

1

Prinzipien der mathematischen Modellierung

Wir beginnen zunächst mit einer Vorstellung der grundlegenden Konzepte und Ideen. Unter anderem werden wir Definitionen der Begriffe *System*, *Modell*, *Simulation*, *mathematisches Modell* usw. kennenlernen. Ebenso werden wir über die Ziele der mathematischen Modellbildung und Simulation sowie über die Eigenschaften „guter“ mathematischer Modelle nachdenken und eine Klassifikation mathematischer Modelle vornehmen. Wer primär an den praktischen Anwendungen spezieller Methoden interessiert ist, kann dieses erste Kapitel überspringen und sich direkt in den weiteren Buchkapiteln beispielsweise über Regressionsmethoden (Kapitel 2) oder über Differentialgleichungsmethoden (Kapitel 3 und 4) informieren. Wir legen jedoch Wert auf die Feststellung, dass die in diesem ersten Kapitel behandelten Grundlagen der mathematischen Modellbildung auch für fortgeschrittene Anwender, die über diese Themen möglicherweise noch gar nicht reflektiert haben, von Interesse sind. Wie im Vorwort bereits angedeutet: Jeder von uns verwendet mathematische Modelle – „auch diejenigen von uns, die das noch gar nicht bemerkt haben“. Die Leserin oder der Leser wird sicherlich zustimmen, dass es eine gute Idee ist, eine Vorstellung von dem zu haben, was wir tun!

Ausgangspunkt für unsere weiteren Betrachtungen ist die Komplexität der Probleme, die in Wissenschaft, Ökonomie und Ingenieurwesen behandelt werden. Wie wir in Abschnitt 1.1 sehen werden, liegt die Ursache für die Schwierigkeit vieler Problemstellungen in Wissenschaft, Ökonomie und Ingenieurwesen vor allem in der Komplexität der betrachteten Systeme. Modelle sind hier das geeignete Werkzeug, um Komplexität aufzubrechen und Ansätze zur Problemlösung zu entwickeln. In Abschnitt 1.2 wird eine Definition der Begriffe *System*, *Modell* und *Simulation* angegeben. Dann schreiten wir in Abschnitt 1.3 weiter in Richtung mathematischer Modelle, indem wir feststellen, dass Mathematik die natürliche Sprache für komplexe Probleme in Wissenschaft, Ökonomie und Ingenieurwesen ist. Mathematische Modelle selbst werden schließlich in Abschnitt 1.4 definiert, gefolgt von Anwendungsbeispielen und Definitionen in den Abschnitten 1.5 und 1.6. In Abschnitt 1.6.1 werden wir die wichtige Unterscheidung zwischen phänomenologischen und mechanistischen Modellen vornehmen, die als Grundlage für die Organisation der Kapitel 2–4 dieses Buches verwendet wird.

Wir beenden das erste Kapitel mit einer Klassifikation mathematischer Modelle und Golombs berühmte „Don'ts of mathematical modeling“ in Abschnitt 1.7.

1.1

Eine komplexe Welt braucht Modelle

Die Arbeit von Ingenieuren, Ökonomen und Wissenschaftlern besteht darin, „Systeme“ zu verstehen, zu entwickeln oder zu optimieren. Hier wird mit „System“ ein interessierendes Objekt bezeichnet, das Teil der Natur (wie die Zelle einer Pflanze, ein Atom, eine Galaxie usw.) oder eines künstlichen ökonomischen oder technologischen Systems sein kann (siehe Definition 1.3). Die allgemeine Herangehensweise von Ingenieuren, Ökonomen und Wissenschaftlern bei der Arbeit mit Systemen weist eine starke Ähnlichkeit auf mit der Art und Weise, wie jeder von uns im täglichen Leben mit Systemen umgeht. Betrachten wir als Beispiel das Problem, einen normalen Tisch auf einen unebenen Boden zu stellen. Der Tisch ist ein einfaches technisches System, und jeder von uns weiß in diesem Fall, wie die Aufgabe zu lösen ist: Wir legen einfach unter ein oder zwei Tischbeine ein geeignetes Stück Pappe. Jeder von uns löst im Laufe seines Lebens eine große Anzahl solcher Probleme, die im Zusammenhang mit einfachen technischen Systemen auftreten. Darüber hinaus gibt es eine große Anzahl wirklich anspruchsvoller technischer Probleme, die nur von Ingenieuren gelöst werden können. Charakteristisch für besonders anspruchsvolle Probleme dieser Art ist eine hohe Komplexität des zugrunde liegenden Systems. Ingenieure wären schlicht überflüssig, wenn in unserer modernen Lebenswelt nicht viele Aufgaben zu lösen wären, die mit sehr komplexen technischen Systemen zu tun haben, beispielsweise mit Computerprozessoren, Motoren, Ölfördersystemen, High-Tech-Materialien usw. Ebenso wenig wären Wissenschaftler erforderlich, wenn Prozesse wie die Photosynthese von Pflanzen genauso einfach verstanden werden könnten wie ein instabiler Tisch, und auch auf Ökonomen könnte man verzichten, wenn sich wichtige Zielgrößen wie etwa der Gewinn eines Betriebs oder auch die Arbeitslosigkeit in einer Volkswirtschaft nicht aus extrem komplexen Interaktionen mikro- und makroökonomischer Einflussfaktoren ergeben würden. Der Grund, warum es Wissenschaftler, Ökonomen und Ingenieure gibt, gewissermaßen deren Existenzberechtigung, ist die Komplexität der Natur und die Komplexität von technischen und ökonomischen Systemen. Vielleicht sollte mancher von uns, der in diesen Berufen sein Geld verdient, dankbar dafür sein, dass uns eine derart komplexe Welt vorgesetzt wurde.

Bemerkung 1.1. Die Komplexitätsherausforderung Die natürliche Aufgabe von Wissenschaftlern, Ökonomen und Ingenieuren besteht darin, Aufgaben zu lösen, die sich auf besonders komplexe Systeme beziehen. Damit ihre Arbeit erfolgreich ist, brauchen sie spezielle Methoden, um mit der Komplexität der Systeme umgehen zu können.

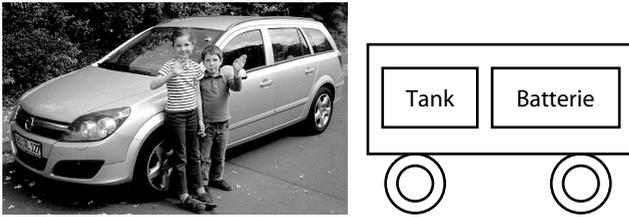


Abb. 1.1 Das Auto als reales System und als Modell.

Ingenieure, Ökonomen oder Wissenschaftler verwenden angesichts komplexer Systeme dieselbe Strategie, die jeder von uns im Alltag auf komplexe Systeme anwendet: Vereinfachung. Die Idee ist: Wenn etwas zu komplex ist, mach es Dir einfacher! Betrachten wir ein alltägliches Problem mit einem komplexen System: Ein Auto, das nicht anspringt. Jeder weiß, dass in dieser Situation ein Blick auf die Batterie und die Kraftstoffanzeige genügt, um dieses Problem in den meisten Fällen schnell zu lösen, und jeder wird dies auch ganz automatisch tun. Um die dahinter liegende Problemlösungsstrategie herauszuarbeiten, betrachten wir ein alternatives Szenario: Nehmen wir an, dass sich jemand zum ersten Mal in dieser Situation befindet. Etwas genauer: Nehmen wir an, dass unserem „jemand“ (der vielleicht von einem anderen Planeten gekommen ist und zwar Raumschiffe, aber noch nie zuvor ein Auto gesehen hat) erklärt worden ist, wie man Auto fährt, dass er dieses Auto eine Zeit lang gefahren ist und sich nun erstmals in der Situation befindet, dass das Auto nicht anspringt. Natürlich nehmen wir auch an, dass sich meilenweit keine Hilfe finden lässt! Solange das Auto gut funktioniert hat, schien es für unseren „jemand“ ein einfaches System gewesen zu sein: anlassen, Gas geben, steuern, bremsen, irgendwann wieder abschalten, alles ganz einfach? Jetzt, da unser „jemand“ zum ersten Mal unter die Motorhaube schaut, wird er feststellen, dass er es mit einem sehr komplexen System zu tun hat. Er wird lange brauchen bis er das Problem eventuell gelöst hat, selbst dann, wenn wir annehmen, dass unser „jemand“ ein Ingenieur ist. Jeder von uns – auch Nicht-Ingenieure – könnte dieses Problem wesentlich schneller als dieser „jemand“ lösen. Der einfache Grund hierfür ist, dass diese Situation nicht neu für uns ist. Wir haben schon früher eine solche Situation erlebt und wissen aus Erfahrung, was zu tun ist. In unserer Vorstellung gibt es sozusagen ein vereinfachtes Bild eines Autos, ähnlich der Abb. 1.1, und in dem Augenblick, in dem das Auto nicht startet, denken wir nicht an das Auto als das komplexe System, das es tatsächlich ist, mit dieser endlosen Ansammlung von Ventilen, Kolben und all den anderen Dingen, die sich unter der Haube befinden, sondern wir denken vielmehr an das vereinfachte Bild: Wir wissen, dass dieses Bild für diese Situation geeignet ist, und es führt uns dazu, nach Batterie und Tankanzeige zu schauen, womit das Problem dann in meisten Fällen sofort gelöst ist.

Exakt diese soeben geschilderte Vereinfachungs-Strategie wird auch von Ingenieuren, Ökonomen und Wissenschaftlern auf komplexe Systeme angewendet. Wenn ein Ingenieur zum Beispiel den Kraftstoffverbrauch eines Motors verringern möchte, so wird er den Motor nicht in seiner vollständigen Komplexität be-

trachten sondern vielmehr eine vereinfachte Beschreibung des Motors und der Motorteile zugrundelegen, die mit dem Kraftstoffverbrauch zu tun haben. In ähnlicher Weise wird ein Wissenschaftler, der den Photosyntheseprozess verstehen möchte, vereinfachte Beschreibungen von Pflanzen mit einem Fokus auf spezielle Prozesse innerhalb einzelner Pflanzenzellen verwenden. Jeder, der komplexe Systeme verstehen möchte oder Probleme in Verbindung mit komplexen Systemen lösen möchte, braucht geeignete vereinfachte Beschreibungen der betrachteten Systeme, und d. h.: Jeder, der sich mit komplexen Systemen beschäftigt, braucht Modelle – denn vereinfachte Beschreibungen eines Systems sind per Definition Modelle.

Bemerkung 1.2. Rolle von Modellen Ingenieure, Wissenschaftler und Ökonomen verwenden vereinfachte Beschreibungen komplexer Systeme, sogenannte *Modelle*. Diese Modelle dienen als Werkzeuge, um die Komplexität der Systeme aufzubrechen, damit dann auf der Grundlage eines nicht mehr von Komplexität verstellten Blicks auf interessierende Systemaspekte Einsichten gewonnen und Probleme gelöst werden können.

1.2

Systeme, Modelle, Simulationen

Minsky formulierte 1965 folgende allgemeine Definition eines Modells: [3, 4]:

Definition 1.1. Modell Für einen Beobachter B ist das Objekt A^* ein *Modell* eines Objektes A , wenn ein Beobachter B das Objekt A^* verwenden kann, um ihn interessierende Fragen über A zu beantworten.

Bemerkung 1.3. Formale Definitionen Definition 1.1 ist als *formale Definition* in dem Sinne zu verstehen, dass Begriffe wie *Objekt*, *Beobachter* usw. auftreten, die nicht strikt axiomatisch definiert sind, wie es in der mathematischen Theorie üblich ist. Dieselbe Bemerkung gilt für auch für andere Definitionen in diesem Buch, einschließlich der Definition des Begriffs *mathematisches Modell* in Abschnitt 1.4. Definitionen dieser Art sind aus praktischen Gründen gerechtfertigt, da sie es uns erlauben, die formal definierten Begriffe in einer knappen und dennoch – soweit möglich – präzisen Sprache zu verwenden.

Die Anwendung der Definition 1.1 auf das Auto Beispiel ist offensichtlich – mit B bezeichnen wir den Autofahrer, A ist das Auto selbst und A^* ist die vereinfachte Tank-Batterie-Beschreibung des Autos in Abb. 1.1.

1.2.1

Der teleologische Aspekt

Ein wichtiger Aspekt der obigen Definition des Begriffs *Modell* ist, dass sie den Zweck des Modellierens beinhaltet: Ein Modell hilft uns dabei, Fragen zu beantworten und Probleme zu lösen, die wir im Zusammenhang mit einem System (Minsky spricht vom „Objekt“) haben. Das ist wichtig, da gerade Anfänger im Bereich Modellierung oft glauben, dass ein Modell nur dann gut ist, wenn es dem realen System so nahe wie möglich kommt. Wie jedoch bereits im vorherigen Abschnitt dargelegt wurde, zielen Modellierung und Simulation auf eine Vereinfachung des gegebenen komplexen Systems ab, nicht aber auf die nutzlose Erzeugung komplexer Kopien der komplexen Realität. Halten wir also fest:

Bemerkung 1.4. Das beste Modell Das beste Modell ist das einfachste Modell unter allen Modellen, die die gestellte Aufgabe (ein Problem lösen, einen Systemaspekt verstehen) lösen können, d. h. dieses beste und zugleich einfachste Modell ist gerade noch komplex genug, um seinen Zweck zu erfüllen. Einfache Modelle erlauben uns einen von der Komplexität des realen Systems unverstellten Blick auf interessierende Systemaspekte.

Der gesamte Prozess der Modellbildung und Simulation dient dem Zweck, Probleme zu lösen. Cellier [5] formuliert dies so: „Modeling and simulation is always goal-driven, i. e. we should know the purpose of our potential model before we sit down to create it“. In diesem Sinne ist die o. a. Definition des Begriffs *Modell* eine zweckorientierte oder *teleologische* Definition, die wir uns auch für weitere wichtige Definition in diesem Buch, wie die Definition des Begriffs *mathematisches Modell* im Abschnitt 1.4, zum Vorbild nehmen („Teleologie“ ist ein Gebiet der Philosophie, die sich mit Zielen und Zwecken beschäftigt. Der Name „Teleologie“ stammt vom griechischen Wort *télos* ab, was man ungefähr mit „Zweck“ übersetzen kann [6], *lógos* bedeutet Lehre.)

1.2.2

Das MoSim-Schema

Für die Untersuchung komplexer Systeme, die mit einem Modell beschrieben werden, kann ein Modellierungs- und Simulationsschema aufgestellt werden. Dieses Schema nennen wir abkürzend *MoSim-Schema* und es sieht wie folgt aus:

Bemerkung 1.5. MoSim-Schema*Definition*

- Definition eines Problems, das gelöst werden soll, oder einer Frage, die beantwortet werden soll.
- Definition eines Systems, d. h. eines Realitätsausschnitts, der dem Problem oder der Frage zugrunde liegt.

Systemanalyse

- Identifizierung der Teile des Systems, die für das Problem oder für die Frage relevant sind.

Modellierung

- Entwicklung eines Modells des Systems, das auf den Erkenntnissen der Systemanalyse basiert.

Simulation

- Anwendung des Modells auf das Problem oder die Frage.
- Herleitung einer Strategie, um das Problem zu lösen oder die Frage zu beantworten.

Validierung

- Löst die im Simulationsschritt gefundene Strategie das Problem bzw. beantwortet sie die Frage für das reale System?

