30 Interferenz

30–10 Spektrales Auflösungsvermögen eines Gitters

a) Nach Gl. (30.2–2) und nach den Abbn. 30.2–2a/b liegen zwischen den Interferenz-Hauptmaxima $N-1$ Minima und $N-2$ Nebenmaxima. Wir definieren:

Für die Wellenlänge λ : $\alpha_m^{1.\,\mathrm{Min}} :=$ Winkel des ersten *Minimums* direkt oberhalb des Haupt-*Maximums* m-ter Ordnung

Für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$: $\alpha_m^{\max} :=$ Winkel des Hauptmaximums m-ter Ordnung

Laut Erfahrung sind die m-ten Hauptmaxima der beiden benachbarten Wellenlängen gerade noch getrennt wahrnehmbar, wenn gilt:

$$\sin\alpha_m^{1.\,\mathrm{Min}} = \left(m + \frac{1}{N}\right)\frac{\lambda}{d} \stackrel{!}{=} \sin\alpha_m^{\max} = m\,\frac{\lambda + d\lambda}{d}$$

In der runden Klammer wird $1/N$ zu m addiert, weil die Breite der $N-2$ Nebenmaxima und die halbe Breite der Hauptmaxima gleich groß sind (siehe hierzu auch unbedingt Gl. (1) in Aufgabe 30–2 und die Abb. 30.2–2a/b).

$$\Rightarrow \qquad A_{\mathrm{Spekt}} = \frac{\lambda}{d\lambda} = m\,N \tag{1}$$

Das spektrale Auflösungsvermögen ist proportional zur Ordnung m und erwartungsgemäß proportional zur Zahl N der Spalte. Die erste Proportionalität wird durch Abb. 30.9–4 verdeutlicht: Danach wächst der Abstand der Interferenzmaxima linear mit der Ordnung m.

Natürlich gelten die Gl. (30.2–2) für das Interferenzmuster $I(\alpha)$ und die vorangehende Gl. (1) nur dann, wenn der auf das Gitter einfallende Strahl so breit ist, dass alle N Spalte *vollständig* kohärent ausgeleuchtet werden.

b) Für die Interferenzmaxima gilt:

$$\sin\alpha_m^{\max} = m\,\frac{\lambda}{d} = m\,\frac{588{,}9936\ \mathrm{nm}}{6{,}\overline{6}\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} \approx m\cdot 0{,}88 \tag{2}$$

Wegen $\sin\alpha \le 1$ treten nur die Interferenzmaxima nullter und erster Ordnung auf. Da im Interferenzmaximum nullter Ordnung alle Farben zusammenfallen, müssen wir das Maximum erster Ordnung betrachten: $m = 1$. Aus Gl. (1) folgt für $m = 1$:

$$d\lambda = \frac{\lambda}{N} = \frac{588{,}9936\ \mathrm{nm}}{1500\cdot 80} \approx 0{,}0049\ \mathrm{nm} < \lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}5967\ \mathrm{nm}$$

Die beiden Wellenlängen können mit dem Gitter aufgelöst werden.

Bemerkung: Das Auflösungsvermögen $A_{\mathrm{Spekt}} = m\,N$ lässt sich steigern, indem man mit einer höheren Ordnung m arbeitet oder die Zahl N der Spalte vergrößert. Eine Erhöhung von m ist aber nur möglich, solange

$\sin\alpha_m^{\max}$ kleiner als Eins bleibt. Bei unserem Gitter ist $m = 2$ nicht möglich. Nur die Zunahme der Zahl N der beleuchteten Spalte führt zu einer Steigerung von A_{Spek}. Es gibt Gitter mit $N > 10^5$.

30–16 Interferenz bei schiefem Einfall auf ein Gitter

a) Die Bedingung für Interferenzmaxima lautet

$$d\,(\sin\alpha + \sin\beta) = m\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{d}{m}(\sin\alpha + \sin\beta) \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1)$$

b) Die Fragestellung ist z. B. interessant fürs physikalische Praktikum: Das Spektrum einer Lichtquelle soll mit Interferenz am Gitter bestimmt werden. Wie groß ist der Fehler bei der Bestimmung der Wellenlänge, wenn das Gitter unbemerkt leicht verdreht wird?

Nach der unbemerkten Drehung des Gitters hat das waagerecht einfallende Licht den Winkel β gegenüber dem Gitter. Nach Abb. 1 lautet die Bedingung für Interferenzmaxima

$$d\,[\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta] = m\lambda$$

Daraus folgt die Wellenlänge des Lichtes, das in der Richtung α das m-te Interferenzmaximum hat, zu

$$\lambda = \frac{d}{m}[\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta]$$

Wenn der Praktikant nicht bemerkt hat, dass das Gitter um den Winkel β gedreht wurde, dann berechnet er die Wellenlänge mit der üblichen, hier aber falschen Gl.

$$\lambda_{\text{berechnet}} = \frac{d}{m}\sin\alpha \qquad m = 0, \pm 1, \ldots$$

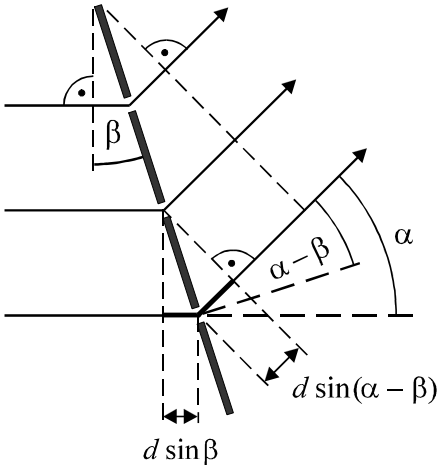


Abb. 1 Das Gitter wurde um den kleinen Winkel β gedreht. β wird hier übertrieben groß dargestellt.

Folglich tritt bei der Messung folgender Fehler auf:

$$\Delta\lambda = \frac{d}{m}\left[\sin\alpha - \{\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta\}\right] =$$

$$= \frac{d}{m}(\sin\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\beta) \underset{\beta \ll 1}{=}$$

$$\approx \frac{d}{m}(\cos\alpha - 1)\beta = \frac{\lambda_{\text{berechnet}}}{\sin\alpha}(\cos\alpha - 1)\beta$$

Der Winkel β muss im Bogenmaß – nicht im Winkelmaß – angegeben werden. Für $\alpha = 20°$ und $\beta = 0{,}0175$ rad $\hat{=}\, 1°$ ist der relative Fehler $\Delta\lambda/\lambda_{\text{berechnet}} = -3{,}1 \cdot 10^{-3}$. Dieser Fehler ist relativ groß, da Wellenlängen am Gitter im Praktikum mit unter 1% Genauigkeit gemessen werden.