

David Halliday, Robert Resnick und Jearl Walker

# Halliday Physik

Übersetzung herausgegeben von Stephan W. Koch

Dritte, vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

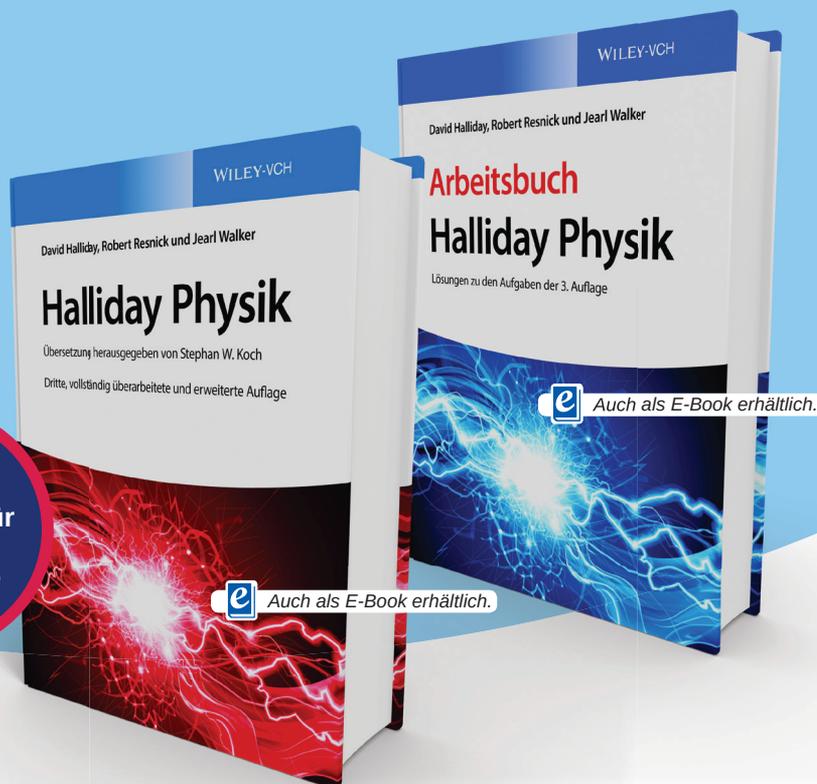


LESEPROBE

# Neu

## Der große Halliday in 3. Auflage!

Das Lehrbuch der Physik für Hauptfachstudierende



David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
**Halliday Physik**  
3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

Oktober 2017 ca. 1500 S. mit ca. 1900 Farbbabb. und ca. 100 Tab. Gebunden  
ca. € 79,- ISBN: 978-3-527-41356-0

Noch bessere Didaktik, noch mehr Beispiele, noch mehr Aufgaben, noch mehr Spaß - die dritte deutsche Auflage des „Halliday“ erfüllt alle Wünsche an ein zeitgemäßes Lehrbuch der Physik für Hauptfachstudierende!

Für die dritte Auflage wurden die Kapitel nicht nur überarbeitet, sondern didaktisch neu strukturiert: Die Lerninhalte sind nun in Modulen organisiert, wobei jede Einheit die Lernziele explizit aufführt und die Schlüsselkonzepte zusammenfasst. So können Studierende zielgerichtet lernen und den Lernerfolg nach der Lektüre selbst überprüfen.

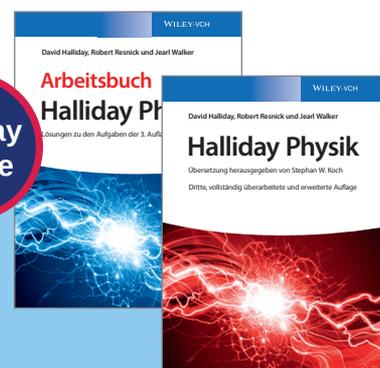
Das selbstständige Lernen wird unterstützt durch rund 300 im Text durchgerechnete Beispiele, 250 Verständnis-Checks, mehr als 650 konzeptionelle Fragen sowie mehr als 2500 Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads.