Wenden wir nun das Schema auf das oben vorgestellte *Autobeispiel* an: Wir haben das Problem, dass das Auto nicht startet und das Auto selbst stellt das System dar. Damit haben wir den Schritt „Definition“ im oben gegebenen Schema durchgeführt. Im Schritt „Systemanalyse“ werden – wie schon früher beschrieben – die Batterie und die Kraftstoffmenge als die relevanten Teile des Systems identifiziert. Dann erstellen wir im Schritt „Modellierung“ ein Modell, welches eine Batterie und einen Tank wie in Abb. 1.1 enthält. Die Anwendung des Modells auf das gestellte Problem führt im Schritt „Simulation“ zur Strategie, die Batterie und die Kraftstoffanzeige zu überprüfen. Diese Strategie kann dann auf das reale Auto im Schritt „Validierung“ umgesetzt werden. Wenn diese funktioniert, d. h. wenn das Auto tatsächlich wieder startet, wenn wir die Batterie aufgeladen oder das Auto betankt haben, dann sagen wir, das Modell ist zulässig oder validiert. Wenn nicht, dann brauchen wir wohl einen Mechanismus, der noch andere Teile des Autos betrachtet, d. h. wir verwenden ein etwas komplexeres Automodell bis das Problem gelöst ist.

In einem realen Modellierungs- und Simulationsprojekt kann der *Systemanalytischschritt* des obigen Schemas ein sehr zeitintensiver Schritt sein. Üblicherweise ist dieser mit einer gründlichen Literaturrecherche verbunden. In vielen Fällen ergibt die Recherche, dass bereits ähnliche Untersuchungen durchgeführt worden sind. Und natürlich sollten wir versuchen, von den Erfahrungen zu profitieren, die bereits in der Literatur beschrieben werden. Darüber hinaus beinhaltet der Systemanalytischschritt meistens eine Menge Diskussionen und Besprechungen und bringt Personen aus verschiedenen Disziplinen zusammen, die etwas zur Problemlösung im betrachteten System oder zu den Antworten der gestellten Fragen beitragen können. Diese Diskussionen zeigen normalerweise, dass neue Daten für ein besseres Verständnis des Systems und für die Validierung des Modells im Validierungsschritt des Schemas benötigt werden. Demzufolge ist die Festle-

gung eines Versuchsprogramms mit entsprechenden Experimenten ein weiterer typischer Teil des Systemanalyseschritts.

Der *Modellierungsschritt* beinhaltet auch die Suche nach geeigneter Software mit der die Gleichungen des mathematischen Modells gelöst werden können. In vielen Fällen ist es möglich Standardsoftware zu benutzen und einige Softwarewerkzeuge werden im nächsten Kapitel vorgestellt. Allerdings kann es auch erforderlich sein, eigene Software zu schreiben, wenn beispielsweise das mathematische Modell Nichtstandard-Gleichungen enthält. Nehmen wir als Beispiel die Modellierung der Pressensektion einer Papiermaschine. Die Beschreibung der Entwässerung des Papiers erfordert stark konvektionsdominierte Diffusionsgleichungen, welche nicht mit Standardsoftware und der erforderlichen Genauigkeit behandelt werden können. Deshalb ist hier eine maßgeschneiderte numerische Software erforderlich [7].

Im *Validierungsschritt* werden die Modellergebnisse mit experimentellen Daten verglichen. Diese Daten können aus der Literatur oder auch aus Experimenten stammen, die speziell für die Validierung des Modells durchgeführt werden. Normalerweise wird von einem Modell verlangt, dass es nicht nur quantitativ sondern auch qualitativ zu den Daten passt, und zwar in dem Sinne, dass es die allgemeine Form der Daten so gut wie möglich wiedergibt. In Abschnitt 3.2.3.4 ist ein Beispiel für eine schlechte qualitative Anpassung zwischen einem Modell und den Daten zu finden. Natürlich kann ein Modell im Validierungsschritt scheitern, obwohl es qualitativ und quantitativ perfekt an die Daten angepasst worden ist. Wenn das Modell nicht das Problem löst, das es lösen soll, dann kann es nicht verwendet werden. Dies ist natürlich das wichtigste Kriterium für eine erfolgreiche Validierung.

Das MoSim-Schema (Bemerkung 1.5) konzentriert sich auf die wesentlichen Schritte einer Modellierung und Simulation. Es zeigt ein vereinfachtes Bild von dem, was in einem konkreten Modellierungs- und Simulationsprojekt umgesetzt wird. Für verschiedene Anwendungsbereiche sind eine Reihe durchdachter Beschreibungen von Modellierungs- und Simulationsprozessen in Büchern zu finden, wie zum Beispiel in [8–11]. Ein beachtenswerter Punkt ist, dass in einem realen Modellierungs- und Simulationsprojekt die einzelnen Schritte des oben gegebenen Schemas nur selten geradlinig durchlaufen werden können. Stattdessen treten typischerweise Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Schritten auf. Wenn zum Beispiel der Validierungsschritt nicht erfolgreich verläuft, dann wird man auf einen davor liegenden Schritt zurückgehen müssen, was uns in eine *schleifenähnliche Struktur* bringt: Vielleicht muss die Modellformulierung verbessert werden, das System erneut analysiert werden oder es muss sogar die Problemformulierung neu festgelegt werden, falls sich die Ausgangsformulierung des Problems als unrealistisch erweist.

Bemerkung 1.6. Beginne mit einem einfachen Modell! Um das beste Modell im Sinne der Bemerkung 1.4 zu finden, beginnt man mit einem möglichst einfachen Modell. Danach wird ggf. eine Folge schrittweise komplexerer Modelle

untersucht, bis das letzte Modell dieser Folge den Validierungsschritt erfolgreich besteht.

1.2.3

Simulation

Bisher haben wir nur die Definition des Begriffs *Modell* kennengelernt. Das oben vorgestellte MoSim-Schema enthält allerdings noch weitere Begriffe wie *System* und *Simulation*, die implizit durch ihre Rolle im Schema als definiert betrachtet werden können. Können diese aber auch präzisiert werden? In der Literatur finden sich viele verschiedene Definitionen, zum Beispiel für den Begriff *Simulation*. Die vorhandenen Unterschiede zwischen den Definitionen können durchaus mit den verschiedenen Interessen der Autoren erklärt werden. Zum Beispiel ist die Simulation in einem Buch mit Schwerpunkt auf die sogenannte *ereignisorientierte Simulation*, welche auf die zeitliche Entwicklung des Systems abzielt, als „die Imitation des Vorganges eines realen Prozesses oder Systems über die Zeit“ [8] definiert. Im Allgemeinen kann Simulation wie folgt definiert werden:

Definition 1.2. Simulation *Simulation* ist die Anwendung eines Modells auf ein reales System mit dem Ziel, Probleme zu lösen oder Einsichten zu gewinnen, die sich auf dieses System beziehen.

Anzumerken ist noch, dass der Begriff *Simulation* vom lateinischen Wort „simulare“ abstammt, was nachahmen, vortäuschen, sich etwas vorstellen bedeutet: In einer Simulation wird das reale System mit einem Modell nachgebildet. Ein ähnliche Definition ist bei Fritzsön [10] zu finden, der eine Simulation als „ein Experiment durchgeführt an einem Modell“ bezeichnet. Darüber hinaus ist die oben gegebene Definition eine *teleologische* (zweckorientierte) Definition ähnlich zu Definition 1.1. Das heißt, diese Definition unterstreicht erneut den Umstand, dass eine Simulation dazu verwendet wird, um ein Ziel zu erreichen. Wenn auch die Definition von Fritzsön etwas allgemeiner ist, so gibt die obige Definition den tatsächlichen Einsatz in Wissenschaft und Ingenieurwesen etwas besser wieder.

1.2.4

System

In Verbindung mit dem Begriff *System* finden sich ebenfalls eine Reihe verschiedener Definitionen in der Literatur. Und wieder können die Unterschiede zwischen den Definitionen mit den Interessen der Autoren erklärt werden. Zum Beispiel wird in [12] ein System definiert als „eine Ansammlung von Dingen, zum Beispiel Personen oder Maschinen, die handeln oder miteinander interagieren bis ein logisches Ende erreicht ist“. Gemäß [13] ist ein System „eine Ansammlung von Objekten und Beziehungen von Objekten“. Mit Blick auf ein mathematisches Modell sind wir der Ansicht, dass der Begriff *System* möglichst allgemein beschrieben werden soll. Jede Art von Objekt kann hier als ein System fungieren, wenn wir

bezüglich dieses Objektes eine Frage haben und diese Frage mit Hilfe der Mathematik beantwortet werden kann. Unsere Sichtweise eines Systems ist ähnlich zur Definition wie sie in [14] gegeben wird (siehe auch die Diskussion zu dieser Definition in [5]): „Ein System ist irgendetwas was sich als System auszeichnet“. In [5] ist eine weitere Definition von *System* gegeben, die unserer Sichtweise recht nahe kommt: „Ein System ist eine potentielle Quelle von Daten“. Diese Definition hebt die Tatsache hervor, dass ein System nur dann von wissenschaftlichen Interesse sein kann, wenn eine Kommunikation zwischen System und Außenwelt vorhanden ist. Dies werden wir später in Abschnitt 1.3.1 etwas näher diskutieren. Eine Definition, die das teleologische Prinzip wie oben beschrieben beinhaltet, wird durch Fritzson [10] gegeben:

- **Definition 1.3. System** Ein *System* ist ein Objekt oder eine Menge von Objekten, deren Eigenschaften wir untersuchen wollen.

1.2.5

Konzeptionelle und physikalische Modelle

Das Modell zu unserem Auto Beispiel ist etwas, das nur in unserer Vorstellung existiert. Wir können es mit ein paar Sätzen und/oder mit einer Skizze auf Papier niederschreiben, aber es hat keine physikalische Wirklichkeit. Modelle dieser Art werden als *konzeptionelle Modelle* [13] bezeichnet.

Konzeptionelle Modelle werden von jedem von uns verwendet, um Alltagsprobleme zu lösen, wie zum Beispiel unser Ausgangsproblem mit dem Auto, das sich nicht starten lässt. Oder wie es der Philosoph K.R. Popper ausdrückt „Alles Leben ist Problemlösen“. Mit konzeptionellen Modellen steht uns ein wichtiges Werkzeug zur Verfügung, um unsere Alltagsprobleme zu lösen [15]. Diese werden auch von Ingenieuren oder Wissenschaftlern für einfache Probleme oder Fragen verwendet, so ähnlich wie beim Autoproblem. Werden die Probleme oder Fragen komplexer, so verlassen sie sich mehr auf Experimente. Dies führt uns zu einem weiteren Modelltyp. Zum besseren Verständnis verwenden wir das MoSim-Schema (Bemerkung 1.5), um eine mögliche Vorgehensweise eines Ingenieurs, der den Kraftstoffverbrauch senken möchte, zu beschreiben: In diesem Fall ist das Senken des Kraftstoffverbrauchs das Problem und der Motor ist das System. Wir nehmen einmal an, dass der Ingenieur aus der Systemanalyse die Schlussfolgerung zieht, die Einspritzpumpe sollte verbessert werden. Typischerweise wird er dann einen experimentellen Versuchsaufbau erstellen, mit dessen Hilfe er die Details des Einspritzprozesses studieren kann.

Solch ein experimenteller Versuchsaufbau ist damit ein Modell in dem Sinne, dass es typischerweise eine vereinfachte Version des Motors funktionstüchtig realisiert. Der Aufbau wird im Normalfall nur ein paar Teile des Motors enthalten, die eng mit dem Prozess der Kraftstoffeinspritzung verbunden sind. Im Gegensatz zum konzeptionellen Modell ist dies jedoch nicht nur eine Idee in unserer Vorstellung, sondern ein echter Teil der physikalischen Welt und aus diesem Grund wird diese Art eines Modells als *physikalisches Modell* [13] bezeichnet. Der Ingenieur

wird dann das physikalische Modell des Einspritzprozesses benutzen, um Strategien zur Reduktion des Kraftstoffverbrauchs – zum Beispiel eine neue Konstruktion der Einspritzpumpe – herzuleiten. Dies entspricht dem Simulationsschritt im obigen MoSim-Schema. Anschließend wird im Validierungsschritt des Schemas das Potential der neuen Konstruktionen zur Reduktion des Kraftstoffverbrauchs am Motor selbst getestet, d. h. im realen System. Wissenschaftler verwenden physikalische Modelle in ähnlicher Weise. Betrachten wir zum Beispiel einen Wissenschaftler, der den Photosyntheseprozess einer Pflanze verstehen möchte. Wie der Ingenieur erstellt er einen experimentellen Versuchsaufbau, vielleicht einen Behälter mit Pflanzenzellkulturen, in dem er einfach Größen wie CO_2 , Wasser, Licht beobachten und messen kann. Aus denselben Gründen wie im vorherigen Beispiel, stellt dieser oder ein ähnlicher Aufbau ein physikalisches Modell dar. Ebenso entspricht jede Schlussfolgerung, die aus einem physikalischen Modell gezogen wird, dem Simulationsschritt im MoSim-Schema und die Schlussfolgerungen müssen entsprechend durch Daten aus dem realen System validiert werden, d. h. in diesem Fall Daten von echten Pflanzen.

1.3

Mathematik als natürliche Modellsprache

1.3.1

Input-Output-Systeme

Jedes System, das in Wissenschaft oder im Ingenieurwesen untersucht wird, muss beobachtbar in dem Sinne sein, dass es gewisse messbare Ausgaben produziert (ein System welches diese minimale Forderung nicht erfüllt, sollte eher von Theologen als von Wissenschaftlern oder Ingenieuren betrachtet werden). Zu beachten ist, dass die Bedingung zur Beobachtbarkeit auch für die Fälle erfüllt werden kann, in denen nichts direkt messbar ist, wie zum Beispiel bei Schwarzen Löchern. Diese können nicht direkt gemessen werden, dafür die von ihnen verursachten Gravitationseffekte in deren Umgebung. Die meisten von Ingenieuren oder Wissenschaftlern betrachteten Systeme benötigen gewisse Eingabedaten, die dann in Verbindung mit der Ausgabe des Systems studiert werden können (Abb. 1.2a). Zum Beispiel kann ein Wissenschaftler, der die Photosynthese verstehen möchte, ein Experiment aufbauen, bei dem er die Kohlehydratproduktion einer Pflanze in Abhängigkeit von Lichtmenge, Wassermenge, CO_2 usw. misst. In diesem Fall ist die Pflanzenzelle das System, Licht, CO_2 und Wassermenge sind die Eingangsgrößen und die gemessene Kohlehydratproduktion ist die Ausgangsgröße. Oder der Ingenieur, der die Kraftstoffeinspritzpumpe verbessern möchte, ändert die Pumpenkonstruktion auf verschiedene Art und Weise. Anschließend misst er den Kraftstoffverbrauch, der sich durch die modifizierten Konstruktionen ergeben. In diesem Fall ist die Einspritzpumpe das System, die Konstruktionsparameter, welche der Ingenieur ändert, sind die Eingabeparameter und der resultierende Kraftstoffverbrauch ist die Ausgangsgröße.

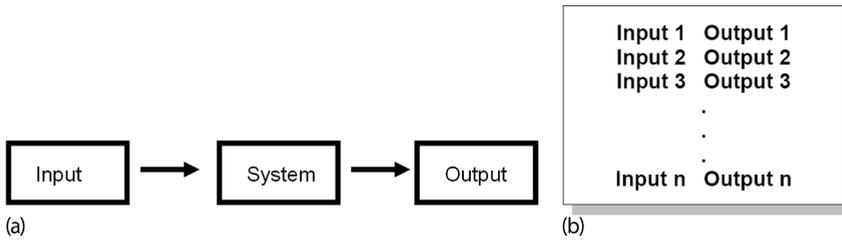


Abb. 1.2 (a) Kommunikation eines Systems mit der Außenwelt. (b) Allgemeine Form eines experimentellen Datensatzes.

