = m_2\,a \tag{2}$$

Einsetzen der Gl. (2) in Gl. (1) liefert

$$F = \frac{m_3}{m_2} \left(m_1 + m_2 + m_3 \right) g$$

Lösungen: 4 Arbeit, Energie und Leistung

4–9 Massenbestimmung

Die Masse m kann anfangs nur nach oben laufen, wenn $m < M$ gilt.

Die rechte, kleinere Masse m schwingt zwischen dem Anfangsort bei ϑ_0 und dem oberen Umkehrpunkt bei $\vartheta = 0$ periodisch – aber nicht harmonisch – auf und ab. Die eine Masse erreicht ihren tiefsten Punkt, wenn die andere Masse ihren höchsten Punkt erreicht und umgekehrt.

Da das System energetisch geschlossen ist und keine Reibungen auftreten, gilt der mechanische *Energieerhaltungssatz*. In den oberen Umkehrpunkten der beiden Massen sind nur potentielle Energien vorhanden. Die kleine Masse m wird – von ihrem tiefsten Punkt aus gemessen – um die Strecke

$$l \tan \vartheta_0$$

gehoben (siehe Abb. 1). Die große Masse M wird – von ihrem tiefsten Punkt aus gemessen – um die Strecke

$$\frac{l}{\cos \vartheta_0} - l$$

gehoben (siehe Abb. 1).

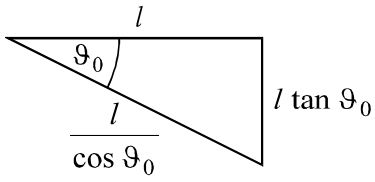


Abb. 1 Die Verschiebungen der beiden Massen können mit dieser Abb. ermittelt werden.

Vor der Aufstellung des Energieerhaltungssatzes werden die Nullpunkte der Lageenergien der beiden Massen (willkürlich) jeweils in den tiefsten Punkt ihrer periodischen Schwingung gelegt. (Die Nullniveaus der beiden Massen haben also verschiedene Höhen.)

Dann lautet der Energieerhaltungssatz

$$\underbrace{m\,g\,l\tan\vartheta_0}_{m \text{ im höchsten Punkt}} = \underbrace{M\,g\left(\frac{l}{\cos\vartheta_0} - l\right)}_{M \text{ im höchsten Punkt}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\tan\vartheta_0}{\frac{1}{\cos\vartheta_0} - 1}\,m = \frac{\sin\vartheta_0}{1-\cos\vartheta_0}\,m$$

Kontrolle + Veranschaulichung:

- M hängt nicht von l ab, weil beide Massen bei k-facher Länge $k\,l$ den k-fachen Weg zurücklegen müssen. Daher kürzt sich l im Energieerhaltungssatz heraus.
- Für $\vartheta_0 \to 0$ gehen Zähler und Nenner gegen null. Mit der Regel von de l'Hospital erhalten wir

  $$\lim_{\vartheta_0 \to 0} \frac{\sin\vartheta_0}{1-\cos\vartheta_0} = \lim_{\vartheta_0 \to 0} \frac{\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0} = \infty$$

  Wenn m *nahe* bei $\vartheta_0 = 0$ losgelassen wird, so muss die linke Masse M sehr groß sein, um die rechte Masse m trotz des fast schon waagerechten rechten Seilstückes zum Punkt $\vartheta = 0$ hochzuziehen.
- Für $\vartheta_0 \to 90°$ geht $M \to m$. Beim Hochschwingen von m ist das rechte Seilstück während des größten Teils des Weges nahezu vertikal. Folglich legen m und M ungefähr gleiche Strecken zurück. Wegen des Energieerhaltungssatzes folgt $M \to m$ für $\vartheta_0 \to 90°$.

4–17 Energieniveaus des Wasserstoffatoms

a) Um das Elektron von einem Ort mit Kernabstand r_1 zu einem Ort mit dem größeren Kernabstand r_2 zu bringen, ist folgende Arbeit zu leisten:

$$W_{12} = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Für $$V(r) = -\frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \qquad (1)$$

ist die geleistete Arbeit gleich der Zunahme an potentieller Energie

$$W_{12} = V(r_2) - V(r_1)$$

und $V(r)$ geht gegen null für r gegen Unendlich.

b) Beim Sprung auf eine innere Kreisbahn nimmt die potentielle Energie nach Gl. (1) ab um

$$V_{21} = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) < 0 \qquad (2)$$

Die Geschwindigkeit des Elektrons auf einer Kreisbahn ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht:

$$\underbrace{m_e \frac{v^2}{r}}_{\text{Zentrifugalkraft}} = \underbrace{\frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}}_{\text{Coulombkraft}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{r} \qquad (m_e = \text{Elektronenmasse})$$

Die Zunahme der kinetischen Energie T ist daher gleich

$$T_{21} = \frac{m_e}{2} \left(v_1^2 - v_2^2 \right) = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) > 0 \qquad (3)$$

Nach den Gln. (2) und (3) ist die Zunahme der kinetischen Energie beim Sprung nach innen betragsmäßig halb so groß ist wie die Abnahme der potentiellen Energie. Die Energie nimmt ab um

$$E_{21} = V_{21} + T_{21} = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) < 0$$

Der Energieüberschuss wird in Form elektromagnetischer Strahlung nach außen abgegeben. Bei den gegebenen Bahnradien r_1 und r_2 wird die Energie $1{,}63 \cdot 10^{-18}\,\text{J} \approx 10{,}19\,\text{eV}$ abgestrahlt.

Ein Elektronenvolt $1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$ ist laut Definition die kinetische Energie eines Elektrons, das aus der Ruhe durch eine Spannung von 1 Volt beschleunigt wurde – z. B. im Plattenkondensator.

