

C Elektrizität

17 Elektrostatische Felder

Die Elektrostatik befasst sich mit ruhenden (statischen) Ladungen. Die Kraftwirkung zwischen Ladungen wird durch elektrische Felder beschrieben.

17.1 Elektrische Ladung

In der Mechanik gibt es die drei unabhängigen Grundgrößen Masse, Länge und Zeit mit den Einheiten Kilogramm, Meter und Sekunde. Alle anderen Größen wie z. B. Geschwindigkeit werden aus diesen Größen abgeleitet. *In der Elektrodynamik wird eine weitere, vierte Grundgröße benötigt: Die elektrische Stromstärke mit der Einheit Ampere.* Wir müssen die Einheit Ampere bereits jetzt bestimmen, da sie die Einheit Coulomb der elektrischen Ladungen festlegt. Die Einheit 'Ampere' wird wie folgt definiert:

Wenn in zwei geradlinigen, parallelen, sehr langen elektrischen Leitern mit dem Abstand 1 m Ströme gleicher Stärke fließen und wenn zwischen den Leitern pro Einheitslänge (1 m) eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N/m wirkt, dann ist der Strom in jedem Leiter gleich 1 Ampere (1 A).



Didaktisch gesehen hat diese Festlegung den Nachteil, dass sie einerseits schon am Anfang der Elektrodynamik benötigt wird, andererseits aber auf magnetische Kräfte zurückgreift, die erst viel später behandelt werden. Von Vorteil ist aber, dass durch diese Festlegung die magnetische Feldkonstante μ_0 exakt den Wert $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² erhält und dass die Einheit Ampere mit rein mechanischen Mitteln bestimmt werden kann. Allerdings muss der Leiterabstand bei der experimentellen Durchführung viel kleiner als 1 m sein.

Bei konstanter Stromstärke I besteht folgender Zusammenhang zwischen der Stromstärke und der geflossenen Ladung Q :

$$I = \frac{Q}{t} \quad \Leftrightarrow \quad Q = I t \quad \text{für konstante Stromstärke}$$

Damit ist die Einheit 'Coulomb' (abgekürzt 'C') der Ladung wie folgt festgelegt:

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ Ampere} \cdot \text{Sekunde} \quad \text{oder abgekürzt} \quad 1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$$

Experimentell wurden folgende Aussagen für elektrische Ladungen gefunden:

- Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Willkürlich wurde das Vorzeichen so festgelegt, dass die Ladung der Elektronen negativ ist. Ladungen mit gleichem bzw. verschiedenem Vorzeichen stoßen sich ab bzw. ziehen sich an. Im Gegensatz zur Gravitationskraft, die nur anziehend ist, gibt es hier also anziehende und abstoßende Kräfte.
- Es existiert eine kleinste Ladungsmenge, die sog. Elementarladung

$$e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (17.1-1)$$

Ein Elektron hat die Ladung $-e_0$, ein Proton die Ladung e_0 . Alle Ladungen Q sind stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung:

$$Q = n e_0 \quad \text{mit} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- In abgeschlossenen Systemen, d. h. in Systemen, denen weder Ladungen zugeführt noch entzogen werden, ist die Summe aller Ladungen konstant:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = \text{const} \quad \text{in abgeschlossenen Systemen}$$

Dieser Ladungserhaltungssatz ist vor allem in der Elementarteilchenphysik wichtig.

17.2 Die Coulombkraft

Die elektrische Ladung eines Körpers wird durch die Kräfte nachgewiesen, die andere geladene Körper auf ihn ausüben.¹ Wir betrachten zwei Ladungen Q_0, Q_1 mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$. Die Ladungen seien punktförmig, d. h. ihre Ausdehnungen seien viel kleiner als ihr Abstand. Nach den Experimenten, die vor allem der französische Physiker Coulomb gegen Ende des 18-ten Jahrhunderts machte, ist die sog. „Coulombkraft“ zwischen den Ladungen

- proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ der beiden Ladungen
- indirekt proportional zum Quadrat $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2$ des Abstandes
- parallel zur Verbindungslinie der beiden Ladungen.

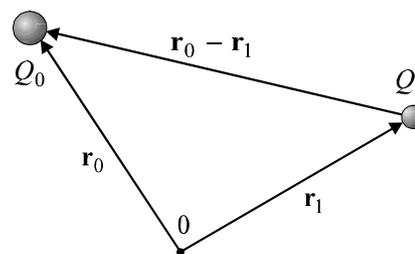


Abb. 17.2-1 Die Coulombkraft der Ladung Q_1 auf die Ladung Q_0 ist parallel zum Vektor $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$, proportional zum Produkt $Q_0 Q_1$ beider Ladungen und indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung.

¹ In gleicher Weise kann die Masse m eines Körpers gemessen werden, indem man die Gravitationskraft der Erde auf ihn misst.

Die Coulombkraft der Ladung Q_1 auf die Ladung Q_0 beträgt daher

$$\mathbf{F}_{01} = k \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|}$$

Diese Gl. heißt „Coulombsches Gesetz“. Für spätere Rechnungen ist es sehr vorteilhaft, die Konstante k in der Form $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ zu schreiben. Daraus folgt:

Die Coulombkraft der Punktladung Q_1 auf die Punktladung Q_0 beträgt:

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad (17.2-1)$$

ϵ_0 heißt „elektrische Feldkonstante“ oder „Dielektrizitätskonstante des Vakuums“ oder „Influenzkonstante“ und hat nach den Experimenten den Wert

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2} \quad (17.2-2)$$

In der Quantenmechanik beschreiben die Coulombkräfte die Bindung der Elektronen an den Atomkern, die Wechselwirkung zwischen Atomen und Molekülen und schließlich auch die zwischenatomaren Kräfte in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen.

Das Coulombgesetz (17.2-1) hat die gleiche Form wie das Gravitationsgesetz, das die Anziehungskraft zwischen zwei Massen beschreibt:

$$\mathbf{F}_{01} = -\gamma \frac{m_0 m_1}{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1)^2} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|} \quad \text{mit der Gravitationskonstanten} \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass es nur positive Massen und nur anziehende Gravitationskräfte gibt.

Da Coulombkräfte und Gravitationskräfte beide indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes sind, hängt ihr Verhältnis nicht vom Abstand ab. Das Verhältnis der beiden Kräfte ist für Protonen mit $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{8,988 \cdot 10^9 \text{ N m/C}^2 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2} \approx 1,24 \cdot 10^{36}$$

Atomkerne sind trotz der abstoßenden Coulombkräfte zwischen den Protonen stabil, weil Protonen und Neutronen durch die „Starke Wechselwirkung“ zusammengehalten werden, auf die wir nicht eingehen.

Beispiel 17.2-1 Pendel im Gleichgewicht

Zwei kleine Metallkugeln mit Masse m und Ladung Q hängen an Fäden der Länge l im selben Punkt an der Decke.

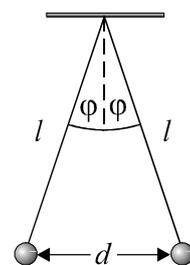


Abb. 17.2-2 Die Coulombkraft drückt die beiden Pendel auseinander.

Berechne die Entfernung d der Kugeln im Gleichgewicht für $d \ll l$.

Lösung:

Ein Pendel befindet sich im Gleichgewicht, wenn sein Faden parallel ist zur resultierenden Kraft $m\mathbf{g} + \mathbf{F}_C$, d. h. für $\varphi = \alpha$ (siehe Abb. 17.2–3):

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \varphi \approx \tan \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{2l} \approx \frac{F_C}{m g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \frac{1}{m g}$$

$$\Rightarrow d \approx \left(\frac{Q^2 l}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}$$

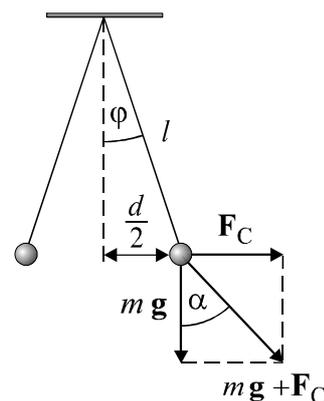


Abb. 17.2–3 Gewichtskraft $m\mathbf{g}$ und Coulombkraft \mathbf{F}_C .