Natürlich gibt es auch Situationen, in denen Wissenschaftler auf das System selbst schauen und nicht nur auf seine Input-Output-Beziehung, zum Beispiel wenn ein Botaniker den Aufbau einer gerade neu entdeckten Pflanze beschreiben und klassifizieren möchte. Solche rein beschreibende Studien rufen dann normalerweise Fragen über die Funktionsweise des Systems hervor, und hier kommt die Input-Output-Relation ins Spiel. Andererseits beschäftigen sich Ingenieure immer mit Input-Output-Beziehungen, denn sie beschäftigen sich mit Technologie, die in der Encyclopedia Britannica definiert ist als „die Anwendung von wissenschaftlichen Kenntnissen auf praktische Ziele des menschlichen Lebens“. Diese „praktischen Ziele“ werden mit den Ausgaben eines Systems ausgedrückt. Die Anpassung der Systemeingabe (Input) in Richtung einer optimierten Systemausgabe (Output) ist genau das, was Ingenieure normalerweise tun. Im Grunde es die die wahre Aufgabe des Ingenieurwesens.

1.3.2

Allgemeine Form experimenteller Daten

Das experimentelle Vorgehen wie oben beschrieben ist im Ingenieurwesen und in den (empirischen) Wissenschaften sehr verbreitet, um ein System zu verstehen, zu entwickeln oder zu verbessern. Dieses Vorgehen ist durchaus ein sinnvolles Hilfsmittel, um *Blackboxes* zu durchleuchten. Zu Beginn einer experimentellen Studie kann das zu untersuchende System wie eine „Blackbox“ aufgefasst werden und zwar im dem Sinne, dass eine Ungewissheit über den Prozess innerhalb des Systems besteht, der die Eingabe in die Ausgabe transformiert. Im Extremfall weiß der Experimentator nur, dass „etwas“ innerhalb des Systems passiert was die Eingabe zur Ausgabe transformiert. Trotzdem hat der Experimentator normalerweise eine Hypothese über den internen Prozess, die er im Rahmen seiner Studie belegen oder widerlegen möchte. Das bedeutet, im Grunde haben es die Experimentatoren mit einem System als Greybox zu tun, die irgendwo zwischen Blackbox und Whitebox liegt (nähere Details in Abschnitt 1.5).

Abhängig von der zu überprüfenden Hypothese des Experimentators wird er dem System mit geeigneten Eingabegrößen entgegnetreten, in der Hoffnung, dass die erzeugten Systemausgaben ihm helfen, seine Hypothese zu belegen oder zu widerlegen. Das ist ganz ähnlich einem Frage-und-Antwort-Spiel: Der Experi-

mentator stellt dem System eine Frage, das ist die Eingabe (Input), und das System antwortet auf diese Frage in Form messbarer Ausgangsgrößen (Output). Das Ergebnis ist ein Datensatz, der in einer allgemeinen Form in Abb. 1.2b zu sehen ist. In seltenen Fällen, besonders dann wenn es sich um ein sehr einfaches System handelt, können die internen Prozesse bereits durch den Datensatz selbst ersichtlich sein. Trotzdem ist das Frage-und-Antwort-Spiel typischerweise vergleichbar mit der Befragung eines Orakels: Wir wissen, dass im Datensatz gewisse Informationen über das System stecken, aber nur durch Anwendung geeigneter Ideen und Methoden, kann der tatsächliche Informationsgehalt aus den Daten gewonnen werden.

1.3.3

Bedeutung numerischer Daten

Was ist nun eine geeignete Methode für die Analyse von experimentellen Datensätzen? Um diese Frage beantworten zu können, ist es wichtig zu wissen, dass in den meisten Fällen die experimentellen Daten aus Zahlen oder zumindest quantifizierbaren Werten bestehen. Die Eingabe- und Ausgabedaten, wie sie in Abb. 1.2b gegeben sind, bestehen üblicherweise aus Spalten mit Zahlenwerten. Daraus ergibt sich ganz natürlich, das System mit Hilfe der Mathematik zu beschreiben. In der Tat kann das System als mathematische Funktion betrachtet werden, bei der eine gegebene Eingangsgröße x auf eine Ausgangsgröße $y = f(x)$ abgebildet wird (Abb. 1.2a). Wenn wir also die internen Mechanismen eines Systems „Blackbox“ verstehen wollen, d. h. wenn wir die inneren Prozesse eines realen Systems verstehen wollen, welches Inputdaten zu Outputdaten transformiert, dann erscheint es als natürlich, diesen Vorgang mit mathematischen Operationen zu übersetzen. Dadurch erhalten wir eine vereinfachte Darstellung des realen Systems in mathematischer Form. Nun erinnern wir uns, dass per Definition (Definition 1.1) eine vereinfachte Beschreibung eines realen Systems (zusammen mit einem Problem, das wir lösen wollen) bereits ein Modell darstellt. Die Darstellung eines realen Systems in mathematischer Form ist damit ein mathematisches Modell eines solchen Systems.

Bemerkung 1.7. Natürlichkeit eines mathematischen Modells Die meisten praktisch wichtigen Input-Output-Systeme basieren auf numerischen (oder quantifizierbaren) Inputdaten x und Outputdaten y , deren Zusammenhang in natürliche Weise als mathematische Funktion $y = f(x)$ ausgedrückt werden kann. Durch die mathematische Formulierung wird der mächtige Apparat mathematischer Analysemethoden auf Probleme unterschiedlichster Herkunft anwendbar.

Nachgewiesenermaßen ist in der Wissenschaft und dem Ingenieurwesen diese einfache Idee, die internen Mechanismen eines realen Systems auf mathematische Operationen abzubilden, für das Verständnis, die Optimierung oder die Entwicklung des Systems äußerst nutzbringend. Der ungeheure Erfolg dieser Idee

kann nur durch die Natürlichkeit des Vorgehens erklärt werden – mathematische Modellierung ist einfach die beste und die natürlichste Methode, wenn wir uns mit wissenschaftlichen Fragestellungen oder Ingenieurproblemen beschäftigen. Schauen wir zurück auf Abb. 1.2a, so ist offensichtlich, dass mathematische Strukturen aus dem Innersten von Wissenschaft und Ingenieurwesen hervorgehen. Jeder, der sich mit Systemen und seinen Input-Output-Beziehungen beschäftigt, befasst sich gleichermaßen mit mathematischen Problemen – unabhängig davon, ob er dies mag oder nicht und unabhängig davon, ob er das System in geeigneter Weise mit mathematischen Modellen beschreibt oder nicht. Dennoch hängt der Erfolg seiner Arbeit sehr stark von dem geeigneten Einsatz mathematischer Modelle ab.

1.4

Definition mathematischer Modelle

Fangen wir mit einer allgemeinen Definition an, um mathematische Modelle zu verstehen. Es sind verschiedene Definitionen von mathematischen Modellen in der Literatur zu finden, wobei die Unterschiede zwischen den Definitionen üblicherweise mit den verschiedenen wissenschaftlichen Interessen der Autoren erklärt werden können. Zum Beispiel definieren Bellomo und Preziosi [16] ein mathematisches Modell als eine Menge von Gleichungen, welches zur Berechnung der Raum-Zeit-Entwicklung eines physikalischen Systems verwendet werden kann. Obwohl diese Definition für die Probleme, die von Bellomo und Preziosi behandelt werden, ausreichend ist, schließt es eine große Anzahl von mathematischen Modellen aus. Zum Beispiel können viele ökonomische oder soziologische Probleme nicht in einem Raum-Zeit-Rahmen oder ausschließlich auf Grundlage von Gleichungen betrachtet werden. Daher ist eine allgemeinere Definition eines mathematischen Modells nötig, wenn wir alle Arten von mathematischen Modellen in Wissenschaft und Ingenieurwesen abdecken wollen. Starten wir mit folgender Definition:

- **Definition 1.4.** Ein mathematisches Modell ist eine Menge von mathematischen Aussagen $M = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$.

Diese Definition deckt sicherlich wie gefordert alle Arten von mathematischen Modellen in Wissenschaft und Ingenieurwesen ab. Dennoch gibt es ein Problem mit dieser Definition. Eine einfache mathematische Aussage wie zum Beispiel $f(x) = e^x$ wäre ein mathematisches Modell im Sinne der Definition. Dagegen ist eine solche Aussage im Sinne von Minskys Definition eines Modells (Definition 1.1) kein Modell, solange eine Verbindung zu einem System und eine Frage bezogen auf dieses System fehlt. Der oben gegebene Versuch einer Definition ist unvollständig, solange diese nur auf das Wort „mathematisch“ im Begriff *mathematisches Modell* eingeht, ohne irgendeinen Bezug zu einem Zweck oder Ziel herzustellen. Folgen wir der Philosophie einer teleologischen Definition der Aus-

drücke *Modell*, *Simulation* und *System* aus Abschnitt 1.2, so ersetzen wir obige Definition durch:

■ **Definition 1.5. Mathematisches Modell** Ein mathematisches Modell ist ein Objekt (S, Q, M) , wobei S ein System, Q eine Frage bezüglich S und M eine Menge von mathematischen Aussagen $M = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ ist, die zur Beantwortung von Q verwendet werden kann.

Wir stellen fest, dass diese Formulierung wieder eine formale Definition im Sinne der Bemerkung 1.3 in Abschnitt 1.2 ist. Dies ist durch die einfache Tatsache gerechtfertigt, dass diese Definition hilft, die Natur von mathematischen Modellen zu verstehen, und uns gestattet, über die mathematischen Modelle in einer prägnanten Art und Weise zu sprechen. Eine ähnliche Definition ist von Bender [17] gegeben worden: „Ein mathematisches Modell ist ein abstraktes, einfaches, mathematisches Konstrukt mit Bezug zu einem Teil der Realität und für einen besonderen Zweck erstellt“. Anzumerken ist, dass Definition 1.5 nicht nur auf physikalische Systeme eingeschränkt ist. Es beinhaltet auch psychologische Modelle und ebenso Modelle, die im Wesentlichen metaphysische Größen wie Gedanken, Intentionen, Gefühle usw. betrachten. Sogar die Mathematik selbst ist in der obigen Definition enthalten. Nehmen wir zum Beispiel an, dass S die Menge der natürlichen Zahlen ist und unsere Frage Q in Bezug auf S darin besteht, ob es unendlich viele Primzahlen gibt oder nicht. Dann ist das Tripel (S, Q, M) ein mathematisches Modell im Sinne der Definition 1.5, wenn M die Aussage „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ zusammen mit anderen Aussagen enthält, die für den Beweis erforderlich sind. In diesem Sinne kann die gesamte mathematische Theorie als eine Ansammlung von mathematischen Modellen angesehen werden.

Die Bezeichnung (S, Q, M) in Definition 1.5 hebt die chronologische Reihenfolge hervor, in der die Komponenten des mathematischen Modells üblicherweise erscheinen. In der Regel ist als Erstes das System gegeben, dann stellt sich eine Frage Q in Bezug auf das System und erst dann werden mathematische Aussagen formuliert, so dass ein mathematisches Modell entsteht. Jede Komponente des Tripels (S, Q, M) ist ein unverzichtbarer Teil des Ganzen. Für M ist das offensichtlich, aber auch S und Q sind genauso wichtig. Ohne S sind wir nicht in der Lage eine Frage Q zu formulieren; ohne Frage Q gibt es gewissermaßen „nichts zu tun“ für das mathematische Modell; und ohne S und Q ist das verbleibende M nicht mehr als ein „*l'art pour l'art*“. Zum Beispiel die Formulierung $f(x) = e^x$ ist solch ein rein mathematischer „*l'art pour l'art*“ Ausdruck, solange wir ihn nicht mit einem System und einer Frage verbinden. Das Ganze wird nur dann ein mathematisches Modell, wenn wir ein System S und eine Frage Q in Verbindung mit S definieren. Betrachten wir die obige Funktion als Ausdruck für die exponentielle Wachstumsperiode einer Pflanze (Abschnitt 3.6.2), dann ist $f(x) = e^x$ ein mathematisches Modell, um Fragen in Verbindung mit dem Pflanzenwachstum zu beantworten. Wir können sagen, es ist gerade eine grundlegende Eigenschaft eines mathematischen Modells mehr als „*l'art pour l'art*“ zu sein, und genau das ist die Intension hinter der Notation (S, Q, M) in Definition 1.5. Anzumerken ist,

dass die Definition eines mathematischen Modells von Bellomo und Preziosi [16] wie oben diskutiert ein Spezialfall der Definition 1.5 ist. Dazu müssen wir S auf ein physikalisches System, M auf Gleichungen beschränken und zusätzlich nur Fragen Q erlauben, die sich eine Zeit-Raum-Entwicklung von S beziehen.

Bemerkung 1.8. Mehr als „l'art pour l'art“ Das System S und die Frage Q bezüglich S sind unverzichtbare Bestandteile eines mathematischen Modells (S, Q, M) . Anders gesagt: Es ist eine charakteristische, originäre und unverzichtbare Eigenschaft mathematischer Modelle, mehr als nur mathematisches „l'art pour l'art“ zu sein.

Schauen wir uns ein weiteres berühmtes Beispiel an, um die Bedeutung von Q zu erkennen. Nehmen wir an, wir möchten das Verhalten eines mechanischen Systems S vorhersagen. Dann hängt das geeignete mathematische Modell von dem zu lösenden Problem ab, d. h. von der Frage Q . Wenn Q die Frage nach dem Verhalten von S bei moderaten Geschwindigkeiten beinhaltet, dann lässt sich die klassische (newtonsche) Mechanik anwenden, d. h. $M = \{\text{Gleichungen der newtonschen Mechanik}\}$. Wenn Q stattdessen die Frage nach dem Verhalten von S bei Geschwindigkeiten nahe Lichtgeschwindigkeit beinhaltet, dann müssen wir stattdessen $M = \{\text{Gleichungen der relativistischen Mechanik}\}$ wählen.

Die Definition des mathematischen Modells erlaubt auch noch andere, mehr formal ausgerichtete Formulierungen, wie zum Beispiel über die Wahl des besten Modells (siehe Bemerkung 1.4). So lassen sich Folgen von mathematischen Modellen bilden, die wir einfach mit (S, Q, M_n) , $n = 1, 2, \dots$, bezeichnen können. Führen wir zusätzlich einen Abstandsbegriff zwischen zwei Modellen wie (S, Q, M_n) und (S, Q, M_m) ein, lassen sich sogar Aussagen über Konvergenz und Ähnliches treffen. In diesem Sinne kann das beste Modell in Bemerkung 1.4 auch beschrieben werden als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S, Q, M_n) = (S, Q, M_{\text{opt}}) \quad (1.1)$$

1.5

Beispiele und weitere Definitionen

Allgemein kann man sagen, dass wir uns jedes Mal mit mathematischen Modellen im Sinne der Definition 1.5 beschäftigen, wenn wir Berechnungen in unserem Alltagsleben durchführen oder wir die Mathematik anwenden, die wir in den Schulen und an den Universitäten gelernt haben. Da jeder von uns im Alltagsleben rechnet, verwendet jeder mathematische Modelle. Daher ist es die Aussage „Jeder modelliert und simuliert“ aus dem Vorwort zutreffend. Schauen wir uns nachfolgend ein paar Beispiele für mathematische Modelle an, die uns zu Definitionen für weitere wichtige Begriffe führen.

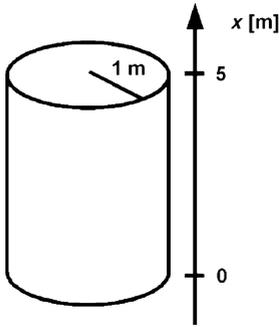


Abb. 1.3 Massenbestimmungsproblem.

Bemerkung 1.9. Jeder modelliert und simuliert! Mathematische Modelle im Sinne von Definition 1.5 treten immer dann auf, wenn wir Berechnungen im Alltagsleben durchführen.