4–19 Energiebilanz

a) Die Dehnung x_{Gl} der Feder in der Gleichgewichtslage ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht:

$$m\,g = D\,x_{Gl} \quad \Rightarrow \quad x_{Gl} = \frac{m\,g}{D} \qquad (1)$$

Folglich betragen der Energiegewinn der Feder und der Verlust an Lageenergie

$$\Delta V_{\text{Feder}} = \frac{D}{2} x_{\text{Gl}}^2 = \frac{(m g)^2}{2 D} > 0 \qquad \Delta V_{\text{Lage}} = -m g x_{\text{Gl}} = -\frac{(m g)^2}{D} < 0$$

b) Wir zeigen nun, dass die überschüssige Energie $(m g)^2/(2 D)$ auf die Hand übertragen wird. Beim langsamen Absenken muss die Hand den Teil F_{Ha} der Gewichtskraft $m g$ tragen, der nicht von der Feder aufgefangen wird:

$$F_{\text{Ha}} = m g - D x$$

Die zu F_{Ha} entgegengesetzt gleich große Kraft ('actio = reactio') leistet an der Hand die Arbeit

$$W_{\text{Ha}} = \int_0^{x_{\text{Gl}}} \mathrm{F}_{\text{Ha}}(x)\, dx = \int_0^{x_{\text{Gl}}} (m g - D x)\, dx =$$

$$= m g x_{\text{Gl}} - \frac{D}{2} x_{\text{Gl}}^2 \underset{\text{Gl. (1)}}{=} \frac{(m g)^2}{2 D} \tag{2}$$

Bemerkung: Die Energieerhaltung bestätigt dieses Ergebnis: Die potentielle Energie im Schwerefeld sei in der Gleichgewichtslage null. Dann gilt nach dem allgemeinen Energieerhaltungssatz

$$\underbrace{m g x_{\text{Gl}}}_{\substack{\text{Gesamte Energie vor} \\ \text{der Federstauchung}}} = \underbrace{\frac{D}{2} x_{\text{Gl}}^2}_{\substack{\text{Federenergie in} \\ \text{der Ruhelage}}} + \underbrace{E_{\text{Ha}}}_{\substack{\text{Energiegewinn} \\ \text{der Hand}}}$$

Einsetzen von x_{Gl} nach Gl. (1) ergibt

$$E_{\text{Ha}} = \frac{(m g)^2}{2 D} \underset{\text{Gl. (2)}}{=} W_{\text{Ha}}$$

4–23 Falltiefe

a) Die Gleichgewichtslage wird nur durch das Gleichgewicht der Kräfte (und nicht durch eine Energiebilanz) festgelegt. Daher gilt für die vertikalen Komponenten der drei Kräfte, die an der mittleren Masse angreifen, die Gleichgewichtsbedingung:

$$m g = 2 m g \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$$

$$\Rightarrow \quad x_{\text{Gl}} = l \cot 60° \approx 0{,}577 \cdot l$$

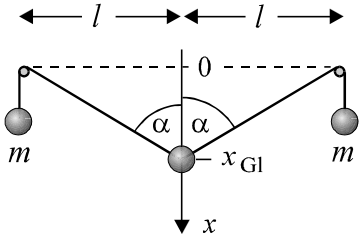


Abb. 1 In der Gleichgewichtslage herrscht ein Kräftegleichgewicht.

b) Die mittlere Masse wird im ersten Teil der Fallbewegung ($0 \le x < x_{\text{Gl}}$) nach unten beschleunigt. Im zweiten Teil der Fallbewegung ($x_{\text{Gl}} < x \le x_{\max}$) wird sie abgebremst, weil jetzt ihre Gewichtskraft $m g$ kleiner ist als die Summe der vertikalen Komponenten beider Fadenkräfte.

Die Falltiefe kann daher nicht mit einer Kräftebilanz, sondern nur mit dem mechanischen Energieerhaltungssatz berechnet werden. Das Nullniveau der potentiellen Energie wird auf die Anfangshöhe der beiden äußeren Massen gelegt. Dann lautet der Energieerhaltungssatz:

$$\underbrace{m g h}_{\text{Anfangsenergie}} = m g (h - x_{\max}) + 2 m g \cdot \underbrace{\left(\sqrt{x_{\max}^2 + l^2} - l \right)}_{\text{Hebung der äußeren Massen}}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\max} = 2\left(\sqrt{x_{\max}^2 + l^2} - l\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_{\max} + 2\,l = 2\sqrt{x_{\max}^2 + l^2}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\max}^2 + 4\,x_{\max}\,l + 4\,l^2 = 4\,x_{\max}^2 + 4\,l^2$$

Wegen $x_{\max} > 0$ kann durch $x_{\max}$ dividiert werden:

$$\Rightarrow \qquad x_{\max} = \frac{4}{3}\,l$$

Nach dem Erreichen der tiefsten Lage schwingt die mittlere Masse wegen Energieerhaltung bis auf die Ausgangshöhe zurück.

4–24 Brot und Spiele

$$v(t) \underset{\text{Gl. (4.2–5)}}{=} \sqrt{v_0^2 + \frac{2\,P_0}{m}\,t}$$

$$\Rightarrow \qquad v\left(t_\mathrm{B}\right) = v_\mathrm{E} = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{\left(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \frac{2\,P_0}{m}\,t_\mathrm{B}} \tag{1}$$

Der zurückgelegte Weg ist das Zeitintegral der Geschwindigkeit:

$$s_0 = 3000\ \mathrm{m} = \int_0^{t_\mathrm{B}} v(t)\,dt = \frac{m}{3\,P_0}\left(v_0^2 + \frac{2\,P_0}{m}\,t\right)^{3/2}\Bigg|_0^{t_\mathrm{B}} =$$

$$= \frac{m}{3\,P_0}\left[\underbrace{\left(\mathrm{v}_0^2 + \frac{2\,P_0}{m}\,t_\mathrm{B}\right)^{3/2}}_{v_\mathrm{E}^3 = (25\ \mathrm{m/s})^3} - v_0^3\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{P_0}{m} = \frac{1}{9000\ \mathrm{m}}\left[\left(25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3 - \left(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3\right] = 1{,}736\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3} \tag{2}$$

Die Gln. (1) und (2) liefern

$$t_\mathrm{B} = \frac{m}{2\,P_0}\left(v_\mathrm{E}^2 - v_0^2\right) \approx 179{,}7\ \mathrm{s} \approx 3\ \mathrm{min}$$

und $$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{P_0}{m\sqrt{v_0^2 + \frac{2\,P_0}{m}\,t}} \approx \frac{1{,}736\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sqrt{1 + 3{,}472\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t}}$$

Lösungen: 5 Impuls- und Drehimpulssatz

5–12 Kreisbewegungen mit verschiedenen Bezugspunkten

a) $\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \left(-m\,\omega^2\,\mathbf{r}\right)$ verschwindet für $\mathbf{r} \parallel \mathbf{r}'$ und ist ungleich null an den anderen Positionen. Daher ist $\mathbf{M}'$ nicht konstant.

b) $\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{p} = \mathbf{L} - \mathbf{a} \times \mathbf{p}$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{L}}' = \dot{\mathbf{L}} - \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{p}} \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{F} = \mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{F} \qquad (2)$$

Mit $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$ und $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ ergeben die Gln. (1) und (2) sofort:

$$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'$$

Die Rechnungen gelten nicht nur für Kreisbahnen, sondern für ganz beliebige Bahnkurven und für beliebige Kräfte. Denn stets gilt:

$$\dot{\mathbf{L}}' = \dot{\mathbf{L}} - \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{p}} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{a} \times \mathbf{F}$$

Mit $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$ und $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

folgt $\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{M}'$

5–13 Unwuchtkräfte

Für die zwei Unbekannten $F_\mathrm{A}, F_\mathrm{B}$ werden zwei Gln. benötigt. Die erste Gl. gilt in beiden Teilaufgaben a) und b) und besagt, dass die Fliehkraft $m\,\omega^2\,r$ durch beide Lager aufgefangen wird:

$$m\,\omega^2\,r = F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} \qquad (1)$$

a) Im Folgenden geben die zwei großgeschriebenen Indizes an den Vektoren $\mathbf{r}$ den Anfangs- und den Endpunkt an. So ist z. B. $\mathbf{r}_{\mathrm{AB}}$ der Vektor von A nach B.