Das Coulombgesetz kann leicht auf mehrere ruhende Ladungen verallgemeinert werden: n Punktladungen Q_i mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_i üben insgesamt auf eine Punktladung q an der Stelle \mathbf{r} die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.2-3)$$

aus. Die gesamte Coulombkraft ist also einfach die Vektorsumme der n einzelnen Coulombkräfte; es gilt das Superpositionsprinzip.

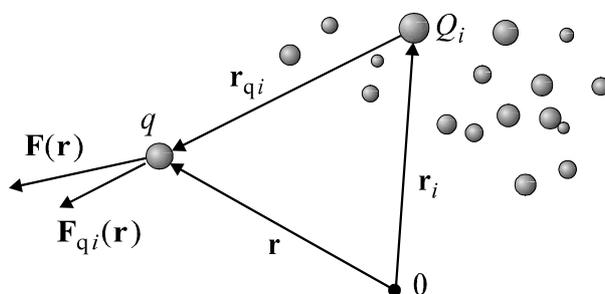


Abb. 17.2–4 Die gesamte Kraft aller Punktladungen Q_i auf die Ladung q ist die Vektorsumme der n Einzelkräfte $\mathbf{F}_i(\mathbf{r})$ der i -ten Ladung auf die Ladung q .

17.3 Das elektrische Feld

Wir betrachten nochmals Abb. 17.2–4: n Ladungen Q_i mit festen Ortsvektoren \mathbf{r}_i üben auf eine Probeladung q am Ort \mathbf{r} die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-1)$$

aus. Die Kraft \mathbf{F} ist proportional zur Probeladung q und kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (17.3-2)$$

Diese Gl. definiert eine neue physikalische Größe, das “elektrische Feld“ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, das die n Ladungen Q_i am Ort \mathbf{r} erzeugen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (17.3-3)$$

Die Einheit des elektrischen Feldes² ist N/C. Mit der später eingeführten Einheit ‘Volt’ für die Spannung lautet die Einheit V/m:

$$\text{Einheit des elektrischen Feldes: } \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (17.3-4)$$

Das elektrische Feld ist unabhängig von der Probeladung q und hängt nur von der Verteilung der Ladungen Q_i ab. Nach dem Superpositionsprinzip überlagern sich die elektrischen Felder mehrerer Ladungen linear. Das elektrische Feld einer positiven Punktladung zeigt radial nach außen.

Bemerkung: Elektrische Felder lassen sich durch Kräfte auf Probeladungen bestimmen. Dabei muss die Probeladung q so klein sein, dass sie die Verteilung der Ladungen Q_i , d. h. die Ortsvektoren \mathbf{r}_i durch rückwirkende Kräfte nicht (wesentlich) ändert. Andernfalls würde sich das zu messende Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ bei der Messung ändern.

Beispiel 17.3–1 Feldstärke im Fernfeld eines Dipols

Ein Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen mit dem Abstand $2d$. Betrachte einen Dipol, dessen Ladungen übereinander liegen und berechne das elektrische Feld im Punkt P,

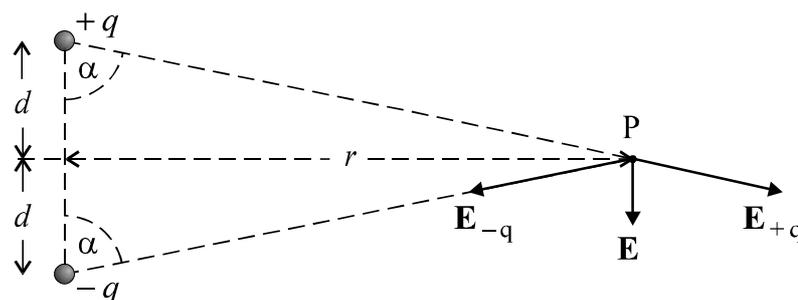


Abb. 17.3–1 Dipol mit elektrischen Feldern im Fernpunkt P. Es gelte: $q > 0$

² Der Begriff „Feld“ ist ein zentraler Begriff in der Physik. Allgemein ist ein Feld eine physikalische Größe, die vom Ort \mathbf{r} und von der Zeit t abhängt. Es gibt zwei Arten von Feldern:

- Skalare Felder $F = F(\mathbf{r}, t)$: Ein Beispiel ist das Temperaturfeld $T(\mathbf{r}, t)$, das die Temperaturverteilung – z. B. eines Gases in der Atmosphäre – beschreibt, indem es jedem Ort \mathbf{r} zu jeder Zeit t eine Temperatur zuordnet.
- Vektorfelder $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$: Beispiele sind das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und das später eingeführte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.

der im Fernfeld ($r \gg d$) auf einer horizontalen Gerade liegt, die die Verbindungslinie beider Ladungen in der Mitte senkrecht schneidet.

Lösung:

Im Punkt P sind die Beträge der beiden elektrischen Felder, die von den beiden Ladungen erzeugt werden, gleich groß und lauten

$$E_{+q} = E_{-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2}$$

Die Summe \mathbf{E} der beiden Vektorfelder \mathbf{E}_{+q} , \mathbf{E}_{-q} ist vertikal und hat den Betrag

$$\begin{aligned} E &= 2 E_{+q} \cos \alpha = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \\ &= \frac{2dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (\text{exakt auch im Nahfeld}) \end{aligned} \quad (17.3-5a)$$

$$\Rightarrow E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur für} \\ r \gg d}}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dq}{r^3} \quad (\text{nur im Fernfeld}) \quad (17.3-5b)$$

Der Ladungsabstand $2d$ und die Ladung q treten nur als Produkt auf. Da dieses Ergebnis für alle Punkte im Fernfeld gilt (also auch für Punkte, die nicht auf der gestrichelten, horizontalen Achse in Abb. 17.3-1 liegen), können die Ladung q und der Abstand $2d$ im Fernfeld nicht einzeln gemessen werden, sondern nur das sog. „elektrische Dipolmoment“

$$p := 2dq \quad (17.3-6)$$

Der rasche Abfall des Feldes mit r^{-3} ist darauf zurückzuführen, dass die beiden Ladungen mit zunehmendem Abstand r sozusagen immer näher „zusammenrücken“, so dass ihre Felder nicht nur immer schwächer werden, sondern sich auch immer mehr gegeneinander aufheben.