Nehmen wir an, dass wir das *Durchschnittsalter einer Gruppe von Menschen* wissen möchten. Dann verwenden wir ein mathematisches Modell (S, Q, M) , bei dem S die Gruppe ist, Q nach dem Durchschnittsalter fragt und M die Formel für den Mittelwert ist, also $\bar{x} = (\sum_{i=1}^n x_i)/n$. Oder wir möchten die Masse X einer Substanz in einem zylindrischen Behälter wie in Abb. 1.3 wissen, wobei die Konzentration c der Substanz im Behälter konstant ist. Dann ergibt die Multiplikation des Behältervolumens mit der Konzentration c die Masse X der Substanz, d. h.

$$X = 5\pi c \quad (1.2)$$

In diesem Fall verwenden wir ein Modell (S, Q, M) , wobei S der Behälter mit Inhalt ist, Q fragt nach der Masse der Substanz und M ist die Gl. (1.2). Suchen wir nach einem Beispiel, welches nicht nur eine einfache algebraische Gleichung enthält, so brauchen wir nur anzunehmen, dass die *Konzentration c im Behälter* der Abb. 1.3 von der Höhenkoordinate x abhängt. Hier muss die Gl. (1.2) umformuliert werden zu

$$X = \pi \cdot \int_0^5 c(x) dx \quad (1.3)$$

In dieser Gleichung ist ein Integral vorhanden, d. h. wir haben jetzt den Bereich der Analysis betreten.

Bemerkung 1.10. Notationskonvention Für Variablen wie X und c in Gl. (1.2), die wir ohne weitere Spezifikation verwenden, nehmen wir an, dass es sich um reelle Zahlen handelt. Funktionen wie $c(x)$ in Gl. (1.3) sind reelle Funktionen mit einem geeigneten Definitions- und Bildbereich (wie $c : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}_+$ im obigen Beispiel), solange nichts anderes angegeben ist.

In vielen mathematischen Modellen (S, Q, M) im Bereich der Analysis beinhaltet Q die Frage nach der Optimierung einer Größe. Nehmen wir zum Beispiel an,

dass wir den *geringsten Materialverbrauch* einer zylindrischen (Konserven-)Dose mit einem Volumen von 1,0 l suchen. In diesem Fall kann

$$M = \{ \pi r^2 h = 1, \quad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min \} \quad (1.4)$$

verwendet werden, um das Problem zu lösen. Bezeichnen wir mit r den Radius und mit h die Höhe der Dose, dann beschreibt die erste Aussage in Gl. (1.4) das Dosenvolumen von 1,0 l. Die zweite Aussage bedeutet, dass die Oberfläche der Dose minimal werden soll, was äquivalent dazu ist, dass die Materialmenge zur Erstellung der Dose minimal wird. Das mathematische Problem (1.4) kann dadurch gelöst werden, indem wir die erste Gleichung von (1.4) in die zweite Gleichung von (1.4) einsetzen. Damit erhalten wir

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \rightarrow \min \quad (1.5)$$

Diese Aufgabe kann mit Standardmethoden der Analysis (erste Ableitung gleich null setzen, d. h. $A'(r) = 0$, usw.) gelöst werden und erhalten für die optimale Geometrie der Dose die Werte

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,54 \text{ dm} \quad (1.6)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1,08 \text{ dm} \quad (1.7)$$

1.5.1

Zustandsvariablen und Systemparameter

Mit den Beispielen im letzten Abschnitt lassen sich verschiedene allgemeine Beobachtungen anstellen. Wie bereits in Abschnitt 1.1 beschrieben, liegt der größte Benefit der Modellierung in der Reduzierung der Komplexität des Originalsystems. Das kann sehr schön anhand des letzten Beispiels veranschaulicht werden. Natürlich weiß jeder von uns, dass eine zylindrische Dose sehr einfach durch ihren Radius r und ihre Höhe h beschrieben werden kann. Das heißt, jeder von uns wendet automatisch das richtige mathematische Modell an. Dadurch glaubt jeder, ähnlich dem Autoproblem in Abschnitt 1.1, dass das System zum Dosenproblem eine einfache Sache ist. Aber wenn wir nicht dieses Modell für die Dose anwenden, dann wird die Dose als ein komplexes System auftreten. Dazu stellen wir uns einen *Marsmenschen* oder ein anderes außerirdisches Wesen vor, welches noch nie zuvor einen Zylinder gesehen hat. Angenommen wir würden zu diesem Marsmenschen sagen: „Schau her, hier hast Du ein Metallblech und eine mit Wasser gefüllte Musterdose. Nun stelle eine Dose her, welche dieselbe Form hat und die gleiche Menge an Wasser enthalten soll, aber verwende so wenig wie möglich Metall. Dann wird der Marsmensch – zumindest zu Beginn – die ursprüngliche Komplexität des Problems sehen. Wenn es ein kluges Wesen ist, was wir hier einmal annehmen wollen, dann wird es feststellen, dass unendlich viele Dosengeometrien infrage kommen können. Es wird realisieren, dass eine unendliche Menge an (x, y) -Koordinaten erforderlich ist, um die Musterdose durch seine

Koordinatenmenge zu beschreiben. Es wird realisiert, dass unendlich viele Messungen oder dazu äquivalent algebraische Operationen erforderlich sind, um den Materialverbrauch basierend auf dem Oberflächeninhalt der Musterdose zu erhalten. (Wir nehmen an, dass es nichts über transzendente Zahlen wie π in seiner marsianischen Schule gelernt hat.)

Von diesem ursprünglichen („Marsmensch“) Standpunkt betrachtet, erscheint das System S des Dosenbeispiels als recht komplex. Tatsächlich handelt es sich um ein unendlich-dimensionales System. Und wir können die Stärke der mathematischen Modellierung erkennen, da diese die Dimension von unendlich auf zwei reduziert. Die mathematische Lösung des obigen Problems beinhaltet nur noch zwei Parameter: r und h (oder äquivalent r und A). Genau genommen ist das System „Dose“ des obigen Beispiels nicht nur ein unendlich dimensionales Objekt in Bezug auf die Menge der Koordinaten oder andere erwähnte Aspekte, sondern auch bezüglich vielen anderen Betrachtungen, die wir im mathematischen Modell vernachlässigt haben, da sie für die Lösung des Problems unbedeutend sind. Hierzu zählen zum Beispiel die Dicke des Metallblechs, Material, Farbe, Härte, Rauigkeit usw. Alle Informationen, die im Originalsystem $S =$ „Dose“ enthalten sind, werden auf eine Beschreibung $S_r = \{r, h\}$ reduziert, wenn wir die mathematischen Begriffe verwenden. Hier haben wir die Notation S_r verwendet, um damit anzudeuten, dass S_r nicht das Originalsystem ist, welches mit S gekennzeichnet ist. Vielmehr stellt S_r eine Beschreibung von S mit Begriffen des mathematischen Modells dar und wir bezeichnen es als das *reduzierte System*. Der Index „r“ weist darauf hin, dass der Informationsgehalt des Originalsystems S reduziert worden ist, wenn wir von S zu S_r gehen.

Bemerkung 1.11. Hauptnutzen mathematischer Modelle Ein Hauptnutzen eines mathematischen Modells (S, Q, M) besteht darin, dass der Informationsgehalt von S reduziert wird, indem S mit den in M verfügbaren mathematischen Sprachelementen als sog. *reduziertes System* beschrieben wird.

Eine formale Definition des reduzierten Systems S_r kann in zwei Schritten gegeben werden:

Definition 1.6. Zustandsvariablen Sei (S, Q, M) ein mathematisches Modell. Die mathematischen Größen s_1, s_2, \dots, s_n , die den Zustand des Systems mittels M beschreiben und die zur Beantwortung von Q erforderlich sind, werden *Zustandsvariablen* von (S, Q, M) genannt.

Definition 1.7. Reduziertes System und Systemparameter Seien s_1, s_2, \dots, s_n die Zustandsvariablen eines mathematischen Modells (S, Q, M) . Sei p_1, p_2, \dots, p_m ein nicht weiter reduzierbarer Satz mathematischer Größen (Zahlen, Variablen, Funktionen), die die Eigenschaften des Systems S mit Aussagen von M beschreiben und die zur Berechnung der Zustandsvariablen erforderlich sind. Dann ist $S_r = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ das *reduzierte System* und p_1, p_2, \dots, p_m sind die *Systemparameter* von (S, Q, M) .

Mit anderen Worten, die Zustandsvariablen beschreiben die Systemeigenschaften, an denen wir wirklich interessiert sind, wohingegen die Systemparameter die Systemeigenschaften beschreiben, die für die mathematische Berechnung der Zustandsvariablen erforderlich sind. Obwohl wir am Ende die Zustandsvariablen brauchen, um Q zu beantworten, sind die dazu nötigen Informationen bereits in den Systemparametern enthalten, d. h. in dem reduzierten System S_r . Mittels S_r und mit Hilfe mathematischer Operationen werden diese Informationen über die Zustandsvariablen ausgedrückt, welche für die abschließende Beantwortung von Q benötigt werden. Wenn wir zum Beispiel das *Problem* oben mit der *Substanzkonzentration* betrachten, dann sind wir an der Masse der Substanz im Behälter interessiert, d. h. wir haben nur eine Zustandsvariable und können $n = 1$ und $s_1 = X$ wählen. Für die Berechnung von s_1 haben wir die Konzentration c verwendet, weshalb wir einen Systemparameter in diesem Beispiel haben, d. h. $m = 1$ und $p_1 = c$. Das reduzierte System ist in diesem Fall $S_r = \{c\}$. Per Definition enthält das reduzierte System alle Informationen über das System, um die Zustandsvariable zu berechnen, d. h. um die Frage Q zu beantworten. Im *Dosenbeispiel* ist es nötig den Oberflächeninhalt zu kennen, um Q zu beantworten, d. h. in diesem Fall haben wir erneut nur eine Zustandsvariable $s_1 = A$. Auf der anderen Seite brauchen wir zwei Systemparameter $p_1 = r$ und $p_2 = h$, um s_1 zu erhalten. Das bedeutet, in diesem Fall ist das reduzierte System $S_r = \{r, h\}$.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel. In Abschnitt 3.6.2 wird ein *Pflanzenwachstumsmodell* diskutiert, um damit die zeitliche Entwicklung der gesamten Biomasse einer Pflanze vorauszusagen. Dies gelingt uns, indem außer seiner Wachstumsrate kein einziges komplexes Detail des Systems „Pflanze“ berücksichtigt wird. Damit wird das komplexe System $S =$ „Pflanze“ auf einen einzigen Parameter des Modells reduziert: die Wachstumsrate r der Pflanze. Mit obiger Notation haben wir $S_r = \{r\}$ (Abb. 1.4). Wir müssen kein Botaniker sein, um zu verstehen wie drastisch diese Informationsreduktion wirklich ist: Alles außer der Wachstumsrate wird vernachlässigt, inklusive alle Arten von makroskopischen und mikroskopischen Unterstrukturen der Pflanze, ihre Wurzeln, ihre Stängel, ihre Blätter ebenso wie ihre Zellstrukturen, alle Prozessabläufe, die im Innern der Zellen stattfinden usw. Unter dem Gesichtspunkt eines solch rabiat vereinfachten Modells macht es keinen Unterschied, ob das Modell wirklich etwas mit dem komplexen System „Pflanze“ zu tun hat oder nur mit einem formlosen grünen Brei aus Biomasse, nachdem wir die Pflanze durch einen Schredder geschickt haben, oder auch mit einem vollständig anderen System wie eine Bakterienkultur oder einem Ballon, der gerade aufgeblasen wird, usw.

Alles, was für dieses Modell zählt, ist die Wachstumsrate, die dem vorliegenden System zugewiesen werden kann. Üblicherweise mögen die Botaniker diese wirklich sehr stark vereinfachten Modelle nicht, welche virtuell ihre geliebten Pflanzen durch einen Schredder schicken ... Jeder, der solch ein Modell auf einer Botanikerkonferenz präsentiert, sollte auf eine Reihe von Fragen vorbereitet sein, die mit „Warum berücksichtigt das Modell nicht ...“ anfangen. An dieser Stelle wissen wir bereits, wie wir diese Art von Fragen beantworten: Wir wissen, dass gemäß der Definition 1.5 ein mathematisches Modell ein Triplet (S, Q, M) ist, be-



(a)

$$S_r = \{r\}$$

(b)

Abb. 1.4 (a) Topfpflanze. (b) Die gleiche Topfpflanze als reduziertes System beschrieben.

stehend aus einem System S , einer Frage Q und eine Menge von mathematischen Aussagen M , und dass die Einzelheiten des Systems S , welche mit M dargestellt werden, von der Frage Q abhängen und von dem Modell zu beantworten sind. In diesem Fall fragt Q nach der zeitlichen Entwicklung der Pflanzenbiomasse und um diese Frage zu beantworten, genügt es, das System $S =$ „Pflanze“ im Modell mit $S_r = \{r\}$ darzustellen. Allgemein gesprochen kann man sagen, dass ein reduziertes System eines gut formulierten mathematischen Modells genau aus den Eigenschaften des Originalsystems besteht, die zur Beantwortung der zu untersuchenden Frage Q wichtig sind.

Bemerkung 1.12. Wichtigkeit von Experimenten Die Eigenschaften (Parameter) des reduzierten Systems müssen durch Experimente bestimmt werden. Mathematische Modelle brauchen also Experimente als wesentliche Grundlage und machen diese nicht etwa überflüssig (ein häufiges Missverständnis); sie helfen allerdings auch dabei, überflüssige Experimente zu vermeiden.

1.5.2

Verwendung von Computeralgebrasystemen

Halten wir ein paar weitere Beobachtungen zu unserem Beispiel „1-Liter-Dose“ oben fest. Das mathematische Problem hinter diesem Beispiel kann sehr einfach mit einer Software gelöst werden. Zum Beispiel kann das *Computeralgebrasystem* (CAS) *Maxima* verwendet werden, um das Problem wie folgt zu lösen:

```

1 A(r):=2 * %pi * r^2 + 2/r;
2 define(A1(r),diff(A(r),r));
3 define(A2(r),diff(A1(r),r));
4 erg:solve(A1(r)=0);
5 print(erg,ev(erg,number));
6 erg1:mms_real(erg);
7 print(erg1,ev(erg1,number));
8 r:ev(r,erg1);
9 print(r,ev(r,number));
10 A2(r)>0,pred;
```

Listing 1.1 Tin.mac.

$$(\%o9) \left[r = \frac{\sqrt{3}\%i - 1}{22^{1/3}\%pi} \right]^{1/3}, \left[r = -\frac{\sqrt{3}\%i + 1}{22^{1/3}\%pi} \right]^{1/3}, \left[r = \frac{1}{2^{1/3}\%pi} \right]^{1/3}$$

Abb. 1.5 *wxMaxima*-Ausgabe zu Zeile 4 in Listing 1.1.

Das sind die wesentlichen Anweisungen im *Maxima*-Programm `tin.mac`, das in der Programmsammlung zum Buch (der *Buchsoftware*, siehe Anhang A) vorhanden ist. Eine Kurzeinführung in *Maxima* wird in Abschnitt 5.3 gegeben. Zeile 1 von Listing 1.1 definiert die Funktion $A(r)$ der Gl. (1.5), die den zu minimierenden Materialverbrauch beschreibt (beachte dass `%pi` die *Maxima*-Notation für π ist). Wie wir aus der Analysis wissen, können wir das Minimum von $A(r)$ durch Lösen von $A'(r) = 0$ finden [18, 19]. Die Lösungen dieser Gleichung sind die kritischen Punkte, d. h. die Stellen relativer Maxima oder Minima abhängig vom Vorzeichen der zweiten Ableitung A'' von A . Zeile 2 und 3 des oben stehenden Codes bestimmen die erste und zweite Ableitung von $A(r)$, die als *Maxima*-Funktionen $A1(r)$ und $A2(r)$ definiert werden. Zeile 4 löst $A'(r) = 0$ mit *Maximas* `solve`-Kommando und wir erhalten ein Ergebnis wie in Abb. 1.5 dargestellt (wenn wir *wxMaxima* verwenden, siehe Abschnitt 5.3.1.2 für Einzelheiten zu *wxMaxima*).