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zeigt nach Abb. 1 in die positive x-Richtung. Der Koordinatenursprung liegt im Punkt C auf der Achse. Die beiden Unwuchtkräfte erzeugen das Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{\mathrm{CA}} \times \mathbf{F}_\mathrm{A} + \mathbf{r}_{\mathrm{CB}} \times \mathbf{F}_\mathrm{B} = \left(-2\,l\,F_\mathrm{A} + l\,F_\mathrm{B}\right)\mathbf{e}_\perp \qquad (2)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{\mathrm{CD}} \times (m\,\mathbf{v}) \underset{\text{Gl. (2.5–9)}}{=} m\,\mathbf{r}_{\mathrm{CD}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{CD}}) = m\,r^2\,\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist konstant und parallel zur Drehachse. Die Gln. (2) und (3) ergeben mit $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

$$-2\,l\,F_\mathrm{A} + l\,F_\mathrm{B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2F_\mathrm{A} = F_\mathrm{B} \qquad (4)$$

Die Gln. (1) und (4) führen auf

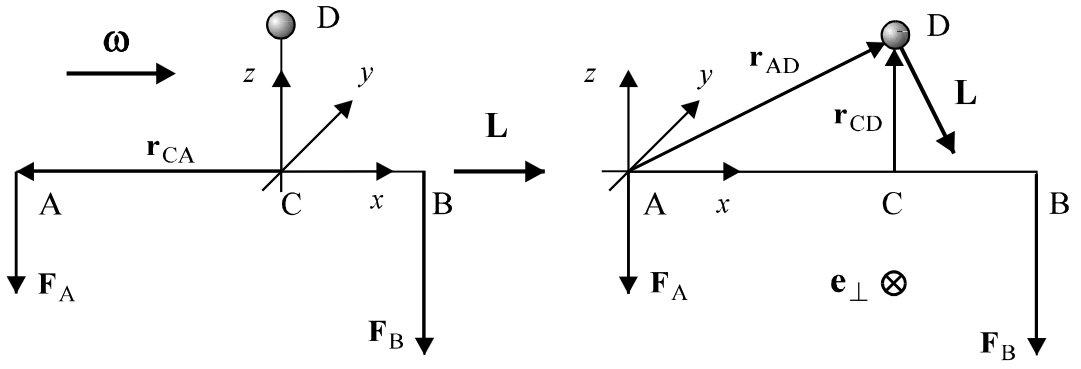


Abb. 1 Der Drehimpuls hängt von der Wahl des Koordinatenursprungs ab:

- Im linken Bild liegt der Koordinatenursprung im Punkt C am ruhenden Ende des masselosen Stabes CD. Der *Drehimpuls ist konstant und parallel zur Drehachse.*
- Im rechten Bild liegt der Koordinatenursprung im linken Drehlager A. *Der Drehimpuls ist nicht konstant* und liegt in der rotierenden Ebene, die von der Drehachse und vom masselosen Stab aufgespannt wird.

$$F_A = \frac{1}{3} m \omega^2 r \qquad F_B = \frac{2}{3} m \omega^2 r \qquad (5/6)$$

b) Der Koordinatenursprung liegt jetzt im linken Lager, also im Punkt A.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B = 3 l F_B \mathbf{e}_\perp \quad (7)$$

Der rotierende Einheitsvektor $\mathbf{e}_\perp$ steht senkrecht auf $\overline{CD}$ und zeigt momentan in das Blatt hinein (siehe rechts unten in Abb. 1).

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{AD} \times (m \mathbf{v}) \underset{\text{Gl. (2.5–9)}}{=} m \mathbf{r}_{AD} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{CD}) \underset{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{=}$$

$$= m \left[\vec{\boldsymbol{\omega}} \left(\mathbf{r}_{AD} \cdot \mathbf{r}_{CD} \right) - \mathbf{r}_{CD} \left(\mathbf{r}_{AD} \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} \right) \right] = m r^2 \vec{\boldsymbol{\omega}} - 2 m l \omega \mathbf{r}_{CD}$$

In dieser Gl. ist nur der Vektor $\mathbf{r}_{CD}$ zeitabhängig. (Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ zeigt in die positive x-Richtung und ist konstant.) Daher führt die Zeitableitung auf

$$\dot{\mathbf{L}} = -2 m l \omega \dot{\mathbf{r}}_{CD} \underset{\text{Gl. (2.5–9)}}{=} -2 m l \omega (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{CD}) = 2 m l r \omega^2 \mathbf{e}_\perp \qquad (8)$$

Die Gln. (7) und (8) ergeben mit $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$ wieder die Gln. (5/6) für die zwei Kräfte $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B$.

5–14 Abschuss einer Kugel

Wir definieren zuerst die verwendeten Größen:

$u_W :=$ Geschwindigkeit des Wagens nach dem Abschuss

$u_{Kx}, u_{Ky} :=$ Geschwindigkeitskomponenten der Kugel im Bezugssystem der Erde

$u_{\mathrm{K}x}^{\mathrm{rel}}, u_{\mathrm{K}y}^{\mathrm{rel}} :=$ Geschwindigkeitskomponenten der Kugel relativ zum Kanonier

Da das System energetisch abgeschlossen ist und da die Vorgänge rein mechanisch sind (vor allem keine Reibung), gilt der Energieerhaltungssatz der Mechanik:

$$\underbrace{\frac{m_{\mathrm{W}}+m_{\mathrm{K}}}{2}\,v_0^2+\frac{D}{2}\,s^2}_{\text{Gesamte Energie vor dem Abschuss}} = \underbrace{\frac{m_{\mathrm{W}}}{2}\,u_{\mathrm{W}}^2+\frac{m_{\mathrm{K}}}{2}\left(u_{\mathrm{K}x}^2+u_{\mathrm{K}y}^2\right)}_{\text{Gesamte Energie nach dem Abschuss}} \qquad (1)$$