Wenn in einem Volumen V nicht einzelne Ladungen Q_i , sondern eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad \text{an der Stelle } \mathbf{r} \quad (17.3-7)$$

vorliegt, dann lautet das elektrische Feld an der Stelle \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (17.3-8)$$

Beispiel 17.3-2 Feldstärke auf der Symmetrieachse einer geladenen Scheibe

a) Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(x)$ in einem Punkt P auf der Symmetrieachse eines homogen geladenen, dünnen Ringes mit Radius r_{Ring} und positiver Gesamtladung Q .

b) Berechne das Feld $\mathbf{E}(x)$ auf der Symmetrieachse einer geladenen Scheibe mit Radius r_{Scheibe} , positiver Gesamtladung Q und konstanter Flächenladungsdichte $\sigma := Q/(\pi r_{\text{Scheibe}}^2)$.

c) Untersuche die Grenzfälle

$$x \gg r_{\text{Scheibe}} \quad \text{und} \quad x \ll r_{\text{Scheibe}}$$

Lösung:

a) Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld \mathbf{E} auf der x -Achse parallel zur x -Achse. Das dunkle Volumenelement in Abb. 17.3–2 erzeugt auf der Symmetrieachse im Punkt P ein Feld mit dem Betrag

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente bleibt nur die Komponente in x -Richtung übrig:

$$\begin{aligned} dE_x = dE \cos\alpha &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_{\text{Ring}}^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{r_{\text{Ring}}^2 + x^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Bei der Integration über alle Volumenelemente ist x konstant, so dass nur das Integral $\int dQ = Q$ zu berechnen ist. Wir erhalten

$$E_{\text{Ring}}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xQ}{(r_{\text{Ring}}^2 + x^2)^{3/2}} \quad (17.3-9)$$

Für $x \gg r_{\text{Ring}}$ folgt das plausible Ergebnis: $E_{\text{Ring}}(x) \approx Q/(4\pi\epsilon_0 x^2)$

b) Wir nehmen an, dass die Scheibe aus vielen konzentrischen Ringen besteht – jeweils mit Radius r , infinitesimaler Ringdicke dr und infinitesimaler Fläche $dA = 2\pi r dr$. Nach Gl. (17.3–9) erzeugen diese Ringe auf der Symmetrieachse Felder der Stärke

$$dE_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \stackrel{dQ = \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{=} \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Integration über alle Ringe ergibt das gesamte elektrische Feld

$$\begin{aligned} E_{\text{Scheibe}}(x) &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{r_{\text{Scheibe}}} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[(r^2 + x^2)^{-1/2} \right]_0^{r_{\text{Scheibe}}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{\text{Scheibe}}/x)^2}} \right] \end{aligned} \quad (17.3-10)$$

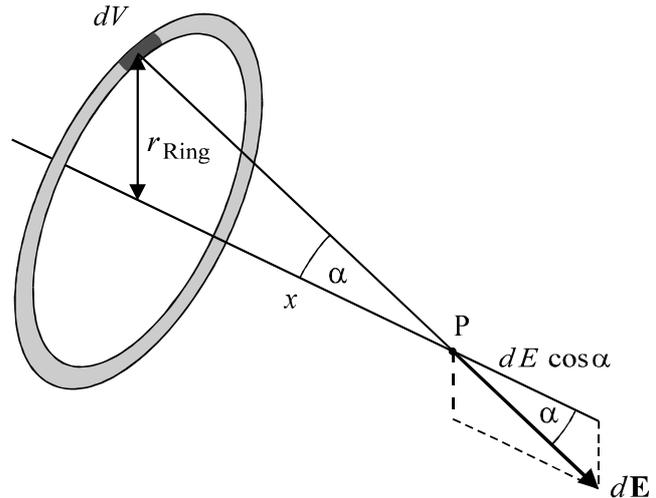


Abb. 17.3–2 Das dunkle Volumenelement dV erzeugt auf der Symmetrieachse das Feld $d\mathbf{E}$.

c) Für $x \gg r_{\text{Scheibe}}$ erhalten wir mit der Taylorentwicklung $(1 + \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \epsilon$ das Feld

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \gg r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{4 \epsilon_0} \frac{r_{\text{Scheibe}}^2}{x^2} \stackrel{\sigma = Q / (\pi r_{\text{Scheibe}}^2)}{=} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$$

Wie erwartet erhalten wir in großer Entfernung das Feld einer Punktladung Q . Für $x \ll r_{\text{Scheibe}}$ hingegen erhalten wir das elektrische Feld einer homogen geladenen, unendlich großen Platte:

$$E_{\text{Scheibe}}(x) \underset{x \ll r_{\text{Scheibe}}}{\approx} \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \quad \text{für homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platten} \quad (17.3-11)$$

(Siehe auch Beispiel (17.4–5).)

Das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann auf zwei Arten graphisch dargestellt werden:

- Man zeichnet an einigen ausgewählten Stellen \mathbf{r}_i den Vektor $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ auf (siehe Abb. 17.3–3a). Die Länge der gezeichneten Pfeile ist proportional zur Feldstärke.
- Man zeichnet die sog. „Feldlinien“, die wie folgt definiert sind: *Die Tangenten der Feldlinien haben überall die Richtung der elektrischen Feldstärke.* Hier ist die Dichte der Feldlinien proportional zur Feldstärke. *Die elektrischen Feldlinien beginnen bei einer positiven Ladung und enden bei einer negativen Ladung.* Sie schneiden sich nie.

In gleicher Weise werden in Unterkapitel „8.1 Grundlagen der Strömungslehre“ die Stromlinien definiert: Die Tangenten der Stromlinien haben die augenblickliche Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Nach der Kontinuitätsgl. wächst die Dichte der Stromlinien mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit.

Feldlinien ergeben übersichtlichere Bilder und werden daher meistens bevorzugt.

Abb. 17.3–4a zeigt die Feldlinien eines Dipols, also von zwei entgegengesetzt gleich großen Ladungen. Die Dichte der Feldlinien zeigt, dass die Feldstärke zwischen den Ladungen am größten ist. Abb. 17.3–4b zeigt die Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen. In der Mitte zwischen beiden Ladungen ist die Feldstärke exakt Null. Wenn keine negativen Ladungen vorhanden sind, enden die Feldlinien im Unendlichen.

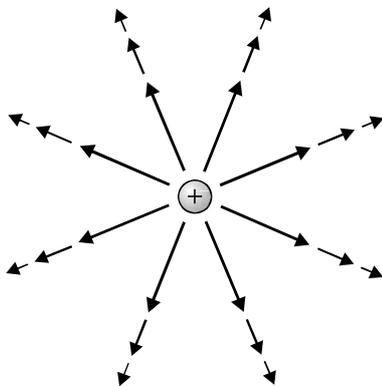


Abb. 17.3–3a Der Vektor der elektrischen Feldstärke wird an einigen Stellen eingezeichnet. Das Feld läuft von einer positiven Ladung weg.

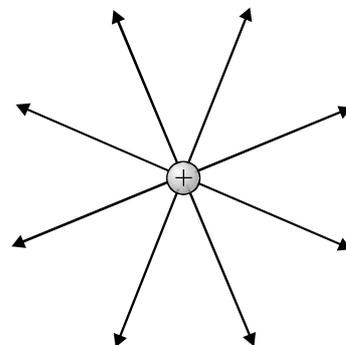


Abb. 17.3–3b Die Tangenten an die Feldlinien haben überall die Richtung der Feldstärke. Die Feldlinien laufen bei einer positiven Ladung nach außen.

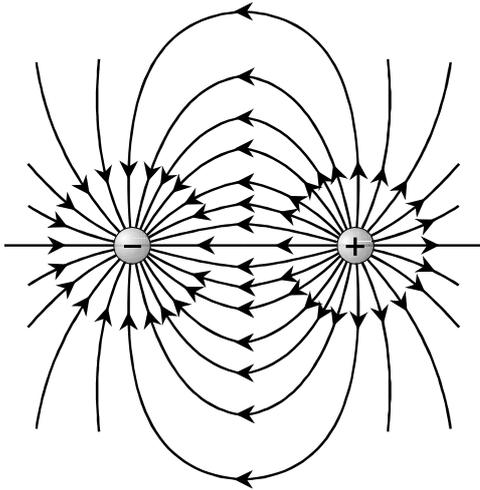


Abb. 17.3-4a Feldlinien eines Dipols.

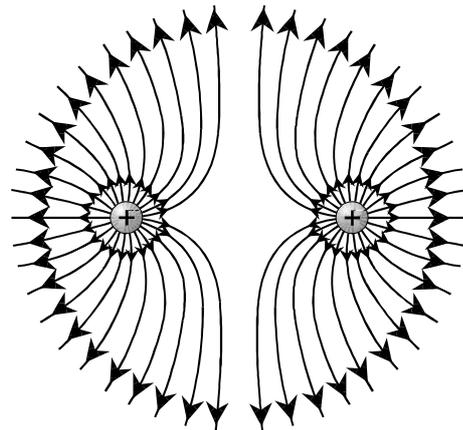


Abb. 17.3-4b Feldlinien von zwei gleich großen Ladungen.