Wie Abb. 1.5 zeigt, erhalten wir aus $A'(r) = 0$ drei kritische Punkte. Die ersten beiden beinhalten die imaginäre Einheit i (was in *Maxima* mit „%i“ dargestellt wird). Damit können wir hier die komplexen Zahlen als Lösungen ausschließen [19]. Der dritte kritische Punkt aus Abb. 1.5 ist die gesuchte Lösung, welche das Dosenproblem löst (vergleiche Gl. (1.6) oben). In Zeile 6 des Listings 1.1 wählt die Funktion `mms_real` aus allen Lösungen die reelle Lösung aus und legt das Ergebnis in `r` ab (das neu programmierte Kommando `mms_real` ist Bestandteil der Buchsoftware). Zeile 8 weist der Variablen `r` (der alte Wert wird überschrieben) den in `erg1` berechneten Wert zu, damit dieser dann in Zeile 10 in $A2$, also in die 2. Ableitung, eingesetzt werden kann. Schließlich können wir mit dem *Maxima*-Befehl `pred` überprüfen, ob der Wert der zweiten Ableitung im kritischen Punkt, der in der Variablen `r` gespeichert ist, positiv ist (eine notwendige Bedingung, damit der kritische Punkt ein Minimum ist [19]). In *Maxima* erhalten wir in diesem Fall mit Zeile 10 den Wert „true“, d. h. die zweite Ableitung ist in der Tat positiv, wie gefordert. In den Zeilen 5, 7, 9 wird jeweils das Ergebnis ausgegeben, wobei wir mit der *Maxima*-Anweisung `numer` die Lösung im numerischen Dezimalformat erhalten.

1.5.3

Strategien für das Aufstellen einfacher Modelle

In vielen Fällen reicht ein einfaches Vorgehen in drei Schritten, um ein mathematisches Modell aufzustellen. Betrachten wir das folgende Problem.

◀ **Problem 1.1.** Welche Volumen der Flüssigkeiten A und B sollen gemischt werden, um 150 l einer Flüssigkeit C zu erhalten, die 70 g/l einer bestimmten Substanz enthält, welche in A die Konzentration 50 g/l und in B die Konzentration 80 g/l hat?

Für das einfache Problem werden viele von uns sofort die richtigen Gleichungen aufschreiben:

$$x + y = 150 \quad (1.8)$$

$$50x + 80y = 70 \cdot 150 \quad (1.9)$$

wobei x [l] und y [l] die unbekanntes Volumen der Flüssigkeiten A und B sind. Bei komplexeren Problemen ist es sicherlich sinnvoll, ein systematisches Vorgehen für das Aufstellen von Gleichungen zu haben. Ein bewährtes Schema für eine große Anzahl von Problemstellungen kann wie folgt beschrieben werden:

Bemerkung 1.13. Modelle in drei Schritten formulieren!

Schritt 1 Finde die Anzahl der Unbekannten, d. h. die Anzahl der Größen, die für das Problem berechnet werden müssen. In vielen Problemformulierungen genügt es hier, einfach den letzten Satz zu lesen, in dem die Frage gestellt wird.

Schritt 2 Gebe eine *präzise* Definition der Unbekannten, einschließlich Einheiten. Es ist eine praktische Erfahrung, dass dieser Schritt von Schritt 1 getrennt werden sollte.

Schritt 3 Lies die Problemformulierung Satz für Satz, übersetze die Informationen in mathematische Aussagen, die die Unbekannten aus Schritt 2 enthalten.

Nun wenden wir dieses Vorgehen auf das Problem 1.1 von oben an. In *Schritt 1* und *Schritt 2* können wir sicherlich feststellen, dass Problem 1.1 nach den beiden folgenden Unbekannten fragt:

- x : Volumen von Flüssigkeit A im Gemisch [l]
- y : Volumen von Flüssigkeit B im Gemisch [l]

Diese Schritte sind wichtig, weil sie uns die Unbekannten verraten, die wir für das Aufstellen der Gleichungen benötigen. Solange die Unbekannten für uns unbekannt sind, wird es schwierig sein, in Schritt 3 sinnvolle Gleichungen zu formulieren. Es ist ein häufiger Anfängerfehler in mathematischer Modellierung, nicht hinreichend eindeutige Unbekannte in Gleichungen zu verwenden. Immer wieder werden einfach Symbole aus der Problemformulierung herausgepickt – wie A, B, C in Problem 1.1 oben – und Gleichungen wie

$$50A + 80B = 70 \quad (1.10)$$

formuliert. Diese Gleichung ist tatsächlich *fast* richtig, aber es ist sehr schwer die Korrektheit nachzuprüfen, solange die genaue Definition der Unbekannten

nicht vorliegt. Das eigentliche Problem mit Gleichungen wie Gl. (1.10) liegt darin, dass A, B, C bereits in der Problemformulierung definiert sind. Dort werden sie für die Bezeichnung der Flüssigkeiten eingesetzt, während sie (implizit) dazu verwendet werden, um die Volumen der Flüssigkeiten in Gl. (1.10) auszudrücken. Daher schreiben wir dieselben Gleichungen mit den Unbekannten x und y , wie oben definiert:

$$50x + 80y = 70 \quad (1.11)$$

Jetzt besteht die Möglichkeit die Definition von x und y für die Überprüfung der Gleichung zu verwenden. Wir können sehen, dass die linke Seite der Gl. (1.11) die Einheit [g] hat, was das Ergebnis der Multiplikation von z. B. 50 [g/l] mit x [l] ist. Die rechte Seite von Gl. (1.11) hat dagegen die Einheit [g/l]. Also haben wir verschiedene Einheiten auf den verschiedenen Seiten der Gleichung. Das bedeutet, die Gleichung ist falsch. Gleichzeitig kann uns ein Vergleich der Einheiten auf die Sprünge helfen, wie wir eine korrekte Gleichung erhalten können. In diesem Fall können wir offensichtlich das Problem lösen, indem wir die rechte Seite von Gl. (1.11) mit einer Größe multiplizieren, welche die Einheit [l] hat. Die einzige Größe dieser Art in der Problemformulierung ist das Volumen 150 [l], was dem Volumen des Gemisches entspricht. Multiplizieren wir die 70 in Gl. (1.11) mit 150, dann wird in diesem Fall tatsächlich das Problem gelöst.

Bemerkung 1.14. Kontrolliere die Einheiten! Kontrolliere immer, ob die Einheiten auf beiden Seiten der Gleichung identisch sind. Sollte es Unterschiede geben, dann versuche diese mit Daten aus der Problemstellung zu beheben.

Das größte Problem in *Schritt 3* ist, diejenigen Aussagen der Problemformulierung zu identifizieren, die den mathematischen Aussagen wie Gleichungen, Ungleichungen usw. entsprechen. Die folgende Bemerkung kann als allgemeiner Leitfaden verwendet werden:

Bemerkung 1.15. Wo sind die Gleichungen? Aussagen einer Problemformulierung, die in mathematische Aussagen wie Gleichungen, Ungleichungen usw. übersetzt werden können, zeichnen sich dadurch aus, dass sie den Werten der Unbekannten Einschränkungen aufzwingen.

Versuchen wir einige Aussagen aus Problem 1.1 im Licht dieser Strategie zu analysieren:

- *Aussage 1:* 150 l der Flüssigkeit C werden gefordert.
- *Aussage 2:* Flüssigkeit A enthält 50 g/l der Substanz.
- *Aussage 3:* Flüssigkeit B enthält 80 g/l der Substanz.
- *Aussage 4:* Flüssigkeit C enthält 70 g/l der Substanz.

Man sieht direkt, dass *Aussage 1* eine Einschränkung an die Werte von x und y bedeutet, die sich unmittelbar in folgende Gleichung übertragen lässt:

$$x + y = 150 \quad (1.12)$$

Aussage 2 und *Aussage 3* enthalten dagegen keine Beschränkungen an die Unbekannten. Die Forderungen, dass in Flüssigkeit A 50 g/l bzw. in Flüssigkeit B 80 g/l der Substanz enthalten ist, sind vollständig damit vereinbar, dass die Unbekannten x und y beliebige Werte annehmen dürfen. Allerdings enthält *Aussage 4* wieder eine Einschränkung an x und y . Wenn z. B. ein Wert für x gegeben ist, dann lässt sich die Konzentration von 70 g/l nur für einen bestimmten Wert von y realisieren. Die *Aussage 4* lässt sich mathematisch durch Gl. (1.9) ausdrücken. Wer Schwierigkeiten damit hat diese Gleichung direkt aufzuschreiben, der kann vielleicht folgender heuristischen, nicht vollständig mathematischen Methode folgen, bei der wir so nahe wie möglich bei der Aussage der Problemformulierung beginnen. In diesem Fall können wir *Aussage 4* ausdrücken als

$$\{\text{Konzentration der Substanz in Flüssigkeit C}\} = 70 \quad (1.13)$$

Dann verwenden wir die Definition einer Konzentration wie folgt:

$$\frac{\{\text{Masse der Substanz in Flüssigkeit C}\}}{\{\text{Volumen des Gemischs}\}} = 70 \quad (1.14)$$

Als nächsten Schritt müssen wir zwei Dinge beschreiben:

- Die Masse der Substanz in Flüssigkeit C kommt von Flüssigkeit A und B.
- Das Volumen des Gemischs ist 150 l.

Dies führt zu

$$\frac{\{\text{Masse der Substanz in Flüssigkeit A}\} + \{\text{Masse der Substanz in Flüssigkeit B}\}}{150} = 70 \quad (1.15)$$

Die Massen der Substanz in A und B können leicht hergeleitet werden, wenn wir die Konzentration, wie in Problem 1.1 gegeben, verwenden:

$$\frac{50x + 80y}{150} = 70 \quad (1.16)$$

Damit haben wir wieder Gl. (1.9) erhalten. Das hier benutzte heuristische Vorgehen für die Herleitung der Gleichung ist insbesondere nützlich, wenn wir uns mit komplexeren Problemen beschäftigen. Dann kann es schwierig sein, einfach durch Intuition eine Gleichung wie Gl. (1.9) zu finden. Und es kann gefährlich sein, wenn die Intuition in die Irre führt. Daher empfehlen wir grundsätzlich:

Bemerkung 1.16. Heuristik für die Formulierung mathematischer Aussagen

Um eine Aussage einer Problemformulierung in eine mathematische Aussage, z. B. eine Gleichung oder Ungleichung, zu übersetzen, sollte im ersten Schritt versucht werden, die Aussage der Problemformulierung mit mathematischen und nichtmathematischen Sprachelementen so gut wie möglich nachzubilden. Wenn diese Anfangsformulierung nichtmathematische Ausdrücke enthält, ähnlich wie Gl. (1.13), so sind dann in den nachfolgenden Schritten diese nichtmathematische Ausdrücke durch mathematische Ausdrücke zu ersetzen, die die Unbekannten enthalten.

Die hier beschriebene Vorgehensweise entspricht den Schritten *Systemanalyse* und *Modellierung* im Modellierungs- und Simulationsschema der Bemerkung 1.5. Die Gln. (1.8) und (1.9) können recht einfach per Hand oder per Computer gelöst werden, wenn wir *Maximas solve*-Kommando verwenden, wie in Abschnitt 1.5.2 beschrieben. Im konkreten Fall liefern die *Maxima*-Kommandos

```
1 solve([
2 x+y=150
3 ,50*x+80*y=70*150
4 ]);
```

Listing 1.2 *Mix.mac*.

das folgende Resultat:

```
1 [[x = 50, y = 100]]
```

Listing 1.3 Ergebnis von *Mix.mac*.

Der Programmcode ist Bestandteil der Buchsoftware (siehe Anhang A). Wie zu sehen ist, wird das Ergebnis in einer verschachtelten *Listenstruktur* ausgegeben (Listen werden in *Maxima* in der Form „[a, b, c, . . .]“ geschrieben: Die innere Liste [x=50, y=100] beinhaltet die von *Maxima* berechneten Werte der Unbekannten, wohingegen die äußere Liste für die Fälle benötigt wird, wenn die Lösung nicht eindeutig ist (siehe das Beispiel in Abschnitt 1.5.2)).

Beachte, dass alle Zeilen 1–4 von Listing 1.2 zusammengefasst das einfache Kommando `solve` bilden. Den Aufruf haben wir hier über mehrere Zeilen verteilt, um die Lesbarkeit des Gleichungssystems zu verbessern. Beachte auch, dass das Komma am Anfang der Zeile 3 auch an das Ende von Zeile 2 hätte geschrieben werden können, was auf den ersten Blick vielleicht sinnvoller erscheint. Der Grund für diese Art der Notation ist, dass es damit leichter wird, ein großes Gleichungssystem zu erzeugen. So können wir einfach per „Copy-and-paste“ die Zeile 3 vervielfachen. Wenn wir dies mit einer Zeile tun, die ein Komma am Ende hat, so endet unsere letzte Gleichung ebenfalls mit einem Komma, wo aber keines sein sollte. So empfehlen wir diese Art der Notation als „narrensichere“ Methode, die das Leben mit *Maxima* und anderen Computeralgebrasystemen einfacher macht.

1.5.3.1 Ein Mischungsproblem

Da das Problem 1.1 im letzten Abschnitt recht einfach zu lösen war und die verschiedenen Empfehlungen vielleicht als unnötig empfunden werden, insbesondere auf das spezielle Problem bezogen, so schauen wir uns nun ein komplexeres Problem an, um es mit den vorgestellten Ideen zu lösen:

◀ **Problem 1.2.** Die Flüssigkeiten A–D enthalten die Substanzen S_1, S_2, S_3 gemäß folgender Tabelle (Konzentration in g/l):

	A	B	C	D
S_1	2,5	8,2	6,4	12,7
S_2	3,2	15,1	13,2	0,4
S_3	1,1	0,9	2,2	3,1

Wie groß ist die Konzentration von S_3 in einem Gemisch, wenn dieses 75 % (Volumenprozent) der Flüssigkeiten A und B enthalten soll sowie 4 g/l der Substanz S_1 und 5 g/l der Substanz S_2 ?

Folgen wir *Schritt 1* und *Schritt 2* des Drei-Schritt-Vorgehens der Bemerkung 1.13, so ist ganz augenscheinlich nur eine Unbekannte festzulegen:

- x : Konzentration von S_3 im Gemisch (g/l)

Der *Schritt 3* verlangt nun, dass wir die mathematische Aussage mit der Unbekannten x formulieren. Nach Bemerkung 1.15 sollen wir nach Aussagen in obiger Problemstellung suchen, die eine Einschränkung an unsere Unbekannte x aufzwingen. Drei Aussagen dieser Art können identifiziert werden:

- *Aussage 1:* 75 % des Gemisches bestehen aus A und B.
- *Aussage 2:* Das Gemisch enthält 4 g/l von S_1 .
- *Aussage 3:* Das Gemisch enthält 5 g/l von S_2 .

Jede dieser Aussagen schließt eine große Anzahl von möglichen Gemischen aus und legt Einschränkungen für x fest. Beginnen wir mit *Aussage 1*, so erkennen wir sofort, dass diese Aussage nicht mit einem Ausdruck in x formuliert werden kann. Wir sind hier in einer Situation, in der wir eine gewisse Anzahl von Hilfsvariablen benötigen, um das Problem mathematisch zu formulieren.