In horizontaler Richtung wirken keine äußeren Kräfte auf das System, so dass der Impulserhaltungssatz in horizontaler Richtung gilt:

$$\left(m_{\mathrm{W}}+m_{\mathrm{K}}\right)v_0 = m_{\mathrm{W}}\,u_{\mathrm{W}} + m_{\mathrm{K}}\,u_{\mathrm{K}x} \qquad (2)$$

Diese beiden Gln. enthalten drei unbekannte Größen: $u_{\mathrm{W}}, u_{\mathrm{K}x}, u_{\mathrm{K}y}$. Daher sind weitere Gln. nötig:

$$u_{\mathrm{K}x} = u_{\mathrm{W}} + u_{\mathrm{K}x}^{\mathrm{rel}} \qquad u_{\mathrm{K}y} = u_{\mathrm{K}y}^{\mathrm{rel}}$$

Diese Gln. enthalten mit $u_{\mathrm{K}x}^{\mathrm{rel}}, u_{\mathrm{K}y}^{\mathrm{rel}}$ weitere unbekannte Größen. Daher fehlt immer noch eine Gl.:

$$\tan\alpha = u_{\mathrm{K}y}^{\mathrm{rel}} \Big/ u_{\mathrm{K}x}^{\mathrm{rel}} \qquad \Rightarrow \qquad u_{\mathrm{K}y} = u_{\mathrm{K}x}^{\mathrm{rel}} \tan\alpha = \left(u_{\mathrm{K}x} - u_{\mathrm{W}}\right)\tan\alpha \qquad (3a/b)$$

Die Auflösung der Gln. (1/2/3b) nach den Unbekannten $u_{\mathrm{W}}, u_{\mathrm{K}x}, u_{\mathrm{K}y}$ wollen wir uns schenken.

Hinweis: Die naheliegende Gl.

$$\left(m_{\mathrm{W}}+m_{\mathrm{K}}\right)v_0 = m_{\mathrm{w}}\,u_{\mathrm{W}} + m_{\mathrm{K}}\,u_{\mathrm{K}}\cos\alpha \qquad \text{(falsch)}$$

ist falsch, da α nur der Abschusswinkel im System des Wagens, nicht aber der Abschusswinkel im Inertialsystem ist. Daher ist $u_{\mathrm{K}}\cos\alpha$ nicht die x-Komponente der Kugel-Abschussgeschwindigkeit im Inertialsystem.

Zur Kontrolle betrachten wir abschließend noch einen Spezialfall und stellen die Kanone senkrecht auf:

$$\alpha = \pi/2 \qquad \Rightarrow \qquad u_{\mathrm{K}x}^{\mathrm{rel}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_{\mathrm{K}x} = u_{\mathrm{W}}$$

Dann lauten der Energie- und Impulserhaltungssatz:

$$\frac{m_{\mathrm{W}}+m_{\mathrm{K}}}{2}\,v_0^2+\frac{D}{2}\,s^2 = \frac{m_{\mathrm{W}}}{2}\,u_{\mathrm{W}}^2+\frac{m_{\mathrm{K}}}{2}\left(u_{\mathrm{W}}^2+u_{\mathrm{K}y}^2\right)$$

$$\left(m_{\mathrm{W}}+m_{\mathrm{K}}\right)v_0 = m_{\mathrm{W}}\,u_{\mathrm{W}} + m_{\mathrm{K}}\,u_{\mathrm{W}}$$

$$\Rightarrow \qquad u_{\mathrm{W}} = v_0 \qquad \text{und} \qquad \frac{D}{2}\,s^2 = \frac{m_{\mathrm{K}}}{2}\,u_{\mathrm{K}y}^2$$

Dieses Ergebnis für $\alpha = \pi/2$ ist plausibel: Der Wagen erhält keinen Rückstoß, so dass seine Geschwindigkeit beim Abschuss nicht geändert wird. Die Federenergie wird in die kinetische Energie der nach oben abgeschossenen Kugel umgewandelt.

5–15 Drehimpuls in Polarkoordinaten

Nach Abb. 2.5–2 und nach Gl. (2.5–7) lautet der Ortsvektor des Teilchens

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{L} = m\,\mathbf{r}\times\mathbf{v} = m \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,r^2\dot\varphi \end{pmatrix}$$

5–16 Sprung auf stehenden Wagen

a) Da keine horizontalen Kräfte von außen wirken, ist der horizontale Gesamtimpuls konstant:

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)u \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,v_0 \tag{1}$$

b) Während des Rutschens hat der Mann die konstante negative Beschleunigung

$$a = -\frac{F_\mathrm{R}}{m_1} = -\frac{\mu\, m_1\, g}{m_1} = -\mu\, g$$

c) Für die Berechnung der Rutschzeit T gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Methode: Wir betrachten den Läufer: Während des Rutschens gilt für seine gleichförmig beschleunigte Bewegung im Erdsystem:

$$v_\mathrm{Mann}(t) = v_0 - \mu\, g\, t$$

$$\Rightarrow \qquad v_\mathrm{Mann}(T) = u = v_0 - \mu\, g\, T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{v_0 - u}{\mu\, g} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{v_0}{\mu\, g}$$

2. Methode: Wir betrachten den Wagen: Für ihn gilt während des Rutschens:

$$v_\mathrm{Wagen}(t) = 0 + a_\mathrm{Wagen}\, t = \frac{\mu\, m_1\, g}{m_2}\, t$$

$$\Rightarrow \qquad u \underset{\text{Gl. (1)}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,v_0 = \frac{\mu\, m_1\, g}{m_2}\,T \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{v_0}{\mu\, g}$$

d) $$x_\mathrm{Wagen}(T) = s = \frac{a_\mathrm{Wagen}}{2}\,T^2 = \frac{\mu\, m_1\, g}{2\, m_2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{v_0}{\mu\, g}\right)^2 = \frac{m_1\, m_2}{(m_1 + m_2)^2}\,\frac{v_0^2}{2\mu\, g}$$