Abb. 17.3-5 zeigt die Feldlinien von zwei verschiedenen großen Ladungen. In großer Entfernung zu den Ladungen sehen die Feldlinien ähnlich aus wie die Feldlinien einer Ladung $+Q$.

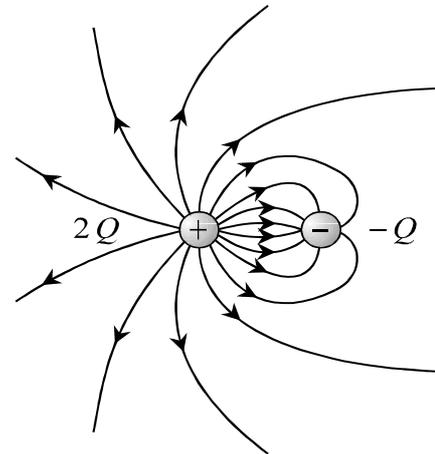


Abb. 17.3-5 Feldlinien von zwei verschieden großen Punktladungen.

17.4 Gaußscher Satz

Die Berechnung elektrischer Felder mit Gl. (17.3-3) oder mit Gl. (17.3-8) ist zwar immer möglich, kann aber mühsam sein. Wir werden nun mit dem Gaußschen Satz eine Berechnungsmethode kennen lernen, die zwar viel einfacher und vor allem eleganter ist, die dafür aber nur in wenigen symmetrischen Fällen angewendet werden kann.

Der Gaußsche Satz ermöglicht aber nicht nur die Berechnung elektrischer Felder, sondern gibt vor allem auch tiefere Einsichten in die Elektrostatik.

Vor der Einführung in den Gaußschen Satz müssen wir den Fluss Φ eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche definieren. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: Das Vektorfeld ist konstant und die Fläche ist eben. Eine ebene Fläche wird durch ihren Normalenvektor \mathbf{A} beschrieben, der laut Definition senkrecht auf der Fläche steht (bei einem Körper zeigt er immer nach außen) und dessen Länge gleich dem Flächeninhalt A ist. Der Fluss durch die ebene Fläche wird als Skalarprodukt definiert:

$$\Phi := \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \quad \text{für konstante Vektorfelder und ebene Flächen} \quad (17.4-1)$$

Beachte, dass der Fluss ein Skalar ist und daher keine Richtung hat. Das folgende Beispiel aus der Strömungslehre macht deutlich, warum das Skalarprodukt aus einem Vektorfeld und einer Fläche 'Fluss' heißt – selbst dann, wenn (wie in der Elektrostatik) Nichts strömt.

Beispiel 17.4–1 Der Fluss des Geschwindigkeitsfeldes einer strömenden Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit oder ein Gas strömt in horizontaler Richtung stationär und homogen, d. h. die Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} hängt weder vom Ort noch von der Zeit ab. Berechne den Fluss durch eine ebene Fläche \mathbf{A} und interpretiere die Bedeutung des Flusses in der Strömungslehre.

Lösung:

Das Skalarprodukt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = v A \cos \vartheta$$

ist das Produkt aus der Strecke, die das Fluid pro Sekunde zurücklegt, und der Fläche $\hat{A} = A \cos \vartheta$, die senkrecht durchströmt wird. Der Fluss $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ ist daher der Volumenstrom in m^3/s , d. h. das Volumen, das pro Sekunde durch die Fläche \mathbf{A} strömt.

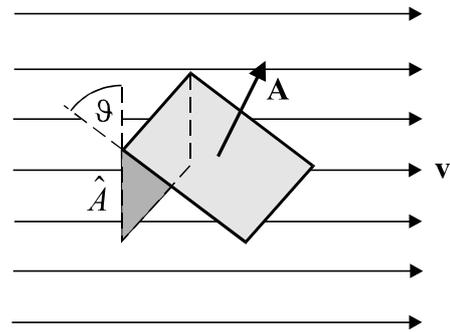


Abb. 17.4–1 Der Fluss eines Fluids durch eine Fläche \mathbf{A} ist gleich v mal die dunkle, projizierte Fläche \hat{A} .

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall: Das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ist nicht konstant oder die Fläche ist nicht eben. In diesem Fall wird die Fläche in n kleine Teilflächen mit Normalenvektoren $d\mathbf{A}_i$ zerlegt (siehe Abb. 17.4–2). Die Teilflächen sind so klein, dass sie näherungsweise eben sind und das Vektorfeld auf jeder Teilfläche ungefähr konstant ist. Nach Gl. (17.4–1) beträgt der Fluss

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{A}_i$$

Wenn die Teilflächen immer kleiner werden, dann geht die Summe in ein Integral über und wir erhalten die allgemeine Definition eines Flusses:

Der Fluss eines beliebigen Vektorfeldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ durch eine Fläche A ist definiert als Flächenintegral

$$\Phi := \int_A \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (17.4-2)$$

Demnach ist der Fluss des elektrischen Feldes

$$\Phi_E = \int_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \quad (17.4-3)$$

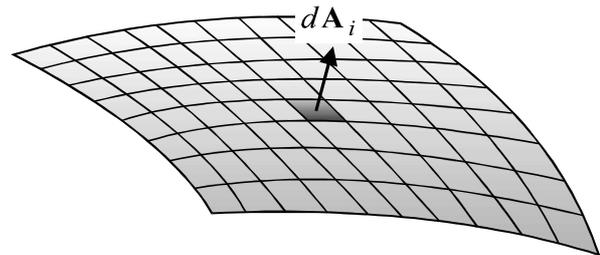


Abb. 17.4–2 Eine gekrümmte Fläche ist aus vielen kleinen, näherungsweise ebenen Flächenelementen zusammengesetzt.

Beispiel 17.4–2 Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung

Eine positive Punktladung Q ruht im Koordinatenursprung. Berechne den Fluss durch eine Kugel mit Radius r und Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \Phi_E &= \int_{A_{\text{Kugel}}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ \uparrow \\ \mathbf{r} \text{ parallel zu } d\mathbf{A} \end{array} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{A_{\text{Kugel}}} \frac{r}{r^3} \cdot dA \quad \begin{array}{l} \text{=} \\ \uparrow \\ r \text{ ist bei der Inte-} \\ \text{gration konstant} \end{array} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{4\pi r^2}_{A_{\text{Kugel}}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (17.4-4)
 \end{aligned}$$

Der Fluss des elektrischen Feldes ist die von der Kugel eingeschlossene Ladung Q dividiert durch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 . Dieses Ergebnis ist aus zwei Gründen bemerkenswert:

- Der Fluss hängt nicht vom Kugelradius ab, da mit zunehmendem Radius das elektrische Feld mit $1/r^2$ fällt und die Kugeloberfläche mit r^2 wächst.
- Bei der Coulombkraft wurde in Unterkapitel 17.1 die Proportionalitätskonstante k durch $1/(4\pi\epsilon_0)$ ersetzt, um das Ergebnis in Gl. (17.4–4) so einfach zu machen.

Man kann mathematisch beweisen, dass die Gl. (17.4–4) auf beliebige Ladungsverteilungen und beliebige Flächen verallgemeinert werden kann; man erhält so den Gaußschen Satz:

Gaußscher Satz

Der Fluss des elektrischen Feldes durch eine *beliebige, geschlossene* Fläche A ist gleich der Summe der *eingeschlossenen* Ladungen Q_i dividiert durch ϵ_0 :

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (17.4-5)$$

Ladungen außerhalb der geschlossenen Fläche, über die integriert wird, tragen nicht zum Fluss bei.