Bemerkung 1.17. Hilfsvariablen In einigen Fällen erfordert die Übertragung einer umgangssprachlichen Problemformulierung in mathematische Aussagen die Einführung von *Hilfsvariablen*. Aufgabe dieser Hilfsvariablen ist es, mathematische Sprachelemente zur Verfügung zu stellen, die die mathematische Formulierung solcher Aussagen der Problemformulierung ermöglichen, die für die Bestimmung der Unbekannten wesentlich sind. Normalerweise liefert die Problemformulierung genügend Informationen, um die Hilfsvariablen *und* die Un-

bekannt zu bestimmen (d. h. die Hilfsvariablen vergrößern z. B. die Größe des Gleichungssystems).

Im aktuellen Fall können wir einfach folgende Hilfsvariablen definieren:

- x_A : Prozent (bzgl. Volumen) von Flüssigkeit A im Gemisch
- x_B : Prozent (bzgl. Volumen) von Flüssigkeit B im Gemisch
- x_C : Prozent (bzgl. Volumen) von Flüssigkeit C im Gemisch
- x_D : Prozent (bzgl. Volumen) von Flüssigkeit D im Gemisch

Damit kann die obige *Aussage 1* einfach ausgedrückt werden als:

$$x_A + x_B = 0,75 \quad (1.17)$$

Ähnlich zum vorherigen Problem lassen sich die *Aussage 2* und *Aussage 3* formulieren als:

$$\{\text{Konzentration von } S_1 \text{ im Gemisch}\} = 4 \quad (1.18)$$

und

$$\{\text{Konzentration von } S_2 \text{ im Gemisch}\} = 5 \quad (1.19)$$

Die Informationen in der Tabelle oben lassen sich bei einem ähnlichen Vorgehen wie im vorherigen Abschnitt übersetzen in

$$2,5x_A + 8,2x_B + 6,4x_C + 12,7x_D = 4 \quad (1.20)$$

und

$$3,2x_A + 15,1x_B + 13,2x_C + 0,4x_D = 5 \quad (1.21)$$

Da x die Konzentration von S_3 im Gemisch ist, folgt aus einer ähnlichen Argumentation wie zuvor:

$$1,1x_A + 0,9x_B + 2,2x_C + 3,1x_D = x \quad (1.22)$$

Bisher haben wir die vier Gln. (1.17), (1.20), (1.21), (1.22), um die fünf Unbekannten x , x_A , x_B , x_C , x_D zu bestimmen, d. h. wir brauchen noch eine weitere Gleichung. In diesem Fall ist die fehlende Gleichung implizit durch die Definition von x_A , x_B , x_C , x_D gegeben. Diese Variablen drücken Prozentwerte aus, genauer den Volumenanteil am Gesamtvolumen. Da alle Anteile zusammen eins ergeben, erhalten wir

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 1 \quad (1.23)$$

Zusammengefasst erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x_A + x_B = 0,75 \quad (1.24)$$

$$2,5x_A + 8,2x_B + 6,4x_C + 12,7x_D = 4 \quad (1.25)$$

$$3,2x_A + 15,1x_B + 13,2x_C + 0,4x_D = 5 \quad (1.26)$$

$$1,1x_A + 0,9x_B + 2,2x_C + 3,1x_D = x \quad (1.27)$$

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 1 \quad (1.28)$$

Das kann wieder mit *Maxima* in ähnlicher Weise wie oben gelöst werden (*Maxima*-Programm `Mix1.mac` in der Buchsoftware vorhanden, siehe Anhang A):

```
1 erg:solve([
2 xA+xB=0.75
3 ,2.5*xA+8.2*xB+6.4*xC+12.7*xD=4
4 ,3.2*xA+15.1*xB+13.2*xC+0.4*xD=5
5 ,1.1*xA+0.9*xB+2.2*xC+3.1*xD=x
6 ,xA+xB+xC+xD=1
7 ]);
8 print(erg,ev(erg, numer));
```

Listing 1.4 `Mix1.mac`.

was das folgende Resultat ergibt:

```
1          141437          1365          1783          77          14485
2 (%o6) [[x = -----, xD = -----, xC = -----, xB = -----, xA = -----]]
3          98620          19724          9862          4931          19724
4
5 (%o7) [[x = 1.434161427702291, xD = 0.0692050294058, xC = 0.1807949705942,
6          xB = 0.015615493814642, xA = 0.73438450618535]]
```

Listing 1.5 Ergebnis von `Mix1.mac`.

Wie zu sehen ist, entsprechen die Zeilen 2–6 in Listing 1.4 dem Gleichungssystem (1.24)–(1.28) und diese Zeilen werden in *Maximas* `solve`-Kommando eingebettet, ähnlich dem besprochenen Code in Listing 1.2 des vorherigen Abschnitts. Die einzige Neuerung ist, dass das Resultat des `solve`-Kommandos in einer Variablen mit dem Namen `erg`, Zeile 1 in Listing 1.4, gespeichert wird. Diese Variable `erg` wird dann in Zeile 8 des Codes verwendet, um das Ergebnis mit *Maximas* `numer`-Kommando in eine Dezimalzahl umzuwandeln. Das ist der Grund, weshalb die *Maxima*-Ausgabe zwei Teile umfasst: Die Ausgabe, die mit „(%o6)“ bezeichnet wird, ist die direkte Ausgabe des `solve`-Befehls und stellt die Lösung in Form von Brüchen dar. Obwohl damit die Lösung exakt ausgedrückt wird, wünscht man sich häufig eine Dezimaldarstellung. Dies kann mit dem `numer`-Kommando in Zeile 8 von Listing 1.4 erreicht werden und erzeugt den zweiten Teil der obigen Ausgabe, die mit „(%o7)“ bezeichnet wird. Zum Schluss können wir sagen, die Lösung von Problem 1.2 ist $x \approx 1,43 \text{ g/l}$, was der genäherten Konzentration von S_3 im Gemisch entspricht.

1.5.3.2 Ein Finanzierungsproblem

Das folgende Problem zeigt, dass einfache Problemstellungen nicht unbedingt einfache Lösungen mit sich bringen. Nehmen wir an, eine Firma möchte langfristig eine neue Maschine kaufen, wobei feststeht, dass diese in t Jahren p [Euro] kostet. Für den Kauf soll das derzeitige Kapital K [Euro] eingesetzt werden und nach m Jahren wird ein Gewinn von G [Euro] erwartet, der vollständig zur Finanzierung der Maschine verwendet werden soll. Nun wird mit der Bank über einen Zinssatz i [1] (mit $i \cdot 100$ ergibt sich der Zinssatz in Prozent) für die nächsten t Jahre verhandelt, mit dem jeweils am Jahresende das aktuell vorhandene Kapital verzinst wird. Wie hoch muss der Zinssatz mindestens sein, damit es mit der Finanzierung klappt?

Um das Modell aufzustellen, formulieren wir die Aufgabe etwas anders. Wir suchen einen Zinssatz i , so dass das nach t Jahren vorhandene Kapital gleich dem Preis P der Maschine ist. Genau genommen soll das nach t Jahren vorhandene Kapital *mindestens* so hoch sein wie der Preis. Da wir aber nach dem Mindestzinssatz suchen, genügt *gleich*.

Formulieren wir die Kapitalentwicklung in mathematischer Form. Nach einem Jahr erhalten wir

$$K \cdot i \tag{1.29}$$

Zinsen, welche zum Kapital hinzukommen. Nach einem Jahr haben wir also ein Kapital von

$$K + K \cdot i = K \cdot (1 + i) \tag{1.30}$$

Dies wiederholt sich t Jahre lang und wir haben dann ein Kapital in der Höhe von

$$K \cdot (1 + i)^t \tag{1.31}$$

Nach m Jahren kommt zum Kapital noch ein Gewinn G , welcher ebenfalls verzinst wird. Somit ergibt sich nach insgesamt t Jahren ein Gesamtkapital, welches gleich dem Preis P der Maschine sein soll:

$$K \cdot (1 + i)^t + G \cdot (1 + i)^{(t-m)} = P \tag{1.32}$$

Nun besteht das Problem darin, den Zinssatz i aus Gl. (1.32) zu bestimmen.

Betrachten wir eine erste Situation in der $t = 2$ und $m = 1$ vorliegt, so können wir das Problem mit Hilfe des *Maxima*-Befehls `solve` lösen. Die Berechnung der Lösung kann mit folgenden *Maxima*-Programm umgesetzt werden:

```
1 t:2;m:1;
2 erg:solve(K*(1+i)^t+G*(1+i)^(t-m)=P,i);
3 expr:i,erg[2];
4 expr,[P=50000,G=30000,K=10000],numer;
```

Listing 1.6 Maxima-Programm zum Lösen der Gl. (1.32).

In Zeile 1 werden die Werte für die Zeiten gesetzt. In der darauf folgenden Zeile wird die Gl. (1.32) mit `solve` gelöst und das Ergebnis in der Variable `erg` abgelegt. Das erste Argument des *Maxima*-Befehls `solve` definiert die zu lösende

Gleichung und das zweite Argument i legt fest, nach welcher Variable aufgelöst werden soll. In unserem Fall ergeben sich zwei Lösungen, wobei wir die erste Lösung verwerfen, da sie negativ ist. Daher greifen wir in Zeile 3 die zweite Lösung

$$i = \frac{\sqrt{4KP + G^2} - 2K - G}{2K} \quad (1.33)$$

aus `erg` heraus und speichern den Ausdruck in `expr`. Bis hierhin haben wir noch keine Werte für Preis P , Gewinn G und Kapital K festgelegt. Wir erhalten also eine Formel, die für jeden Wert von P , G und K direkt den Zinssatz i liefert. Natürlich lässt sich die Formel (1.33) in *Maxima* auswerten. In Zeile 4 von Listing 1.6 werden dazu den in `expr` vorhandenen Variablen P , G und K die entsprechenden Werte zugewiesen. Mit `numer` wird der Ausdruck numerisch ausgewertet und wir erhalten das Ergebnis $i \approx 0,19258 = 19,258\%$.

Betrachten wir nun eine leicht abgewandelte Situation, bei der wir die Maschine nach $t = 4$ Jahren kaufen möchten und den Gewinn weiterhin nach $m = 1$ Jahren erwarten. So müssen wir die Zeile 1 in Listing 1.6 anpassen und erhalten das *Maxima*-Programm `Financing1.mac` (Teil der Buchsoftware, siehe Anhang A):

```
1 t:4; m:1;
2 erg:solve(K*(1+i)^t+G*(1+i)^(t-m)=P,i);
3 print(tex(erg[2]));
```

Listing 1.7 `Financing1.mac`.

In diesem Programm erzeugt Zeile 3 mit der Funktion `tex` die Ergebnisausgabe im \LaTeX -Format, mit der die Darstellung in Abb. 1.6 erzeugt worden ist.

Es ist unmittelbar erkennbar, dass eine kleine Änderung des Parameterwertes für t bei ansonsten gleicher Problemstellung eine große Wirkung für die sich ergebende Formel zur Berechnung des Zinssatzes i hat. Vergleichen wir das Ergebnis in Abb. 1.6 mit dem vorherigen Ergebnis, Gl. (1.33), so ist diese Formel nennenswert länger und komplexer (zur Erinnerung: Wir haben nur die Anzahl der Jahre t abgeändert!).

Selbst große Formeln (wie die in Abb. 1.6 oder noch größere) können wir direkt in einer Tabellenkalkulation wie *Calc* nutzen. Dazu betrachten wir in Listing 1.8 `Financing2.mac`:

```
1 t:4; m:1;
2 erg:solve(KK*(1+i)^t+GG*(1+i)^(t-m)=PP,i);
3 display2d:false; sprint(erg[2]);
```

Listing 1.8 `Financing2.mac`.

Zeile 1 legt wieder die Parameter t und m fest und ist identisch mit Listing 1.7. Auch Zeile 2 ist bis auf die Bezeichnung der Variablen („KK“, „GG“, „PP“) identisch. Die Bezeichnungsänderung ist notwendig, da in *Calc* die Buchstaben „K“, „G“, „P“ bereits vordefiniert sind. Zeile 3 des Listings 1.7 gibt die Lösung in Textform aus und kann einfach mit „Copy-and-paste“ aus *wxMaxima* nach *Calc* kopiert werden. Zu beachten ist, dass bei der deutschsprachigen Version von *Calc* der Ausdruck „sqrt“ noch durch „wurzel“ ersetzt werden muss. Mit *Gm.HYDRA*

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} G^3}{2 K^2 \left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{2}{3}} + 3 G^3 \left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{16 K P}{-10 K P}} \\
 & - \left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4 P}{3 K \left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{4 K^2 + 2 G K + G^2}{2 K^2} - \frac{6 K + 3 G}{3 K} \\
 & \sqrt[2]{\frac{12 K^2 \left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{2}{3}} + 3 G^2 \left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{1}{3}} - 16 K P}{\left(\frac{P \sqrt{256 K^3 P + 27 G^4}}{23 \frac{3}{2} K^3} - \frac{G^2 P}{2 K^3} \right)^{\frac{5}{3}}} - \frac{4 K + G}{4 K}}
 \end{aligned}$$

Abb. 1.6 \LaTeX -Ausgabe von Financing1.mac.

	A	B
1	K	10000
2	G	20000
3	P	35000
4	i	0,047256384

Abb. 1.7 Auswertung der Lösungsformel für Zinssatz i in *Calc*. Zellen B1–B3 werden mit KK, GG, PP bezeichnet, siehe Namensfeld links oben.

(siehe Referenzkarte B.2) besteht eine bequeme Möglichkeit solche Formeln direkt in Dokumentationen zu erstellen, wobei die Ersetzung, wie in diesem Beispiel die Wurzel, automatisch durchgeführt wird. Das Ergebnis sieht wie folgt aus:

```
1 i = wurzel(wurzel(3)*GG^3/(2*KK^2*wurzel((12*KK^2*(PP*wurzel(256*KK^3*PP
+27*GG^4)/(2*3^(3/2)*KK^3)-GG^2*PP/(2*KK^3))^(2/3)+3*GG^2*(PP*wurzel
(256*KK^3*PP+27*GG^4)/(2*3^(3/2)*KK^3)-GG^2*PP/(2*KK^3))^(1/3)-16*KK
*PP)/(PP*wurzel(256*KK^3*PP+27*GG^4)/(2*3^(3/2)*KK^3)-GG^2*PP/
(2*KK^3))^(1/3))-(PP*wurzel(256*KK^3*PP+27*GG^4)/(2*3^(3/2)*KK^3)
-GG^2*PP/(2*KK^3))^(1/3)+4*PP/(3*KK*(PP*wurzel(256*KK^3*PP+27*GG^4)/
(2*3^(3/2)*KK^3)-GG^2*PP/(2*KK^3))^(1/3))+(4*KK^2+2*GG*KK+GG^2)/
(2*KK^2)-(6*KK+3*GG)/(3*KK))/2-wurzel((12*KK^2*(PP*wurzel(256*KK^3
*PP+27*GG^4)/(2*3^(3/2)*KK^3)-GG^2*PP/(2*KK^3))^(2/3)+3*GG^2
*(PP*wurzel(256*KK^3*PP+27*GG^4)/(2*3^(3/2)*KK^3)-GG^2*PP/
(2*KK^3))^(1/3)-16*KK*PP)/(PP*wurzel(256*KK^3*PP+27*GG^4)/(2*3^(3/2)
*KK^3)-GG^2*PP/(2*KK^3))^(1/3))/(4*wurzel(3)*KK)-(4*KK+GG)/(4*KK)
```

Listing 1.9 *Gm.HYDRA/Maxima*-Ausgabe zu *Financing2.mac*: *Calc*-Code (Excel-Code), der mit „Copy-and-paste“ übernommen werden kann.