5–17 Sprung auf Lore

a) Für die Fallzeit gilt:

$$\frac{g}{2}\,T_\mathrm{F}^2 = h_0 \qquad \Rightarrow \qquad T_\mathrm{F} = \sqrt{\frac{2\,h_0}{g}}$$

b) Beim Sprung ist die Bewegung in horizontaler Richtung gleichförmig und in vertikaler Richtung gleichförmig beschleunigt. In der Zeit T_F muss der Mann in horizontaler Richtung die Strecke s zurücklegen. Folglich beträgt die horizontale Sprunggeschwindigkeit

$$\dot{x}_M = \frac{s}{T_F} = s\sqrt{\frac{g}{2h_0}}$$

Bei der Landung bleibt der gesamte Impuls erhalten:

$$m_M\,\dot{x}_M = (m_L + m_M)\,v_{Lore} \qquad \Rightarrow \qquad v_{Lore} = \frac{m_M}{m_L + m_M}\,s\sqrt{\frac{g}{2h_0}}$$

c) Wir nehmen an, dass der Mann nicht auf der Lore rutscht, sondern den ganzen Energieüberschuss in den Beinen aufnimmt. Vor der Landung beträgt die mechanische Energie des Läufers

$$E_{vor} = m_M\,g\,h_0 + \frac{m_M}{2}\left(\frac{s}{T_F}\right)^2 = m_M\,g\,h_0 + \frac{m_M}{2}\,\frac{s^2 g}{2h_0}$$

Nach der Landung beträgt die gesamte mechanische Energie

$$E_{nach} = \frac{m_L + m_M}{2}\,v_{Lore}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_M^2}{m_L + m_M}\,\frac{s^2 g}{2h_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Bein} = E_{vor} - E_{nach} = m_M\,g\,h_0 + \frac{m_L\,m_M}{m_L + m_M}\,\frac{s^2 g}{4h_0}$$

Lösungen: 6 Starrer Körper

6–12 Bewegung einer gezogenen Garnrolle

Die Haftreibungskraft F_H des Bodens auf die Rolle soll nach links zeigen. Dann lauten Schwerpunktsatz und Drehimpulsgl.:

$$m\,\ddot{x} = F\cos\alpha - F_H$$

$$m\,\ddot{y} = 0 = N + F\sin\alpha - m\,g$$

$$I\,\ddot{\varphi} = R_2\,F_H - R_1\,F$$

Diese drei Gln. enthalten vier Unbekannte $\ddot{x}, \ddot{\varphi}, N, H$. Die Rollbedingung liefert eine vierte Gl.

$$\ddot{x} = R_2\,\ddot{\varphi}\,.$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{R_2\cos\alpha - R_1}{I + m\,R_2^2}\,R_2\,F$$

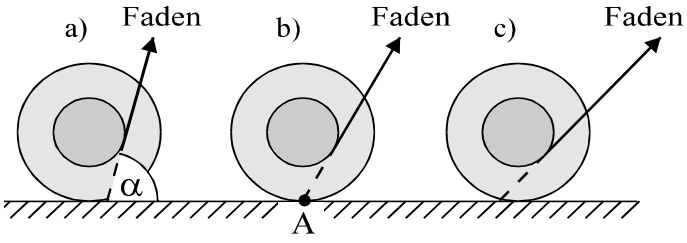


Abb. 1 Im Fall a) bewegt sich die Rolle nach links, im Fall c) nach rechts. Im Fall b) läuft die Wirkungslinie der Kraft *F* durch den Auflagepunkt A, so dass die Rolle liegen bleibt.

Drei Fälle sind zu unterscheiden:

a) Für $\cos\alpha < R_1/R_2$ ist $\ddot{x} < 0$. Die Rolle bewegt sich nach links.

b) Für $\cos\alpha = R_1/R_2$ ist $\ddot{x} = 0$. Die Wirkungslinie der Kraft *F* läuft durch den Auflagepunkt A und erzeugt kein Drehmoment bzgl. A. Die Rolle bleibt in Ruhe.

c) Für $\cos\alpha > R_1/R_2$ ist $\ddot{x} > 0$. Die Rolle bewegt sich nach rechts.

6–13 Beschleunigung und Stangenkraft

Der Schwerpunktsatz der Platte mit Masse m_1 lautet:

$$m_1\,\ddot{x} = F - F_{R1} - F_{H2}$$

$$m_1\,\ddot{y} = 0 = N_1 - N_2 - m_1\,g$$

Für den Zylinder lauten der Schwerpunktsatz und die Drehimpulsgl.:

$$0 = F_{H2} - F_{\text{Stange}}\cos\alpha$$

$$0 = N_2 - m_2\,g + F_{\text{Stange}}\sin\alpha$$

$$I\,\ddot{\varphi} = \frac{m_2}{2}\,R^2\,\ddot{\varphi} = R\,F_{H2}$$

Diese fünf Gln. enthalten sieben Unbekannte:

$$\ddot{x},\ \ddot{\varphi},\ N_1,\ N_2,\ F_{R1},\ F_{H2},\ F_{\text{Stange}}\,.$$

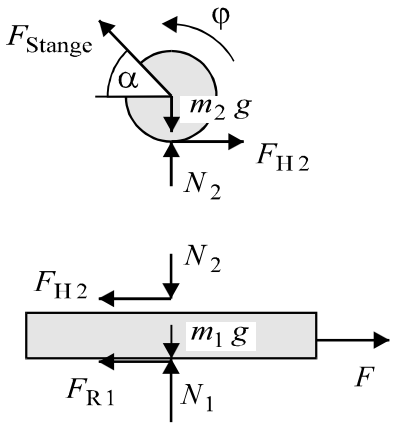


Abb. 1 Die beiden Freikörperbilder zeigen die wirkenden Kräfte.

Daher werden zwei weitere Gln. benötigt:

$$\ddot{x} = R\,\ddot{\varphi} \qquad F_{R1} = \mu\, N_1$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} = 2\,\frac{F - \mu\,(m_1 + m_2)\,g}{2\,m_1 + m_2 - \mu\, m_2 \tan\alpha} \qquad F_{\text{Stange}} = \frac{m_2\,\ddot{x}}{2\cos\alpha} = \frac{m_2}{\cos\alpha}\,\frac{F - \mu\,(m_1 + m_2)\,g}{2\,m_1 + m_2 - \mu\, m_2 \tan\alpha}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- $\ddot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F - \mu\,(m_1 + m_2)\,g = 0$ und $F_{\text{Stange}} = 0$
- $m_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \dfrac{1}{m_1}(F - \mu\, m_1\, g)$
- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \dfrac{F - \mu\,(m_1 + m_2)\,g}{m_1 + m_2/2} = \dfrac{F - \mu\,(m_1 + m_2)\,g}{m_1 + I/R^2}$
- Mit zunehmendem Winkel α nimmt F_{Stange} monoton zu und die Normalkraft $N_2 = m_2\,g - F_{\text{Stange}}\sin\alpha$ fällt monoton.