Der Gaußsche Satz liefert einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss durch eine geschlossene Fläche³ und der eingeschlossenen Ladung. In vielen Aufgaben mit symmetrischer Ladungsverteilung kann das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit einfachen Flächenintegralen berechnet werden. Dabei hat die Integrationsfläche die gleiche Symmetrie wie die Ladungsverteilung, so dass das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ entweder parallel oder senkrecht zu den Flächennormalen $d\mathbf{A}_i$ ist.

³ Eine Fläche heißt geschlossen, wenn sie ein Volumen vollständig einschließt. Die Oberflächen aller Körper sind geschlossen; ebene Flächen sind nie geschlossen.

Der Gaußsche Satz ist eine der vier Maxwell-Gln., die eine fundamentale Bedeutung für die Elektrodynamik haben – vergleichbar mit der Wichtigkeit der Newtonschen Axiome für die Mechanik. Oben wurde gesagt, dass der Gaußsche Satz mathematisch aus dem Coulombschen Gesetz (17.2–1) abgeleitet werden kann. Umgekehrt kann auch das Coulombsche Gesetz aus dem Gaußschen Satz und einfachen Symmetrieüberlegungen hergeleitet werden (siehe das folgende Beispiel 17.4–3). *Der Gaußsche Satz (17.4–5) ist daher äquivalent zum Coulombschen Gesetz (17.2–1).*

Wir beantworten nun zwei wichtige Fragen: Wie sehen elektrostatische Felder im Innern und im Außenraum von leitenden Körpern aus?

1) Felder und Ladungen im Leiterinneren: Werden Ladungen auf oder in einen beliebig geformten, leitenden Körper gebracht, dann treten sehr kurzzeitig elektrische Felder im Körperinneren auf. Sie *verschieben die Ladungen solange, bis die elektrischen Felder im Körperinneren verschwinden*. (Den schwierigen mathematischen Beweis dieser Aussage können wir hier leider nicht erbringen.) Daher gilt:



Leitende Körper sind in der Elektrostatik im Innern feldfrei: $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$

Diese Aussage gilt nur für statische elektrische Felder, also nur, wenn keine Ströme fließen.

Wir berechnen nun den elektrische Fluss Φ_E für eine geschlossene Integrationsfläche, die dicht unter der Oberfläche des Leiters liegt (siehe Abb. 17.4–3). Aus $\mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0}$ folgt $\Phi_E = 0$, so dass die Integrationsfläche keine Ladungen umschließt. Daher gilt:



In der Elektrostatik ist das Innere eines leitenden Körpers nicht nur feldfrei, sondern auch ladungsfrei: $Q_{\text{innen}} = 0$

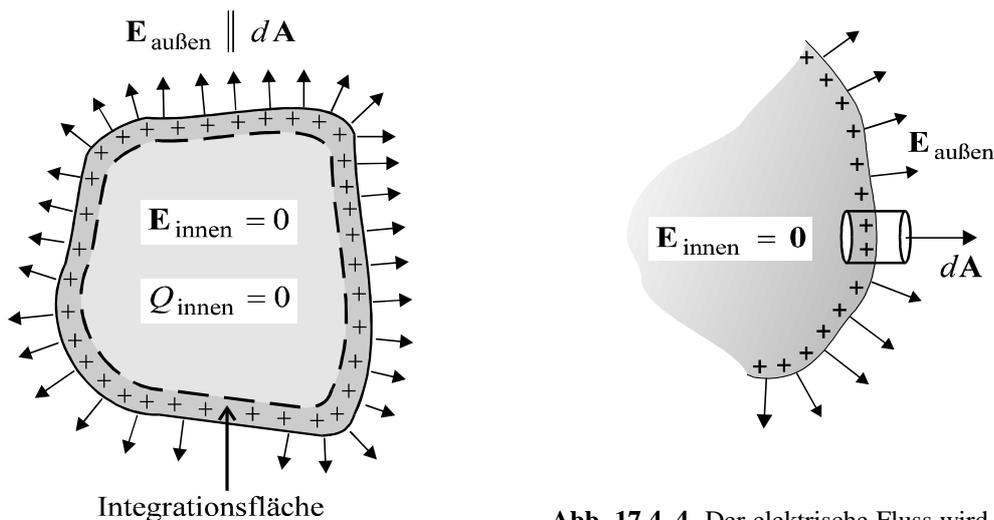


Abb. 17.4–3 Das Innere eines leitenden Körpers ist in der Elektrostatik feld- und ladungsfrei. Im Außenraum stehen elektrostatische Felder senkrecht auf der Oberfläche.

Abb. 17.4–4 Der elektrische Fluss wird für eine kleine Dose berechnet, deren Stirnflächen parallel zum elektrischen Außenfeld sind. Der Gaußsche Satz liefert $E = \sigma / \epsilon_0$.

Auch Hohlräume mit einer geschlossenen, leitenden Oberfläche sind feldfrei. Daher schirmt eine Metallhülle einen Raum sicher gegen äußere elektrostatische Felder ab. Aber auch ein engmaschiges Metallnetz oder -gitter, ein sog. „Faraday-Käfig“ liefert in der Praxis meist eine ausreichende Abschirmung.

2) Felder auf Leiteroberflächen: *Statische elektrische Felder stehen im Außenraum senkrecht auf den Leiteroberflächen.* Hätten die Felder eine Komponente parallel zur Leiteroberfläche, so würden sich die Ladungen unter der Oberfläche solange verschieben, bis die elektrischen Felder überall senkrecht auf den Leiteroberflächen stehen.

Der Betrag der elektrischen Felder kann mit dem Gaußschen Satz ermittelt werden. Um die Flächenintegration möglichst einfach zu machen, sollte die Integrationsfläche der Richtung des elektrischen Feldes im Außenraum angepasst und daher so gewählt werden, dass die Normalenvektoren der Integrationsfläche entweder parallel oder senkrecht zum elektrischen Feld im Außenraum sind. Das ist der Fall, wenn man (in Gedanken) eine sehr kleine Dose so weit in die Oberfläche hinein schiebt, dass eine Stirnfläche innerhalb und die andere außerhalb der Leiterfläche ist (siehe Abb. 17.4–4). Die Dose ist so klein, dass die elektrische Feldstärke auf der äußeren Stirnfläche und die örtliche Flächenladungsdichte

$$\sigma := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad \text{mit } \Delta Q = \text{Ladung unter der Oberfläche } \Delta A \quad (17.4-6)$$

auf der eingeschlossenen Leiteroberfläche fast konstant sind. Der Fluss durch die Dose ist

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \int_{A_{\text{Dose}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbf{E}_{\text{innen}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{\text{außen}} \perp \text{Mantelfläche} \end{array} = \int_{A_{\text{äußere Stirnfläche}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbf{E} \text{ parallel } d\mathbf{A} \\ \mathbf{E} \approx \text{const} \end{array} \\ &= E dA \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Gaußscher Satz} \end{array} = \frac{dQ}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{an der Oberfläche eines Leiters} \quad (17.4-7) \quad \img alt="key icon" data-bbox="890 640 925 675"/>$$

Die elektrostatische Feldstärke an der Oberfläche eines Leiters ist proportional zur örtlichen Flächenladungsdichte σ unter der Leiteroberfläche.⁴

Die folgenden drei Beispiele berechnen elektrische Felder wichtiger Ladungsverteilungen.

Beispiel 17.4–3 Elektrische Felder von geladenen Kugeln

Eine *leitende* Kugel mit Radius r_{Kugel} wird mit der Ladung Q aufgeladen. Die Elementarladungen sammeln sich dicht unter der Kugeloberfläche, so dass das Innere der Kugel ladungsfrei ist.

⁴ Die elektrischen Felder in Gl. (17.3–11) und (17.4–7) unterscheiden sich um einen Faktor 0,5. Der Grund dafür wird in Aufgabe 17–7 genannt.