Diese Formel in Textform lässt sich in *Calc* direkt auswerten, siehe Abb. 1.7. Die Zellen B1, B2, B3 werden mit KK, GG, PP bezeichnet, wie im Namensfeld links oben zu erkennen ist (Zelle B1 hat den Namen KK). In Zelle B4 ist die Formel aus Listing 1.9 hinterlegt, so dass für die Zahlenwerte in den Zellen B1–B3 der Wert i berechnet werden kann.

Aber die Verwendung beschränkt sich nicht nur auf Tabellenkalkulationen, sondern kann – da sie in Textform vorliegt – in *R* oder einem Texteditor angepasst werden.

Wir können sehen, dass sich bei einfachen Problemstellungen Formeln mit Computeralgebrasystemen erstellen lassen und sich diese in einer Tabellenkalkulation weiterverarbeiten lassen. Natürlich lassen sich diese Formeln auch auf beliebige andere Computerprogramme übertragen, zum Beispiel für die Programmierung von Industrieanlagen [20].

Bemerkung 1.18. Computeralgebrasysteme (CAS) wie *Maxima* machen auch sehr komplexe Formeln handhabbar und erzeugen Formelausdrücke, die auch von anderen Computerprogrammen wie z. B. *Calc/Excel* weiterverarbeitet werden können.

Allerdings ist das Problem Gl. (1.32) nicht für alle Kombinationen von Werten für m und t analytisch lösbar. Wählen wir beispielsweise $t = 5$ und $m = 1$, so erhalten wir keine analytische Formel mehr für die Berechnung des Zinssatzes. Dennoch können wir eine Lösung mit *Maxima* berechnen, indem wir einen Wert für i mit einem numerischen Verfahren wie mit dem *Maxima*-Befehl `find_root` berechnen. In diesem Fall können wir folgendes *Maxima*-Programm schreiben:

```
1 t:5; m:1;
2 P:50000;G:30000;K:10000;
3 out:find_root(K*(1+i)^t+G*(1+i)^(t-m)=P,i,0,0.1);
```

Die ersten beiden Zeilen legen die Werte für die Variablen fest, da für die Berechnung einer numerischen Lösung von Gl. (1.32) bis auf i alle Werte bekannt sein müssen. Die Bestimmung der Lösung erfolgt in Zeile 3 mit dem *Maxima*-Befehl `find_root`, der vier Argumente erwartet: Das erste Argument beschreibt die zu lösende Gleichung, das zweite Argument legt die Variable fest, nach dessen Wert gesucht wird, und die letzten beiden Argumente geben die untere und obere Grenze des Intervalls an, in dem die Lösung der Gleichung gesucht werden soll. In diesem Fall wird das Intervall $[0,10]$ gewählt. Einen Anhaltspunkt über die Wahl der Grenzen erhält man üblicherweise aus der Fragestellung des Problems. In unserem Fall darf der Zinssatz nicht negativ sein, weshalb 0 die untere Grenze darstellt. Bei der oberen Grenze hängt es von unserer Einschätzung ab, was die Bank als maximalen Zinssatz bereit wäre zu geben. Das Ergebnis wird in `out` gespeichert und wir erhalten $i \approx 5,384\%$.

1.5.4

Lineare Programmierung

Alle bisher betrachteten Modelle sind ausschließlich in Form von Gleichungen beschrieben worden. Denken wir daran, dass nach Definition 1.5 ein mathematisches Modell jede Art von mathematischen Aussagen enthalten darf. Zum Beispiel darf es Ungleichungen enthalten. Eine der einfachsten Klasse von Problemen mit Ungleichungen beinhaltet Probleme der linearen Programmierung, die häufig z. B. in Operations Research verwendet werden. Betrachten wir das folgende Problem, das bei en.Wikipedia.org unter dem (englischsprachigen) Artikel der linearen Programmierung entnommen worden ist.

Beispiel zur linearen Programmierung Stellen wir uns vor, ein Bauer besitzt ein Stück Land, das – sagen wir – A km² groß ist, und das er mit Weizen oder Gerste oder einer Kombination beider Früchte anbauen möchte. Weiterhin nehmen wir an, dass der Bauer nur eine maximal erlaubte Menge an Dünger F und an Insektiziden P ausbringen darf. Beides ist in unterschiedlichen Menge pro Flächeneinheit für Weizen (F_1, P_1) und Gerste (F_2, P_2) erforderlich. Sei S_1 der Verkaufspreis von Weizen und S_2 der Verkaufspreis von Gerste. Wie viele Quadratkilometer sollte er mit Weizen bzw. Gerste anbauen, um maximalen Erlös zu erzielen?

Bezeichnen wir mit x_1 die Fläche, die mit Weizen angebaut wird, und mit x_2 die Fläche, die mit Gerste angebaut wird. Dann kann das Problem wie folgt formuliert werden:

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1.34)$$

$$x_1 + x_2 \leq A \quad (1.35)$$

$$F_1 x_1 + F_2 x_2 \leq F \quad (1.36)$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 \leq P \quad (1.37)$$

$$S_1 x_1 + S_2 x_2 \rightarrow \max \quad (1.38)$$

Mit Gl. (1.34) kommt hier zum Ausdruck, dass der Bauer keine negativen Flächen nutzen kann, (1.35) beschreibt die Tatsache, dass maximal nur die Fläche A (in km^2) für den Anbau genutzt werden kann, Gln. (1.36) und (1.37) drücken die Begrenzungen für Dünger und Insektizide aus und Gl. (1.38) beschreibt die Forderung nach Maximierung des Erlöses. Nehmen wir die Gln. (1.34)–(1.38) als Beschreibung für Modell M , das Land als System S , stellen die Frage $Q =$ „Wie viele Quadratkilometer sollen mit Weizen bzw. Gerste angebaut werden, um maximalen Erlös zu erzielen?“ und erhalten sofort das mathematische Modell (S, Q, M) . Für jede Wahl der Parameterwerte für A, F, P, \dots kann das Problem wieder recht einfach mit *Maxima* gelöst werden. Die Berechnung der Lösung ist im *Maxima*-Programm `Farm.mac` (Teil der Buchsoftware, siehe Anhang A) umgesetzt worden. Schauen wir uns den wesentlichen Teil des Codes an:

```
1 load(simplex);
2 U: [x1>=0
3   ,x2>=0
4   ,x1+x2<=A
5   ,F1*x1+F2*x2<=F
6   ,P1*x1+P2*x2<=P];
7 Z: S1*x1+S2*x2;
8 maximize_lp(Z,U);
```

Listing 1.10 `Farm.mac`.

Zeile 1 des Codes lädt ein Paket, was *Maxima* zum Lösen linearer Optimierungsprobleme braucht. In den Zeilen 2–6 werden die Ungleichungen definiert, die den Gln. (1.34)–(1.37) entsprechen. Beachte, die Zeilen 2–6 bilden zusammengefasst ein einziges Kommando, welches die Ungleichungen als Liste in die Variable U speichert. Zeile 7 definiert die Funktion Z , die zu minimieren ist. Das Problem wird dann in Zeile 8 gelöst, in der *Maximas* Kommando `maximize_lp` aufgerufen wird. Mit der in `Farm.mac` festgelegten Wahl der Parameterwerte ($A = 100$, $F = 100$, $P = 100$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $S_1 = 1$, $S_2 = 2$) erhalten wir das Resultat

```
[100, [x2 = 50, x1 = 0]]
```

Das bedeutet, wir erhalten einen maximalen Erlös von 100, wenn wir ausschließlich Gerste anbauen (50 km^2).

1.6

Noch mehr Definitionen

1.6.1

Phänomenologische und mechanistische Modelle

In Abschnitt 1.3 ist ein System vorgestellt worden, das von Wissenschaftlern und Ingenieuren als „Input-Output-System“ bezeichnet wird. Für diese Art von Systemen lassen sich auf recht einfache Weise mathematische Modelle (S, Q, M) aufstellen.

Betrachten wir zum Beispiel ein System 1 wie in Abb. 1.8a, das für jede Kraft x [N] als Eingabe, die Auslenkung y [cm] einer (elastischen) Feder als Ausgabe liefert. Nehmen wir an, wir wissen nichts über das System, sondern betrachten es als Blackbox und stellen uns die Frage: Welche Kraft x [N] bewirkt eine Auslenkung von $y = 20$ cm? Damit haben wir bereits S und Q bei unserem mathematischen Modell (S, Q, M) .

Die mathematische Beschreibung erfolgt nun in Form einer Funktion, die Eingabewerte auf Ausgabewerte abbildet. Dazu wird ein Experiment durchgeführt, bei dem die angreifenden Kräfte vorgegeben werden und die Auslenkung gemessen wird. In Abb. 1.8b ist das Ergebnis dargestellt. Wie wir in Abschnitt 2.2 sehen werden, können wir mit Hilfe dieser Daten ohne großen Aufwand eine Funktion aufstellen, welche Eingabewerte auf Ausgabewerte abbildet. In diesem Fall betrachten wir die Funktion

$$f(x) = ax + b \quad (1.39)$$

und der Experimentator kann nun eine statistische Methode anwenden, die sogenannte *lineare Regression* (die genauer in Abschnitt 2.2 erklärt wird), um die Koeffizienten a und b der Funktion zu bestimmen. Mit den vorliegenden Messdaten erhalten wir

$$f(x) = 0,33x - 0,5 \quad (1.40)$$

Nun haben wir die mathematische Aussage M für unser Modell formuliert. Wir sehen, für Input-Output-Systeme lassen sich auf diese Weise recht einfach mathematische Modelle (S, Q, M) erstellen. Damit können wir auch die gestellte Frage beantworten, indem wir in Gl. (1.40) $y = f(x) = 20$ setzen und nach x auflösen. Wir erhalten $x \approx 62,1$ N.

Das mathematische Modell zur Beschreibung des Systems 1 wird als *phänomenologisches Modell* bezeichnet, da es nur auf Grundlage von experimentellen

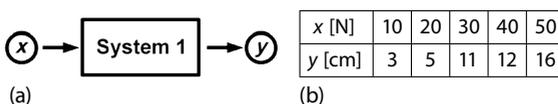


Abb. 1.8 (a) System 1 mit Eingabe x [N] und Ausgabe y [cm]. (b) Daten zu System 1 (Datei `spring.csv` in der Buchsoftware).

Daten konstruiert worden ist und das System als Blackbox behandelt hat, d. h. ohne irgendwelche Informationen über die internen Abläufe im System 1, wenn x nach y abgebildet wird. Auf der anderen Seite werden Modelle, die zur Modellbildung Informationen zum System S verwenden, *mechanistische Modelle* genannt, da sie einen virtuellen Blick in die interne Mechanik von S werfen. Damit definieren wir die Modelbegriffe wie folgt [13]:

■ **Definition 1.8. Phänomenologische und mechanistische Modelle** Ein mathematisches Modell (S, Q, M) heißt

- *phänomenologisch*, wenn es nur auf Grundlage von experimentellen Daten ohne a-priori-Informationen zu S konstruiert worden ist,
- und *mechanistisch*, wenn einige Aussagen in M auf a-priori-Informationen zu S basieren.

Phänomenologische Modelle werden auch *empirische Modelle*, *statistische Modelle*, *datenbasierte Modelle* oder *Blackbox-Modelle* aus offenkundigen Gründen genannt. Mechanistische Modelle, für die alle notwendigen Informationen über S zur Verfügung stehen, werden auch *Whitebox-Modelle* genannt. Die meisten mechanistischen Modelle liegen irgendwo zwischen den extremen Blackbox- und Whitebox-Modellen, d. h. sie basieren auf einigen Informationen zu S , aber es fehlen auch wichtige Informationen. Solche Modelle werden manchmal *Greybox-Modelle* oder *semiempirische Modelle* genannt [21].

Um den Unterschied zwischen phänomenologischen und mechanistischen Modellen besser zu verstehen, versuchen wir ein mechanistisches Modell zu System 1 (siehe Abb. 1.8a) als Alternative zu konstruieren. Oben haben wir System 1 als Blackbox behandelt, d. h. wir haben keine Informationen darüber benutzt, in welcher Weise das System 1 eine gegebene Eingabe x auf die Ausgabe y abbildet. Nehmen wir an, dass die interne Mechanik des Systems 1 wie in Abb. 1.9 aussieht. Das bedeutet, das System 1 besteht aus einer mechanischen Feder, x bezeichnet die angreifende Kraft und y die resultierende Auslenkung. Das ist nun eine *a-priori-Information* über das System 1, und zwar im Sinne von Definition 1.8, und es kann zur Konstruktion eines mathematischen mechanistischen Modells auf Basis elementaren physikalischen Wissens verwendet werden. Wie allgemein bekannt ist, können mechanische Federn gemäß hookschem Gesetz geschrieben werden als

$$x = k \cdot y \tag{1.41}$$

wobei k [N/cm] die Federkonstante ist, ein Maß für die Elastizität der Feder. Der Parameter k ist entweder bekannt (z. B. vom Hersteller der Feder) oder sie kann mit Hilfe der Daten wie in Abb. 1.8b geschätzt werden. Jetzt erhalten wir folgendes mathematische mechanistische Modell (S, Q, M) :

- S : System 1
- Q : Welche Systemeingabe x erzeugt die gewünschte Ausgabe $y = 20$ cm?
- M : Gl. (1.41)

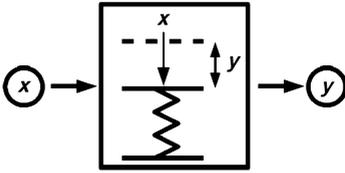


Abb. 1.9 Interne Mechanik des Systems 1.

Mit diesem Modell lässt sich die Frage Q nun beantworten. Setzen wir $y = 20$ cm in die Modellgleichung (1.41) ein, so erhalten wir

$$x = k \cdot 20 \quad (1.42)$$

d. h. wir können die Frage Q , abhängig vom Wert der Federkonstante k , beantworten. Betrachten wir zum Beispiel den Wert $k \approx 3,11$ N/cm für die Federkonstante, so erhalten wir in etwa die gleiche Abschätzung $x \approx 62,1$ N wie oben.

Das mechanistische Modell zu System 1 hat verschiedene bedeutsame Vorteile im Vergleich zum phänomenologischen Modell, was die *charakteristischen Vorteile des mechanistischen Ansatzes* sind. Als Erstes erlauben mechanistische Modelle eine bessere Vorhersage des Systemverhaltens. Das phänomenologische Modell basiert nur auf Daten, die durch Experimente gewonnen worden sind, d. h. Daten, die nur einen bestimmten Wertebereich abdecken. Aus der Diskussion unten über Regressionsmethoden ist zu erwarten, dass das Modell daher nur in diesem Wertebereich gültig ist. Dagegen basiert die mechanistische Modellgleichung (1.41) auf einer gut etablierten physikalischen Theorie von Federn und wir haben deshalb gute Gründe, dass die Gleichung auch außerhalb des getesteten Bereichs gültig ist.