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
**Arbeitsbuch Physik**  
Lösungen zu den Aufgaben der 3. Auflage

Oktober 2017 ca. 750 S. mit ca. 200 Abb. Broschur  
ca. € 39,90 ISBN: 978-3-527-41357-7

Für optimalen Studienerfolg – das Arbeitsbuch zur dritten Auflage des „Halliday“ hilft bei der Durchdringung des Stoffs der einführenden Experimentalphysik-Vorlesungen für Hauptfachstudierende. Es enthält die Lösungen inklusive des Lösungswegs zu den mehr als 2500 Aufgaben aus allen Kapiteln des Lehrbuchs.

Halliday Deluxe



## In dieser Leseprobe finden Sie:

- Vorwort des Übersetzungsherausgebers Stephan W. Koch
- Inhaltsverzeichnis des Lehrbuches
- Probekapitel in Auszügen aus dem Lehrbuch
- Service- und Bestellinformation

Sowohl einzeln erhältlich als auch im Deluxe-Set aus Lehr- und Arbeitsbuch!

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker  
**Halliday Physik Deluxe**  
3. Auflage – Lehrbuch und Arbeitsbuch

Oktober 2017 ca. 2250 S. mit ca. 2100 Abb., davon ca. 1900 in Farbe und ca. 100 Tab.  
ca. € 109,- ISBN: 978-3-527-41358-4

Für optimalen Studienerfolg – das Deluxe-Set des „Halliday“ aus Lehrbuch und Arbeitsbuch in neuer Auflage!

*David Halliday, Robert Resnick,  
und Jearl Walker*

# **Halliday Physik**

3. Auflage

Übersetzung herausgeben von Stephan W. Koch

**WILEY-VCH**

Verlag GmbH & Co. KGaA

# Stephan W. Koch

lehrt Physik in Marburg und ist häufig als Gastwissenschaftler an der Universität von Arizona, Tucson/USA tätig. Er hat in Frankfurt Physik studiert, 1979 promoviert und sich, nach Forschungsaufenthalten bei den IBM Research Labs, 1983 habilitiert.

Anschließend ging er in die USA, wo er ab 1989 Full Professor an der University of Arizona in Tucson war. 1993 folgte er einem Ruf an die Universität Marburg, blieb aber bis heute Adjunct Professor in Arizona. 1997 erhielt Herr Koch den Leibniz-Preis der Deutschen Forschungsgemeinschaft und 1999 den Max-Planck-Forschungspreis der Humboldt-Stiftung.

Seit mehreren Jahren ist er als Herausgeber und Berater für Fachzeitschriften aktiv.



## Vorwort des Übersetzungsherausgebers

Diese dritte deutsche Auflage des Klassikers „*Halliday Fundamentals of Physics*“ enthält zahlreiche Neuerungen, die das Lehrbuch für Studentinnen und Studenten noch attraktiver machen.

Selbstverständlich deckt der „Halliday“ wie in den Voraufgaben den gesamten Stoff mehrsemestriger Einführungsvorlesungen ab und ist damit der unentbehrliche Begleiter für das gesamte Grundstudium der Physik.

Anfangen von den elementaren Konzepten der Bewegung von Massepunkten und einfachen Körpern, der Newtonschen Mechanik, den Grundlagen der Thermodynamik, der Physik elektrischer und magnetischer Felder und der Optik bis hin zu den Grundkonzepten der Quantenmechanik und der modernen Elementarteilchenphysik wird der Lehrstoff in didaktisch hervorragender Form präsentiert. Aufgrund der Erfahrungen in der Lehre wurden etliche Kapitel im Sinne besserer Verständlichkeit deutlich überarbeitet und erweitert, wobei die dankenswerten Vorschläge der Studierenden und Lehrenden speziell berücksichtigt wurden.