Berechne das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ mit dem Gaußschen Satz

a) außerhalb der leitenden Kugel ($r \geq r_{\text{Kugel}}$) b) innerhalb der leitenden Kugel ($r < r_{\text{Kugel}}$).

c) Jetzt wird eine *nichtleitende*, massive Kugel mit der Ladung Q *homogen* aufgeladen. Die Ladungsträger sind jetzt mit konstanter Ladungsdichte ρ im ganzen Kugelvolumen verteilt.

Berechne auch hier das elektrische Feld außerhalb und innerhalb der nichtleitenden Kugel.

Lösung:

a) Die Ladungen der leitenden Kugel versammeln sich direkt unter der Kugeloberfläche. Ihre Verteilung muss kugelsymmetrisch sein, da andernfalls eine Richtung im Raum ausgezeichnet wäre. Daher muss auch das elektrische Feld kugelsymmetrisch sein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$$

mit \mathbf{e}_r = Einheitsvektor in radiale Richtung.

Im Prinzip kann die Integrationsfläche zur Berechnung des Flusses Φ_E beliebig gewählt werden. Die Integration ist aber nur dann *einfach* durchzuführen, wenn die Integrationsfläche die Symmetrie des elektrischen Feldes wiedergibt. Daher muss eine konzentrische Kugel als Integrationsfläche A_{Int} gewählt werden.

$$\begin{aligned} \oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} && \stackrel{E = \text{const auf der}}{\underset{\text{Integrationsfläche}}{=}} \\ &= E(r) \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Kugelförmige}} && = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ &\text{Integrationsfläche} && \end{aligned}$$

Integrationsfläche mit Radius r

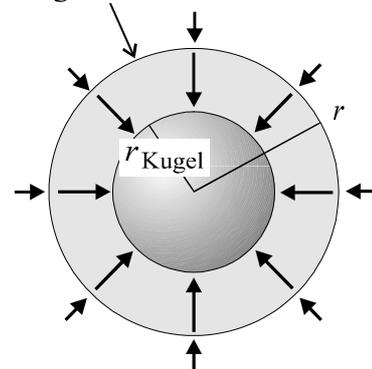


Abb. 17.4–5 Um die negativ geladene Metallkugel wird eine konzentrische, kugelförmige Integrationsfläche gelegt.

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{im Außenraum einer leitenden Kugel} \quad (17.4-8)$$

Wichtig ist die Feststellung, dass *das elektrische Feld außerhalb der leitenden Kugel genauso groß ist wie das elektrische Feld einer Punktladung Q im Kugelmittelpunkt*. Diese Aussage kann sofort verallgemeinert werden: *Alle kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen haben im Außenraum das elektrische Feld nach Gl. (17.4–8), wobei Q die Gesamtladung ist*. Der Beweis dieser Aussage sieht wegen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r$ genauso aus wie der Beweis von Gl. (17.4–8).

b) Als Integrationsfläche wählen wir erneut eine konzentrische Kugel; der Radius r ist jetzt aber kleiner als r_{Kugel} .

$$\begin{aligned} \oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} && \stackrel{E = \text{const auf der}}{\underset{\text{Integrationsfläche}}{=}} && = E(r) \cdot 4\pi r^2 && \stackrel{\text{Die Integrationsfläche}}{\underset{\text{enthält keine Ladung.}}{=}} && 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(r) = 0 \quad \text{im Innern einer leitenden Kugel} \quad (17.4-9)$$

Das Innere einer leitenden Kugel ist also nicht nur ladungsfrei, sondern auch stets feldfrei – in Übereinstimmung mit allgemeinen, früheren Überlegungen.

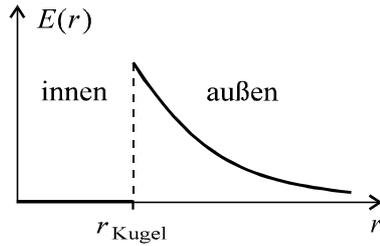


Abb. 17.4-6 Elektrisches Feld einer leitenden Kugel im Abstand r vom Kugelmittelpunkt.

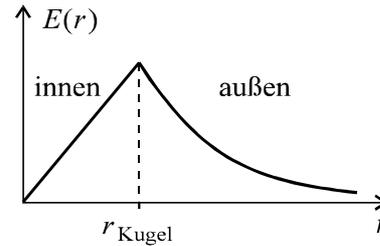


Abb. 17.4-7 Elektrisches Feld einer homogen geladenen, nichtleitenden Kugel.

c) Das Außenfeld der homogen geladenen, *nicht leitenden* Kugel wird ebenfalls durch Gl. (17.4-8) beschrieben. Das Innenfeld wird ebenfalls mit einer konzentrischen Kugel berechnet:

$$\oint_{A_{\text{Int}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Int}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{E = \text{const auf der} \\ \text{Integrationsfläche}}}{=} = E(r) \cdot 4 \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{r_{\text{Kugel}}^3}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r_{\text{Kugel}}^3} r \quad \text{im Innern einer homogen geladenen Kugel} \quad (17.4-10)$$

Im Innern einer homogen geladenen Kugel steigt das elektrische Feld linear an. Nur die Ladungen, deren Abstand zum Kugelmittelpunkt kleiner als r ist, tragen zum Feld $E(r)$ bei.

Bemerkung: Coulombkraft und Gravitationskraft haben die gleiche Form. Daher nimmt die Erdanziehungskraft linear mit der Entfernung zum Erdmittelpunkt ab, wenn man – in Gedanken – einen Tunnel zum Erdmittelpunkt gräbt. (Dabei wird eine homogene Massendichte im Erdinnern vorausgesetzt.) Diese Aussage haben wir in der Mechanik in Aufgabe „7-21 Schwingung nach Australien und zurück“ benötigt.

Beispiel 17.4-4 Elektrisches Feld eines langen, geladenen Leiters

Berechne das elektrische Feld eines langen, geraden Leiters, der homogen mit konstanter Längendichtedichte $\lambda := Q/l$ geladen ist.

Hinweis: Der Leiter soll sehr lang sein, damit die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den Leiterenden vernachlässigt werden können.

Lösung:

Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld rotationssymmetrisch um den Leiter sein:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{mit } \mathbf{e}_r = \text{Einheitsvektor in radiale Richtung.}$$

Daher ist es sinnvoll, die Oberfläche eines Zylinders mit Radius r und Länge l , dessen Symmetrieachse auf dem Leiter liegt, als Integrationsfläche zu wählen.

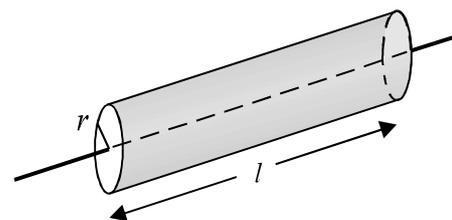


Abb. 17.4-8 Langer, homogen geladener Leiter und zylindrische Integrationsfläche mit Länge l und Radius r .

$$\oint_{A_{\text{Zylinder}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{A_{\text{Zylinder}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\substack{E \text{ steht senkrecht auf den Normalen-} \\ \text{vektoren der Grundflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Mantel}}} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} =$$

$$= \int_{A_{\text{Mantel}}} E(r) dA = E(r) \underbrace{2\pi r l}_{\text{Mantelfläche}} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{im Außenraum eines langen, homogen geladenen Zylinders (17.4–11)}$$

Beispiel 17.4–5 Feld einer homogen geladenen, großen, ebenen, dünnen Platte

Eine ebene, sehr großflächige, dünne Platte ist homogen mit konstanter Flächenladungsdichte $\sigma := Q/A$ geladen. Berechne das elektrische Feld mit dem Gaußschen Satz.