6–14 Abrutschender Stab

Wegen der Reibungsfreiheit stehen die Kräfte F_1, F_2 senkrecht auf Wand und Boden. Der Schwerpunktsatz für die Schwerpunktkoordinaten x_S, y_S und die Drehimpulsgl. lauten

$$m\,\ddot{x}_S = F_1$$

$$m\,\ddot{y}_S = F_2 - m\,g$$

$$I\,\ddot{\varphi} = \frac{m}{12}\,l^2\,\ddot{\varphi} = \frac{l}{2}\left(F_2\sin\varphi - F_1\cos\varphi\right)$$

Die drei Gln. enthalten fünf Unbekannte: $\ddot{x}_S, \ddot{y}_S, \ddot{\varphi}, F_1, F_2$.
Der kinematische Zusammenhang liefert zwei weitere Gln.:

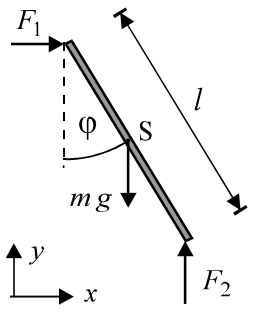


Abb. 1 Das Freikörperbild enthält drei externe Kräfte.

$$x_S = \frac{l}{2}\sin\varphi \qquad y_S = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x}_S = \frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

$$\text{und} \qquad \ddot{y}_S = -\frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} = \frac{3\,g}{2\,l}\sin\varphi$$

Bemerkung: Für die Anfangsbedingungen $\varphi_0 > 0$ und $\dot{\varphi}_0 = 0$ ergibt sich F_1 aus den drei Bewegungsgln. zu

$$F_1 = \frac{m\,l}{2}\left(\frac{3\,g}{2\,l}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi \underset{\text{Energiesatz}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{3}{2}\,m\,g\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)\sin\varphi$$

Für $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}\cos\varphi_0$ wird $F_1 = 0$ und der Stab löst sich im weiteren Verlauf der Bewegung von der Wand.

6–15 Zuschlagende Autotür

a) Die Schwerpunktkoordinaten der Tür werden mit x_S, y_S bezeichnet. Dann lauten die Bewegungsgln. nach dem Freikörperbild in Abb. 1:

$$m\,\ddot{x}_S = F_x \qquad m\,\ddot{y}_S = F_y \qquad (1/2)$$

$$I_S\,\ddot{\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (6.2–8a) für } c \ll b}}{=} \frac{m}{12}\,b^2\,\ddot{\varphi} =$$

$$= F_x\,\frac{b}{2}\cos\varphi - F_y\,\frac{b}{2}\sin\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gln. (1/2)}}}{=}$$

$$= \frac{m\,b}{2}\left(\ddot{x}_S\cos\varphi - \ddot{y}_S\sin\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} = \frac{6}{b}\left(\ddot{x}_S\cos\varphi - \ddot{y}_S\sin\varphi\right) \qquad (3)$$

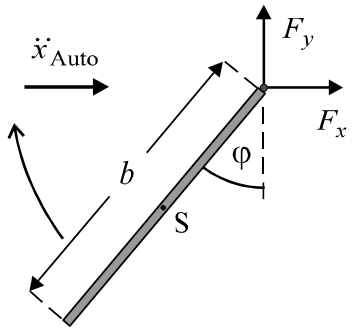


Abb. 1 Aufsicht auf die zuschlagende Tür. Zu Beginn der Beschleunigung ist $\varphi = 0$; beim Zuschlagen ist $\varphi = \pi/2$.

Die Beschleunigungen $\ddot{x}_S$, $\ddot{y}_S$ des Schwerpunktes S der Tür müssen nun als Funktion des Winkels φ und seiner Zeitablenkungen berechnet werden:

$$x_S = x_{\text{Auto}} - \frac{b}{2}\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_S = \ddot{x}_{\text{Auto}} - \frac{b}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

$$y_S = -\frac{b}{2}\cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y}_S = \frac{b}{2}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)$$

Die berechneten Beschleunigungen $\ddot{x}_S$, $\ddot{y}_S$ werden in die Gl. (3) eingesetzt:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\,\frac{\ddot{x}_{\text{Auto}}}{b}\cos\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Multiplikation mit } \dot{\varphi}}}{\Rightarrow} \dot{\varphi}\,\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\,\frac{\ddot{x}_{\text{Auto}}}{b}\,\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (4)$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\,\frac{\ddot{x}_{\text{Auto}}}{b}\sin\varphi\right) \qquad (5)$$

Bemerkung: Durch Berechnung der Ableitungen beweist man sehr schnell die Richtigkeit der Gl. (5).

Integration der Gl. (5) führt auf

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3\,\ddot{x}_{\text{Auto}}}{b}\sin\varphi + \text{const}$$

Wegen $\dot{\varphi}(\varphi = 0) = 0$ ist die Integrationskonstante null.

$$\Rightarrow \qquad \dot{\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{3\,\ddot{x}_{\text{Auto}}}{b}}$$

Folglich fällt die Tür mit folgender Geschwindigkeit ins Schloss:

$$v_{\text{Tür}} = b\,\dot{\varphi}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3\,b\,\ddot{x}_{\text{Auto}}}$$

b) Das künstliche horizontale Schwerefeld hat die Schwerebeschleunigung $\ddot{x}_{\text{Auto}}$; sie tritt an die Stelle von g. Nach dem Energieerhaltungssatz der Mechanik ist die potentielle Energie am Anfang der Schwingung bei $\varphi = 0$ gleich der kinetischen Energie im Gleichgewichtspunkt bei $\varphi = \pi/2$:

$$m\,\ddot{x}_{\text{Auto}}\,\frac{b}{2} = \frac{I_{\text{Scharnier}}}{2}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{6}\,b^2\,\dot{\varphi}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3\,\ddot{x}_{\text{Auto}}}{b}}$$

6–16 Stoßmittelpunkt

Der Stoß soll sehr kurz sein, so dass während des Stoßes der Stab *kaum ausschlägt* und die Gewichtskraft vernachlässigt werden kann. Während des Stoßes übt das Lager die Kraft A_x auf den Stab aus.