Dabei wurde der zugrundeliegende Ansatz des „Halliday“ beibehalten, der zu dessen großem Erfolg und Beliebtheit beigetragen hat: Die Physik wird stets in ihrer Bedeutung motiviert, mit vielen Beispielen illustriert und mit ausführlich im Text durchgerechneten Aufgaben verständlich gemacht. Wichtige physikalische Konzepte werden oft auf mehrere Arten präsentiert, wobei auf mögliche Verständnisprobleme besonders eingegangen wird, um typische Fallstricke zu vermeiden. Lösungsstrate-

gien für Aufgaben nehmen einen ebenso wichtigen Platz ein wie Zusammenfassungen des präsentierten Materials in allen Kapiteln.

Um veränderten Lehr- und Lerngewohnheiten Rechnung zu tragen, wurden die Lerninhalte in der dritten Auflage modular organisiert, so dass nicht nur jedes Kapitel, sondern auch jede Lerneinheit explizit mit Lernzielen, Schlüsselideen und physikalischer Motivation beginnt.

Die quantitativ bedeutendsten Änderungen betreffen die Elemente, die das selbständige Lernen unterstützen: zu den 300 detailliert vorgerechneten Beispielen kommen 250 Verständnis-Fragen, insgesamt 650 Fragen an den Kapitelenden – mit Antworten und Ergebnissen im Anhang – und mehr als 2500 Aufgaben. Wie auch in den Voraufgaben wurde Wert darauf gelegt, dass die Mehrzahl der Übungsaufgaben Konzepte illustriert und auf Argumente und Begründungen abzielt, nur ein kleiner Teil erfordert lediglich das Einsetzen von Zahlen in Formeln.

Die größte Neuerung ist das Arbeitsbuch, das erstmals sämtliche ausführliche Lösungen zu allen 2500 Aufgaben im Lehrbuch enthält. Bei schwierigeren Aufgaben hilft das SARA-Konzept, die Lösung zu entwickeln: Der „Startpunkt“ verbalisiert das zugrundeliegende physikalische Problem, der „Ansatz“ formalisiert die Aufgabenstellung, die „Rechnung“ illustriert den Rechenweg, und „Aufgepasst“ fasst die Schlussfolgerungen und den Lerneffekt zusammen.

# Inhaltsverzeichnis

(gekürzt)

## Teil I

- 1 Messung und Maßeinheiten
- 2 Geradlinige Bewegung
- 3 Vektoren
- 4 Bewegung in zwei und drei Dimensionen
- 5 Kraft und Bewegung – I
- 6 Kraft und Bewegung – II
- 7 Kinetische Energie und Arbeit
- 8 Potenzielle Energie und Energieerhaltung
- 9 Systeme von Teilchen
- 10 Die Rotation ausgedehnter Körper
- 11 Rollbewegung, Drehmoment und Drehimpuls

## Teil II

- 12 Gleichgewicht und Elastizität
- 13 Gravitation
- 14 Fluide
- 15 Schwingungen
- 16 Wellen – I
- 17 Wellen – II
- 18 Temperatur, Wärme und der erste Hauptsatz der Thermodynamik
- 19 Die kinetische Gastheorie
- 20 Entropie und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

## Teil III

- 21 Elektrische Ladung
- 22 Elektrische Felder
- 23 Der Gaußsche Satz
- 24 Elektrisches Potenzial
- 25 Kapazität
- 26 Elektrischer Strom und Widerstand

- 27 Stromkreise
- 28 Magnetfelder
- 29 Magnetfelder aufgrund von Strömen
- 30 Induktion und Induktivität
- 31 Elektromagnetische Schwingkreise und Wechselstrom
- 32 Magnetismus und Materie

## Teil IV

- 33 Elektromagnetische Wellen
- 34 Abbildungen
- 35 Interferenz
- 36 Beugung
- 37 Relativitätstheorie

## Teil V

- 38 Photonen und Materiefelder
- 39 Mehr über Materiewellen
- 40 Atome
- 41 Elektrische Leitfähigkeit von Festkörpern
- 42 Kernphysik
- 43 Kernenergie
- 44 Quarks, Leptonen und der Urknall