Hinweis: Die Platte soll sehr großflächig sein bzw. das Feld soll in einer Entfernung von der Platte berechnet werden, die wesentlich kleiner ist als Breite und Höhe der Platte. Dann können die Inhomogenitäten des elektrischen Feldes an den Plattenrändern vernachlässigt werden.

Lösung:

Nach früheren Überlegungen in diesem Unterkapitel 17.4 muss das elektrische Feld senkrecht zur Platte stehen.

Wegen der homogenen Flächenladung und der (theoretisch) unendlichen Ausdehnung der Platte ist kein Punkt auf der Platte ausgezeichnet. Daher darf sich das elektrische Feld nicht ändern, wenn wir uns vor der Platte bewegen – mit konstantem Abstand zur Platte. Das Feld kann also nur von der Entfernung r zur Platte abhängen.

Wir wählen als Integrationsfläche die Oberfläche eines Quaders mit den Maßen $a, b, 2r$. Die beiden Stirnflächen der Größe $a b$ haben denselben Abstand r von der geladenen Platte, damit der Betrag $E(r)$ auf beiden Flächen mit Sicherheit gleich groß ist. Ein Fluss tritt nur in den beiden Stirnflächen $a b$ auf.

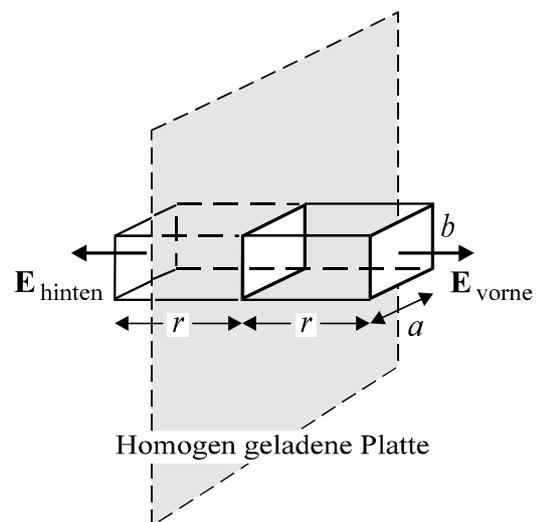


Abb. 17.4–9 Homogen geladene, große, ebene Platte

$$\begin{aligned} \oint_{A_{\text{Quader}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{A} & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathbf{E} \text{ steht senkrecht} \\ \text{auf den Seitenflächen}}}{=} \int_{A_{\text{Stirnflächen}}} \mathbf{E}(r) \cdot d\mathbf{A} & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathbf{E} \text{ ist parallel zu den} \\ \text{Flächennormalen der Stirnflächen}}}{=} \\ & = \int_{A_{\text{Stirnflächen}}} E(r) dA & \stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ E_{\text{vorne}} = E_{\text{hinten}}}}{=} E(r) 2 a b = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma a b}{2 \epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{für eine dünne, homogen geladene Platte} \quad (17.4–12)$$

Bemerkung: In Aufgabe 17–7 wird anschaulich erklärt, warum die Feldstärke hier nur halb so groß ist wie in Gl. (17.4–7).

Die letzten drei Beispiele zeigen drei verschiedene Abstandsgesetze:

$$E(r) \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{bei einer homogen geladenen Kugel}$$

$$E(r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{bei einem homogen geladenen, langen Leiter}$$

$$E(r) = \text{const} \quad \text{bei einer homogen geladenen, großflächigen Platte}$$

Mit dem Gaußschen Satz lassen sich diese Abstandsgesetze leicht begründen: Die Integrationsflächen, die in den drei Beispielen einen Beitrag zum Fluss liefern, sind proportional zu r^2 , r und r^0 .

Wir kommen nochmals kurz auf Beispiel 17.4–3 zurück. Danach beträgt die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R , die kugelsymmetrisch mit der Ladung Q aufgeladen ist,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

d. h. auf der Oberfläche von kugelsymmetrisch geladenen Kugeln wächst die Feldstärke mit abnehmendem Krümmungsradius R stark an. Diese Aussage kann verallgemeinert werden: *Bei leitenden Körpern mit beliebig geformter Oberfläche sind die Feldstärke und damit nach Gl. (17.4–7) auch die Flächenladungsdichte σ an Stellen starker Krümmung besonders groß.* Vor allem an Leiterspitzen mit kleinen Radien treten hohe elektrische Feldstärken auf.

Hohe Feldstärken können Elektronen aus Leiterspitzen „herausziehen“; man spricht von „Feldemission“. (Genaugenommen ist die Feldemission ein quantenmechanischer Tunneleffekt.) Bei Metallspitzen mit einem Krümmungsradius von etwa $1 \mu\text{m}$ kann schon eine Spannung von einigen hundert Volt Elektronen aus dem Metall herausziehen. So entstehen *nahezu punktförmige Elektronenquellen*.

Anwendungen der Feldemission:

- Durch die Feldemission werden in Rastertunnelmikroskopen sehr feine Elektronenstrahlen erzeugt, die durch magnetische Linsen noch weiter gebündelt werden. Dadurch lassen sich z. B. Kristallfehler und Oberflächenstrukturen im Nanometer-Bereich untersuchen.
- Industrielle Forschungslabors arbeiten an Feldemissionsdisplays (FED's), die flach sind sowie bei geringem Energieverbrauch sehr hell und kontrastreich mit hervorragender Auflösung arbeiten. Wie bei der herkömmlichen Kathodenstrahlröhre wird eine fluoreszierende Schicht auf dem Bildschirm durch auftreffende Elektronen zum Leuchten gebracht. Bei den FED's geht aber nicht ein einziger Elektronenstrahl von einer Glühkathode aus; vielmehr werden durch Feldemission außerordentlich viele Elektronenstrahlen aus Siliziumkegeln ausgelöst, die einen Krümmungsradius von etwa 10 nm und einen gegenseitigen Abstand von ungefähr $16 \mu\text{m}$ haben. Die Spannung zwischen den Kegeln und ihren Gateelektroden steuert die Strahlstärke.

Hohe Feldstärken können aber nicht nur Elektronen aus Leitern herausziehen, sondern in der Luft ab etwa 3 MV/m (in anderen Stoffen teilweise bei wesentlich höheren Feldstärken) einen „Durchschlag“ auslösen. Luft enthält immer eine kleine Menge von Ionen, die z. B. durch kosmische Strahlung erzeugt werden. In starken elektrischen Feldern werden die Ionen stark beschleunigt. Beim heftigen Zusammenstoß mit Luftmolekülen können Elektronen aus den Atomen herausgeschlagen werden, so dass zahlreiche weitere Ionen entstehen, die den Prozess verstärken. Elektronen können aber auch auf höhere Bahnen gehoben werden, so dass die Atome beim Rücksprung der Elektronen Licht abstrahlen.

Anwendungen des Durchschlags:

- Durchschläge mit kleinen Funken können auftreten, wenn man in sehr *trockenen* Räumen über einen Teppich läuft und danach z. B. eine metallische Türklinke berührt. (Feuchte Luft leitet Ladungen, die sich auf hohem Potential befinden, ab und verhindert so das unangenehme Ereignis.)
- An den spitzen Enden von Blitzableitern treten beim Gewitter hohe Feldstärken auf, so dass der Blitz dort einschlägt. Zur Vermeidung von Durchschlägen dürfen Hochspannungsanlagen keine scharfen Kanten und keine Spitzen enthalten.

17.5 Kopierer und Laserdrucker *

Eine sehr wichtige, direkte Anwendung haben die elektrostatischen Kräfte im Kopierern und Laserdruckern. Das Verfahren basiert ganz wesentlich auf fotoelektrischen Eigenschaften mancher Halbleiter⁵ (z. B. Selen) sowie auf der elektrostatischen Abscheidung von positiv geladenem Staub (Tonerpartikeln) auf negativ geladenen Flächen.