Das zweite Newtonsche Axiom $F(t) = \dot{p}(t)$ führt nach einer Integration über die Zeit auf

$$\hat{F} := \int_0^t F(t')\,dt' = \int_0^t \dot{p}(t')\,dt' = p(t) - p(0)$$

Demnach ist das Zeitintegral $\hat{F}$ der Kraft – „Kraftstoß“ oder „Stoßkraft“ genannt – die Impulsänderung. Die Zeitintegration des Schwerpunktsatzes $F^{\text{ext}} = F + A_x = m\,\ddot{x}_{\text{S}}$ ergibt nach Abb. 1:

$$\int_0^T \left[F(t) + A_x(t)\right] dt = \hat{F} + \hat{A}_x = m\,v_{\text{S};0} \qquad (1)$$

mit T = Stoßdauer

$v_{\text{S};0}$ = Schwerpunktgeschwindigkeit direkt nach dem Schlag

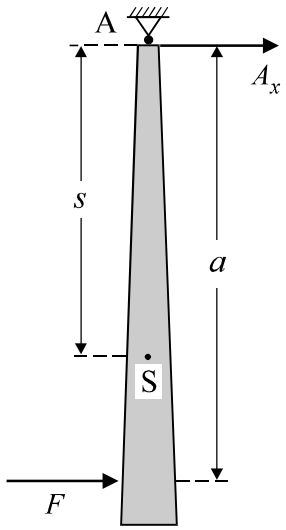


Abb. 1 Ein kurzer Kraftstoß wirkt auf den hängenden Stab.

Die Zeitintegration des Drehimpulssatzes $I_{\text{S}}\,\ddot{\varphi} = M_{\text{S}}$ führt auf

$$I_{\text{S}}\,\omega_0 = (a-s)\int_0^T F(t)\,dt - s\int_0^T A_x(t)\,dt =$$

$$= (a-s)\,\hat{F} - s\,\hat{A}_x \underset{\text{Gl. (1)}}{=} a\,\hat{F} - s\,m\,v_{\text{S};0} \qquad (2)$$

mit ω_0 = Winkelgeschwindigkeit unmittelbar nach dem Kraftstoß

I_{S} = Trägheitsmoment für Drehungen um den Schwerpunkt

Mit $v_{\text{S};0} = s\,\omega_0$ (3)

haben wir drei Gln. für die drei Unbekannten $v_{\text{S};0}, \omega_0, \hat{A}_x$. Mit dem Steinerschen Satz folgt:

$$\hat{A}_x = m\,v_{\text{S};0}\left(1 - \frac{I_{\text{S}}}{m\,a\,s} - \frac{s}{a}\right) \underset{I_{\text{A}} = I_{\text{S}} + m s^2}{=} m\,v_{\text{S};0}\left(1 - \frac{I_{\text{A}}}{m\,a\,s}\right)$$

Daher ist die Lagerkraft A_x genau dann null, wenn $a = I_{\text{A}}/(m\,s)$.

Lösungen: 7 Lineare Schwingungen

7–6 Stoß gegen einen harmonischen Oszillator

a) Hinweis: Anfangs wissen wir nicht, ob der 20-prozentige Energieverlust der Kugel vollständig als mechanische Energie auf die Masse m_1 übertragen wird oder nicht. Wir wissen also anfangs nicht, ob der Stoß elastisch ist oder unelastisch.

20% der ursprünglichen kinetischen Kugel-Energie geht verloren, d. h.:

$$\frac{m_2}{2} v_2^2 \cdot 0{,}8 = \frac{m_2}{2} u_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = \sqrt{0{,}8}\; v_2$$

b) Die x-Komponente der Kugelgeschwindigkeit bleibt erhalten, da beim Zusammenstoß keine Kraft in x-Richtung wirkt:

$$u_{2x} = v_{2x} = v_2 \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$$

$$0{,}8 \cdot v_2^2 = u_2^2 = u_{2x}^2 + u_{2y}^2 = \frac{1}{2} v_2^2 + u_{2y}^2 \qquad \Rightarrow \qquad u_{2y} = \sqrt{0{,}3}\; v_2$$

c) Hinweis: Bei dem *kurzen* Stoß kann das System, das aus den beiden Massen m_1, m_2 besteht, als kräftemäßig abgeschlossen angesehen werden. Denn es gilt:

- Die Gewichtskraft $m_1 g$ wird durch die beiden Federkräfte ausgeglichen.
- Die Gewichtskraft $m_2 g$ auf die Kugel kann während des sehr kurzen Stoßes keine Wirkung entfalten und darf daher unberücksichtigt bleiben.

Für den Stoß in y-Richtung gilt der Impulssatz:

$$m_1 \cdot 0 + m_2 \frac{v_2}{\sqrt{2}} = m_1 u_1 - m_2 \sqrt{0{,}3}\; v_2 \qquad \text{mit} \qquad u_1 = \text{Geschwindigkeit der Masse } m_1 \text{ unmittelbar nach dem Stoß}$$

$$\Rightarrow \qquad u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{0{,}3} \right) \frac{m_2}{m_1} v_2$$

$$\Rightarrow \qquad A \underset{\text{Gl. (7.1–6)}}{=} \sqrt{\underbrace{x_0^2}_{=0} + \left(\frac{u_1}{\omega_0} \right)^2} = \frac{u_1}{\omega_0} = u_1 \sqrt{\frac{m_1}{D_1 + D_2}}$$

Bemerkung: Nach dem Stoß beträgt die gesamte mechanische Energie

$$E_{\text{nach}} = \frac{D_1 + D_2}{2} A^2 + \frac{m_2}{2} u_2^2 = \frac{m_2}{2} v_2^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{0{,}3} \right)^2 \frac{m_2}{m_1} + 0{,}8 \right]$$

Wenn die eckige Klammer gleich Eins ist, dann ist die gesamte mechanische Energie vor und nach dem Stoß gleich groß, dann ist also der Stoß elastisch. Daraus folgt:

* Der Stoß ist elastisch für $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{0{,}2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 0{,}3\right)^2} \approx 0{,}127$; dann gilt $\dfrac{m_2}{2} v_2^2 =: E_{\text{vor}} = E_{\text{nach}}$.

* Der Stoß ist unelastisch für $m_2 / m_1 < 0{,}127$.

* Für $m_2 / m_1 > 0{,}127$ ist ein Stoß mit den Angaben in der Aufgabenstellung nicht möglich, weil die Energie in diesem Fall zunehmen würde: $E_{\text{vor}} < E_{\text{nach}}$.