Mechanistische Modelle erlauben auch eine *bessere Vorhersage* von modifizierten Systemen. Nehmen wir zum Beispiel an, das System 1 in Abb. 1.9 wird durch ein System 2 bestehend aus zwei Federn mit gleicher Federkonstante k ersetzt. Mit dem phänomenologischen Ansatz können wir das für System 1 entwickelte Modell nicht weiter verwenden, da es die Ähnlichkeit zwischen beiden System nicht erkennen kann (zur Erinnerung: Der phänomenologische Ansatz nimmt an, keine Details über die interne Mechanik des betrachteten Systems zu kennen). Das bedeutet, ein neues phänomenologisches Modell müsste für das System 2 entwickelt werden, wozu ein neuer Datensatz und neue Experimente erforderlich sind. Dagegen sagt uns beim mechanistischen Zugang das hooksche Gesetz sofort, dass im Fall von zwei Federn die entsprechende Anpassung der Gl. (1.41) wie folgt aussieht:

$$x = 2k \cdot y \quad (1.43)$$

Ein weiterer Vorteil von mechanistischen Modellen ist die Tatsache, dass diese in der Regel *physikalisch interpretierbare Parameter* enthalten, d. h. Parameter, die real vorhandene Eigenschaften des Systems darstellen. Phänomenologische Modellgleichungen (siehe auch nächstes Kapitel) enthalten einfach nur Zahlen, die nicht mit dem System in Verbindung gebracht werden können. Dagegen kann

der Parameter k der mechanistischen Modellgleichung (1.41) einer Systemeigenschaft zugeordnet werden. Das ist besonders für die Fälle wichtig, in denen wir das System verbessern wollen. Wenn wir zum Beispiel das Ziel verfolgen, dass bereits kleine Kräfte x eine geforderte Auslenkung y hervorrufen, dann würden wir im phänomenologischen Zugang eine Reihe von Systemen 2–4, ... testen, bis wir eventuell ein System mit der gewünschten Eigenschaft antreffen, d. h. wir würden eine Trial-and-Error-Methode anwenden. Dagegen sagt uns das mechanistische Modelle genau was zu tun ist: Wir haben die Feder in System 1 durch eine andere mit kleinerer Federkonstante k zu ersetzen, so dass bereits eine kleinere Kraft x ausreicht, um eine gegebene Auslenkung y zu erreichen. In diesem einfachen Beispiel kann man sich nur schwer vorstellen, dass wirklich jemand den phänomenologischen Ansatz anstelle des hookschen Gesetzes wählt. Aber das Beispiel erfasst den entscheidenden Unterschied zwischen phänomenologischen und mechanistischen Modell, und es sagt uns, wir sollten wann immer möglich ein mechanistisches Modell verwenden.

Aber wenn mechanistische Modelle so einfach in jeder vorstellbaren Situation aufgestellt werden könnten, würden wir hier nicht über phänomenologische Modelle sprechen. Eine wichtige Voraussetzung ist nämlich, dass *mechanistische Modelle a-priori-Wissen des Systems benötigen*. Wenn nichts über das System bekannt ist, dann befinden wir uns in einer „Blackbox“-Situation und müssen phänomenologische Modelle verwenden. Nehmen wir zum Beispiel an, wir möchten verstehen, warum einige Rosen früher verwelken als andere (dieses Beispiel wird näher in Abschnitt 2.3 beschrieben). Nehmen wir weiter an, dass dies in Verbindung mit der Konzentration eines bestimmten Kohlenhydrats steht und wir diese Konzentration messen können. Dann können wir kein mechanistisches Modell aufstellen, solange wir nicht alle relevanten Prozesse kennen, die diese Kohlenhydratkonzentration mit der beobachteten Frische der Rosen in Verbindung bringen. Solange diese Prozesse unbekannt sind, können wir einzig nur eine paar Daten produzieren (Konzentration des Kohlenhydrats im Vergleich zu einem geeigneten Maß der Frische einer Rose) und diese Daten mit einem phänomenologischen Modell analysieren.

Die Situation, in der wenig über das zu untersuchende System bekannt ist, ist mehr die Regel als die Ausnahme, insbesondere am Anfang einer wissenschaftlichen Untersuchung oder am Anfang einer Produktentwicklung im Ingenieurwesen. Wir können uns auch in einer Situation befinden, in der wir im Prinzip genügend Details über das betrachtete System kennen, aber das System so komplex ist, dass es zu viel Zeit und Ressourcen erfordern würde, ein mechanistisches Modell aufzustellen. Ein Beispiel ist die Optimierung des Abriebwiderstandes eines Verbundwerkstoffs: Nehmen wir an, dass ein Verbundwerkstoff aus den Materialien M_1, M_2, \dots, M_n besteht, und nehmen wir weiter an, dass wir wissen wollen, wie die relativen proportionalen Anteile der Materialien zu wählen sind, um den Abriebwiderstand zu maximieren. Dann kann der Abriebwiderstand in einer äußerst komplexen Weise von seiner Komposition abhängen. Die Autoren haben eine Situation wie diese untersucht, in der ein mechanistischer Modellierungsversuch aufgrund der Komplexität des Gesamtsystems fehlgeschlagen ist und stattdessen

ein phänomenologisches Modell verwendet worden ist [22]. Es ist ein großer Vorteil von *phänomenologischen Modellen*, dass diese in Blackbox-Situationen verwendet werden können und üblicherweise wesentlich weniger Zeit und Ressourcen erfordern. Pragmatische Überlegungen sollten entscheiden, welche Art von Modell in einer Situation tatsächlich eingesetzt werden sollte. Ein mechanistisches Modell wird sicherlich eine schlechte Entscheidung sein, wenn wir beispielsweise drei Wochen brauchen bis es funktioniert und dann auf unsere Frage Q im Vergleich zu einem phänomenologischen Modell keine substanziiell bessere Antwort liefert, welches wir in einem Tag hätten aufstellen können.

Bemerkung 1.19. Vor- und Nachteile phänomenologischer und mechanistischer Modelle *Phänomenologische Modelle* sind universell anwendbar, mit geringen Ressourcenaufwand zu formulieren, aber beschränkt in ihrem Anwendungsbereich. *Mechanistische Modelle* dagegen beinhalten typischerweise (z. B. physikalisch) interpretierbare Parameter, erlauben tiefere Einsichten in das Systemverhalten und liefern bessere Vorhersagen. Allerdings erfordern mechanistische Modelle a-priori-Informationen über das System; ihre Formulierung benötigt z. T. erheblich mehr Zeit und Ressourcen.

1.6.2

Stationäre und instationäre Modelle

Wie früher schon angesprochen, ist die Frage Q ein wichtiger Faktor bei der Festlegung eines geeigneten mathematischen Modells (S, Q, M) . In einem Beispiel oben haben wir die alternativen Betrachtungen eines mechanischen Problems behandelt, bei dem dieses mit Gleichungen der klassischen oder relativistischen Mechanik in Abhängigkeit der Frage Q untersucht wird. In Verbindung mit System 1 haben wir die Frage Q gestellt: „Welche Systemeingabe x erzeugt die gewünschte Ausgabe $y = 20 \text{ cm}$ “. Versuchen wir nun die Frage Q so zu ändern, um andere Klassen mathematischer Modelle zu finden. Betrachten wir folgende Frage.

Q Wenn eine konstante Kraft x an einer Feder zum Zeitpunkt $t = 0$ angreift, wie groß ist dann die resultierende Auslenkung $y(t)$ der Feder zu Zeiten $t > 0$?

Diese Frage kann nicht mit dem oben entwickelten Modell beantwortet werden. Sowohl das phänomenologische Modell (Gl. (1.40)) als auch das mechanistische Modell (Gl. (1.41)) beziehen sich auf den sogenannten stationären Zustand des Systems 1. Das bedeutet, die Auslenkung y , die mit den Gleichungen bestimmt wird, wird als zeitunabhängiger (= stationärer) Zustand der Feder aufgefasst. Dieser Zustand der Federauslenkung wird genau im Gleichgewichtszustand erreicht, wenn die Federkraft genau der angreifenden Kraft entspricht. Auf der anderen Seite wird die Frage nach der instationären (d. h. zeitabhängigen) Entwicklung der Auslenkung y gestellt, angefangen zum Zeitpunkt $t = 0$, wenn die Kraft x beginnt an der Feder anzugreifen. Für die Berechnung der Auslenkung $y(t)$ ist ein mathematisches Modell (S, Q, M) nötig, das mathematische Aussagen M enthält, die von der Zeit t abhängen. Modelle dieser Art können mit Hilfe von gewöhnli-

chen Differentialgleichungen beschrieben werden (Details in Kapitel 3). Um den wichtigen Unterschied zwischen stationären und instationären Modell klarer zu formulieren, machen wir folgende Definition:

■ **Definition 1.9. Stationäre/instationäre Modelle** Ein mathematisches Modell (S, Q, M) heißt

- *instationär*, wenn mindestens einer der Systemparameter von der Zeit abhängt, sonst
- *stationär*.

1.6.3

Verteilte und aggregierte Modelle

Nehmen wir an, dass die Feder aus System 1 unter normalen Arbeitsbedingungen in mehrere Teile bricht. Nun soll versucht werden eine robustere Feder zu konstruieren und in einer solchen Situation stellt sich ganz natürlich die Frage:

Q Welcher Teil der Feder soll verstärkt werden?

Logischerweise sollten nur solche Teile der Feder verstärkt werden, die die höchste mechanische Belastung tragen müssen. Um diese Teile zu identifizieren müssen wir wissen, wie die Spannung der belasteten Feder verteilt ist. Bezeichnen wir mit $\sigma(x, y, z)$ die Verteilung der mechanischen Spannung in der Feder in Abhängigkeit der räumlichen Koordinaten x, y, z . Dann brauchen wir ein mathematisches Modell, bei dem $\sigma(x, y, z)$ eine Zustandsvariable ist. Solche mathematischen Modelle können mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen (engl. partial differential equations, PDEs) aufgestellt werden, wie wir noch in Kapitel 4 sehen werden. Der wesentliche Unterschied zwischen diesem Modell und dem vorherigen Modell des System 1 liegt darin, dass in diesem Fall die Zustandsvariable von den räumlichen Koordinaten abhängt. Für die Berechnung der Auslenkung der Feder im Gleichgewichtszustand ist die Gl. (1.41) verwendet worden, wozu eine Beschreibung der Feder mit einer Federkonstante k genügt. Allerdings kann diese Gleichung nicht verwendet werden, um irgendwelche räumlich verteilten Informationen der Feder abzuleiten. In diesem Modelltyp sind alle räumlichen Informationen in einen Parameter k zusammengefasst. Dies ist dadurch gerechtfertigt, das der Gleichgewichtspunkt der Feder mit ausreichender Genauigkeit mit k berechnet werden kann. Wenn aber nach der inneren Spannungsverteilung der Feder gefragt wird, dann wird eine räumlich verteilte Beschreibung der Spannungen in der Feder benötigt. Dies motiviert folgende Definition:

■ **Definition 1.10. Modelle mit verteilten/aggregierten Parametern** Ein mathematisches Modell (S, Q, M) heißt

- *Modell mit verteilten Parametern*, wenn mindestens einer seiner Systemparameter oder Zustandsvariablen von Raumkoordinaten abhängt, sonst
- *Modell mit aggregierten Parametern*.

1.7

Wenn alles wie ein Nagel aussieht ...

Das Modellierungs- und Simulationsschema ist in gewisser Weise einfach eine idealisierte Theorie wie mathematisches Modellieren funktionieren *sollte*. Dies muss natürlich von der Art und Weise unterschieden werden, wie wir mit mathematischen Modellen in der Praxis umgehen. In diesem Bewusstsein hat Gombomb [23] die folgenden Regeln aufgestellt:

Bemerkung 1.20. Don'ts of Mathematical Modeling

1. Don't believe that the model is the reality.
2. Don't extrapolate beyond the region of fit.
3. Don't distort reality to fit the model.
4. Don't retain a discredited model.
5. Don't fall in love with your model.

Die Regeln können wie folgt übersetzt werden: 1. Glaube nicht, dass das Modell die Realität ist, 2. Extrapoliere nicht über den Anpassungsbereich hinaus, 3. Verbiege nicht die Realität, um es an das Modell anzupassen, 4. Halte nicht an einem diskreditierten Modell fest, 5. Verliebe Dich nicht in Dein Modell.

Don't Nr. 1 erinnert uns an die Einschränkungen unserer Modelle, d. h. wir sollten uns immer über die gemachten Annahmen und Vereinfachungen für unser Modell bewusst sein, ebenso welche Auswirkungen diese auf das reale System haben. Vielleicht kennen Sie das *Höhlengleichnis* des griechischen Philosophen Platon, welches ein nettes Bild von der Beziehung zwischen Modell und Realität liefert (Abb. 1.10 [24]). In diesem Gleichnis sind einige Gefangene tief in einer Höhle angekettet, und zwar so, dass sie nur nach vorne auf eine Höhlenwand blicken können. Hinter den Gefangenen befindet sich ein großes Feuer und einige Menschen, die mit Hilfe des Lichtscheins des Feuers Schatten von drei-dimensionalen Objekten wie Puppen, Tiere und Pflanzen auf der Höhlenwand erzeugen. Platon nimmt an, dass die Gefangenen seit ihrer Kindheit in der Höhle angekettet sind und noch nie etwas anderes als die Schatten der Höhlenwand gesehen haben. Daher glauben diese, dass die Schatten die Realität darstellen, obwohl die Schatten natürlich nichts anderes sind als vereinfachte zwei-dimensionale Modelle der realen drei-dimensionalen Objekte hinter ihnen. In recht ähnlicher Weise müssen wir uns bewusst sein, dass wir immer in irgendeiner Art und Weise „angekettet“ sind, solange wir versuchen, die Realität mit einem wissenschaftlichen Modell zu beschreiben. Dies schränkt unseren Blick abhängig von den inhärenten Annahmen auf das reale System mehr oder weniger ein.

Don't Nr. 2 besagt, dass das Modell für eine Vorhersage nur für die Regionen im Parameterraum benutzt werden sollte, für die genügend gesicherte experimentelle Daten vorliegen (für nähere Details siehe Abschnitt 2.2.2 und Bemerkung 2.3), während die *Don'ts Nr. 3–5* von uns verlangen, die Modelle aufzugeben, die es



Abb. 1.10 Platons Höhlengleichnis: Glaube nicht, dass das Modell die Realität ist! (B. Velten, inspiriert durch <http://commons.wikimedia.org>.)

nicht durch den Validierungsschritt des MoSim-Schemas (Bemerkung 1.5) geschafft haben. In [13] wird die Botschaft von *Don'ts* Nr. 3–5 wie folgt ausgedrückt:

Wenn Du einen Hammer hast, suchst Du nach einem Nagel.
Wenn Du einen *guten* Hammer hast, sieht alles aus wie ein Nagel.

Wir verstehen die Botschaft: Menschen tendieren dazu, die Probleme in ähnlicher Weise zu lösen, wie sie diese in der Vergangenheit erfolgreich gelöst haben. Gestern hatten wir das Problem, einen Nagel in ein Stück Holz zu schlagen und haben das Problem angemessen mit einem Hammer gelöst. Heute hingegen möchten wir eine *Schraube* in einem Stück Holz anbringen und es ist natürlich nicht gerade eine gute Idee, dies wieder mit einem Hammer zu tun. Ganz ähnlich können wir die mathematischen Modelle als Werkzeuge betrachten, die uns helfen Probleme zu lösen. Und wir tendieren stets dazu, immer wieder die Modelle zu benutzen, die uns geholfen haben das Problem von gestern zu lösen. Es ist so etwas wie das Naturgesetz der mathematischen Modellierung, ähnlich wie Newtons Trägheitsgesetz; nennen wir es das „*Trägheitsgesetz der mathematischen Modellierung*“. Kräfte müssen aufgebracht werden, um den Bewegungszustand physikalische Körper zu ändern. In ähnlicher Weise müssen sozusagen Kräfte auf die Gedanken eines Wissenschaftlers, der mathematische Modelle entwickelt, einwirken, damit dieser einwilligt, das ein etabliertes Modell durch ein besseres ersetzt wird. Sogar an berühmten Wissenschaftler wie A. Einstein konnte man diese Art Trägheit beobachten: Einstein mochte die Idee nicht, dass sich das physikalische Universum in einigen Aspekten besser stochastisch als deterministisch beschreiben lässt (eine Folgerung der „Kopenhagener Deutung“ der Quantenmechanik). Er drückte seine Aversion mit dem bekannten Zitat aus: „Gott würfeln nicht!“ [25]. Aber dies ist keine Entschuldigung für eine Nichtbeachtung von Golumbs *Don'ts*! Es zeigt nur, dass *jeder*, auch die Leserin und der Leser, Modelle mit Sorgfalt verwenden sollte.