Der wichtigste Teil des Kopierers ist ein rotierender, *mit Selen beschichteter Aluminiumzylinder*, der *geerdet* ist und „Fototrommel“ oder „Bildtrommel“ heißt. *Selen ist ein lichtelektrischer Halbleiter*, also ein Festkörper, *der bei Dunkelheit ein elektrischer Isolator und bei Licht elektrisch leitend ist*. Die Lichtquanten (Photonen) werden im Halbleiter absorbiert und übergeben ihre Energie an Elektronen, die bei höherer Energie frei beweglich sind.

Der Kopierprozess läuft in acht Schritten ab, die in Abb. 17.5–1 dargestellt werden:

1. Aufladung: Im Dunkeln werden Elektronen – z. B. durch eine Koronaentladung um einen dünnen Draht, an dem der negative Pol einer Hochspannung liegt – auf die Selenschicht der Fototrommel gebracht⁶. Die *Selenschicht wird negativ geladen* mit Ladungsdichten von etwa 10^{-7} C/cm^2 . Da der Halbleiter Selen im Dunkeln nicht leitet, können die Elektronen nicht abfließen.⁷
2. Optische Abbildung: Mit Hilfe von Linsen und Spiegeln wird der Halbleitermantel der *Fototrommel mit dem Bild des Originaldokumentes belichtet*. Wichtig ist, dass helle (dunkle) Punkte auf dem Original als helle (dunkle) Punkte auf der Trommel abgebildet werden. An den belichteten Stellen wird die Selenschicht auf der Trommeloberfläche elektrisch leitend, so dass die Elektronen hier auf den Aluminiumzylinder abfließen. An den dunklen Stellen leitet die Selenschicht nicht und hält die aufgetragenen Elektronen fest.

⁵ Wird einem Halbleiter Energie in Form elektromagnetischer Strahlung im kurzwelligeren oder (bei manchen Halbleitern) im sichtbaren Bereich zugeführt, so können Elektronen die Photonenergie absorbieren und dabei in das energiereichere sog. „Leitungsband“ gelangen. Im Leitungsband sind die Elektronen frei beweglich und führen deshalb zu einer guten elektrischen Leitfähigkeit.

⁶ In manchen Kopierern wird die Fototrommel *positiv* geladen. Dann ist die Ladung der Tonerpartikel negativ.

⁷ Die Ladungen im innen liegenden, geerdeten Aluminiumzylinder können sich bewegen. Daher baut sich durch Influenz (siehe Unterkapitel „18.3 Influenz“) eine betragsmäßig gleich große, aber positive Ladung am äußeren Rand des Aluminiumzylinders auf. Diese Ladung ist in Abb. 17.5–1 nicht eingezeichnet.

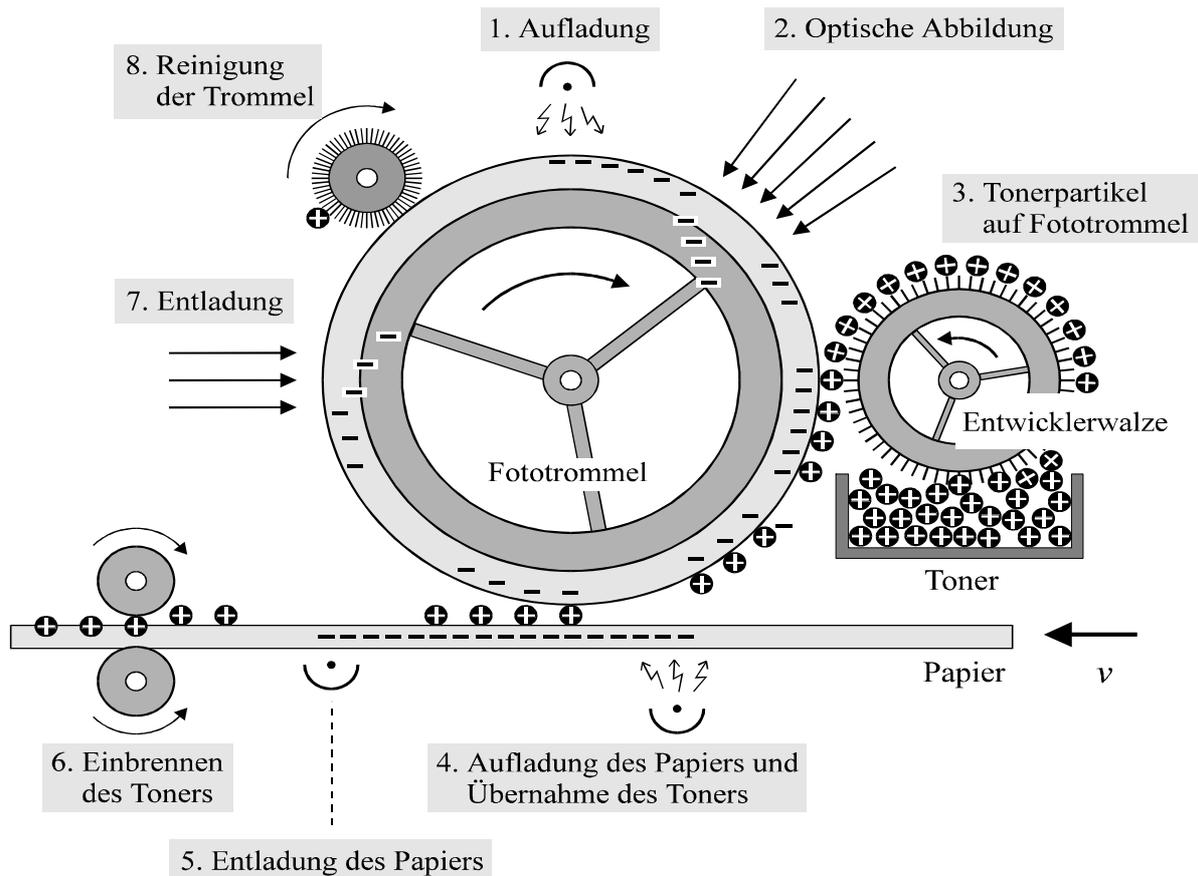


Abb. 17.5–1 Die rotierende Fototrommel ist mit einer dünnen Halbleiterschicht bedeckt. Die lichtelektrische Eigenschaft des Halbleiters ist ganz wesentlich für den Kopierprozess: Im Dunkeln sind Halbleiter nichtleitend. Bei einer Bestrahlung aber geben die absorbierten Photonen ihre Energie an Elektronen ab, die danach aufgrund ihrer höheren Energie frei beweglich sind. Bei Bestrahlung werden lichtelektrische Halbleiter also elektrisch leitend.

Nach der Belichtung ist das Ladungsmuster auf der Trommel ein Abbild des Originaldokumentes.

- 3. Tonpartikel auf Trommel:** Tonerpartikel, bestehend aus Harz, Ruß und Eisenteilchen werden positiv aufgeladen und auf die Oberfläche der Entwicklerwalze gebracht. Die Walze rollt unter Druck über die Fototrommel. Durch elektrostatische Kräfte werden die positiven Tonerpartikel von den Elektronen, die auf den unbelichteten Stellen der Selenschicht sitzen, auf die Fototrommel gezogen.

Die Entwicklerwalze verwandelt das Ladungsmuster auf der Trommel in ein Schwarz-Weiß-Muster.

- 4. Aufladung des Papiers:** Das Schwarz-Weiß-Muster muss nun von der Fototrommel auf ein Blatt Papier übertragen werden. Dazu wird die *Rückseite des Papiers* durch eine Koronaentladung so *stark negativ aufgeladen*, dass das Blatt die Tonerpartikel von der Trommel zu sich herüber zieht. *Nun befindet sich das Schwarz-Weiß-Muster auf dem zu bedruckenden Papier.*