7–14 Sturz eines Radios

a) Die Aufgabe kann mit zwei Methoden gelöst werden:

1. Methode: Energieerhaltung. Die Lageenergie des Radios im Schwerefeld soll im tiefsten Punkt der Bewegung null sein. Dann gilt wegen der Energieerhaltung:

$$\underbrace{m\,g\,\left(h + x_{\max}\right)}_{\text{Energie vor dem Fall}} = \underbrace{\frac{2\,D}{2}\,x_{\max}^2}_{\text{Energie im tiefsten Punkt}}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\max\,1/2} = \frac{m\,g}{2\,D} \pm \sqrt{\left(\frac{m\,g}{2\,D}\right)^2 + \frac{m\,g\,h}{D}} \approx 0{,}981\ \text{cm} \pm 9{,}953\ \text{cm}$$

Das positive Vorzeichen vor der Wurzel liefert die Stauchung der Federn im tiefsten Punkt:

$$x_{\max} \approx 10{,}934\ \text{cm}$$

2. Methode: Schwingungstheorie. Die maximale Stauchung $x_{\max}$ der Federn ist die Summe aus der Stauchung x_{Gl} in der neuen Gleichgewichtslage (nach dem Ausschwingen der Kiste) und der Schwingungsamplitude *A*:

$$x_{\max} = x_{\text{Gl}} + A = \frac{m\,g}{2\,D} + \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \underset{v_0 = \sqrt{2\,g\,h}}{=}$$

$$= \frac{m\,g}{2\,D} + \sqrt{\left(\frac{m\,g}{2\,D}\right)^2 + \frac{2\,g\,h}{2\,D/m}} \approx 10{,}934\ \text{cm}$$

b) Auch Teil b kann mit zwei Methoden gelöst werden:

1. Methode: 2. Newtonsches Axiom. Im tiefsten Punkt der Bewegung wird das Radio maximal (nach oben) beschleunigt. Es gilt:

$$m\,\ddot{x}_{\max} = m\,g - F_{\text{Feder}}^{\max} = m\,g - 2\,D\,x_{\max} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_{\max} \approx -99{,}53\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -10{,}15 \cdot g$$

2. Methode: Schwingungstheorie. Nach dem Aufschlag schwingt das Radio um die neue Gleichgewichtslage harmonisch auf und ab:

$$x(t) = -A\cos(\omega_0\,t) \qquad \Rightarrow \qquad \left|\ddot{x}_{\max}\right| = A\,\omega_0^2 = \sqrt{\left(\frac{m\,g}{2\,D}\right)^2 + \frac{g\,h\,m}{D}}\,\frac{2\,D}{m} \approx 99{,}53\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

7–19 Uhrenvergleich London – Äquator

a) $$\frac{dT}{dg} = -\frac{1}{2}\,2\pi\frac{\sqrt{l}}{g^{3/2}} = -\frac{1}{2}\frac{T}{g}$$

Daher gilt für kleine Änderungen Δg der Erdbeschleunigung

$$\Delta T \approx \frac{dT}{dg}\,\Delta g = -\frac{T}{2}\frac{\Delta g}{g} \qquad (1)$$

b) Die Zentrifugalbeschleunigung ist am Äquator maximal und beträgt dort

$$R_{\text{Erde}}\,\omega_{\text{Erde}}^2 \;\approx\; 6{,}38\cdot 10^6\ \text{m}\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\,\frac{1}{\text{s}}\right)^2 \approx$$

$$\approx\; 0{,}0307\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wir betrachten nun einen beliebigen Ort auf der Erdoberfläche mit Breitengrad α. Die Erdbeschleunigung $\mathbf{g}$ ist die Summe

- der Schwerebeschleunigung $\mathbf{g}_0$, die durch die Gravitation erzeugt wird und für eine (nahezu) kugelförmige Erde zum Erdmittelpunkt zeigt, und
- der Zentrifugalbeschleunigung $\omega_{\text{Erde}}^2\,\mathbf{R}_\perp$:

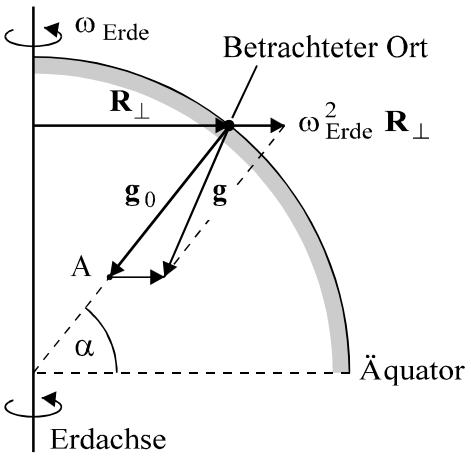


Abb. 1 Auf dem Breitengrad α wirken die Schwerebeschleunigung $\mathbf{g}_0$ und die Zentrifugalbeschleunigung $\omega_{\text{Erde}}^2\,\mathbf{R}_\perp$.

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \omega_{\text{Erde}}^2\,\mathbf{R}_\perp = \begin{pmatrix} -g_0\cos\alpha + \omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}}\cos\alpha \\ -g_0\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad |\mathbf{g}| \;=\; g \;=\sqrt{g_0^2 - 2\,g_0\,\omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}}\cos^2\alpha + \left(\omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}}\cos\alpha\right)^2} \;=$$

$$= g_0\sqrt{1 - 2\cos\alpha\,\frac{\omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}}\cos\alpha}{g_0} + \left(\frac{\omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}}\cos\alpha}{g_0}\right)^2} \qquad (2)$$

$\approx$ (↑ Taylorentwicklung für $\omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}} \ll g_0$)

$$\approx \quad g_0 - \omega_{\text{Erde}}^2\,R_{\text{Erde}}\cos^2\alpha$$

($\approx$ (↑ $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$))

Bemerkung: Man kann auch ohne Taylorentwicklung, also mit der komplizierteren Gl. (2) weiter rechnen.

Daher ist der Betrag der Erdbeschleunigung am Äquator um

$$\Delta g \;\approx\; R_{\text{Erde}}\,\omega_{\text{Erde}}^2\left(\cos^2 0° - \cos^2 51{,}5°\right) \approx 0{,}0207\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

kleiner als in London.

$$\Rightarrow \qquad T_{\text{Äquator}} = T_{\text{London}} + \Delta T \underset{\text{Gl (1)}}{\approx} T_{\text{London}} - \frac{T_{\text{London}}}{2}\,\frac{\Delta g}{g} \approx$$

$$\approx T_{\text{London}}\left(1 + \frac{0{,}0207}{2 \cdot 9{,}81}\right) \approx 1{,}001055 \cdot T_{\text{London}}$$

Für $T_{\text{London}} = 1\,\text{s}$ schwingt die Pendeluhr an einem Tag

* in London $24 \cdot 3600 = 86400$ mal hin und her

* am Äquator $86400 / T_{\text{Äquator}} \approx 86309$ mal hin und her.

Daher geht die Pendeluhr aufgrund der Erdrotation am Äquator täglich um etwa 91 s nach.

Hinweis: Da die Temperatur am Äquator höher ist als in London, ist die Pendelstange wegen der Wärmedehnung am Äquator etwas länger als in London. Auch dieser Effekt lässt die Pendeluhr am Äquator nachgehen. Nach Beispiel 10.2–2 beträgt der durch die hohen Temperaturen verursachte tägliche Zeitfehler etwa 12 s.