## ANHANG

- A SI-Einheiten
  - B Physikalische Konstanten
  - C Astronomische Daten
  - D Umrechnungsfaktoren
  - E Mathematische Formeln
  - F Eigenschaften der Elemente
  - G Periodensystem
- Index

# 4 Bewegung in zwei und drei Dimensionen

## 4.1 Ort und Verschiebung

### Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- zwei- und dreidimensionale Ortsvektoren für ein Teilchen zu zeichnen und ihre Komponenten bezüglich der Achsen eines Koordinatensystems anzugeben,
- Betrag und Richtung des Ortsvektors eines Teilchens aus seinen Komponenten in einem Koordinatensystem zu bestimmen (und umgekehrt),
- die Beziehung zwischen dem Verschiebungsvektor eines Teilchens und seinen Start- und Endkoordinaten anzugeben.



### Schlüsselideen

- Die Position eines Teilchens relativ zum Ursprung eines Koordinatensystems wird durch einen Ortsvektor  $\vec{r}$  beschrieben, der in Einheitsvektoren-Schreibweise die Form

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

hat.  $x\vec{e}_x$ ,  $y\vec{e}_y$  und  $z\vec{e}_z$  sind die Vektorkomponenten des Ortsvektors  $\vec{r}$ , dessen skalare Komponenten  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind (die auch die Koordinaten des Teilchens sind).

- Ein Ortsvektor wird entweder durch seinen Betrag und einen oder (in drei Dimensionen) zwei Winkel oder aber durch seine skalaren Komponenten spezifiziert.
- Wenn ein Teilchen sich so bewegt, dass sein Ortsvektor sich von  $\vec{r}_1$  zu  $\vec{r}_2$  verändert, ist sein Verschiebungsvektor

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Alternativ kann der Verschiebungsvektor auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z \\ &= \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y + \Delta z\vec{e}_z .\end{aligned}$$



### Physikalische Motivation

In diesem Kapitel werden wir uns weiter mit der physikalischen Beschreibung von Bewegung beschäftigen, wobei nun aber Bewegungen in zwei oder drei Dimensionen zugelassen sein sollen. Mediziner und Luftfahrtingenieure interessieren sich beispielsweise sehr für die Physik der zwei- und dreidimensionalen Kurven von Kampffjets im Gefecht oder bei Übungen, weil moderne Jets so enge Kurven fliegen können, dass der Pilot das Bewusstsein verlieren kann. Ein Sportwissenschaftler interessiert sich vielleicht eher für die Physik des Basketballs – beim Freiwurf (wo ein Spieler einen ungestörten Wurf auf den Korb aus etwa 4,2 m Entfernung erhält) kann der Spieler z. B. einen Überhandwurf verwenden, bei dem er den Ball ungefähr aus Schulterhöhe mit einer Hand nach oben drückt und schließlich freigibt. Er kann aber auch einen beidhändigen Wurf versuchen, bei dem er den Ball



von unten aus Hüfthöhe mit beiden Händen nach oben schwingt und loslässt. Die überwältigende Mehrheit aller Basketballer verwendet die erste Technik, aber der legendäre NBA-Profi Rick Barry war berühmt für seine beidhändige Technik, mit der er eine beeindruckend hohe Trefferquote erzielte.

Dreidimensionale Bewegungen sind nicht leicht zu verstehen. Beispielsweise können Sie ein Auto auf einer Autobahn oder Landstraße (zweidimensionale Bewegung) vermutlich sehr sicher fahren, hätten aber wahrscheinlich einige Probleme, ohne aufwändiges Training ebenso sicher ein Flugzeug zu landen (dreidimensionale Bewegung).

Bei unserer Untersuchung von zwei- und dreidimensionalen Bewegungen beginnen wir mit den physikalischen Größen Ort und der Verschiebung.

#### 4.1.1 Ort und Verschiebung

Eine allgemeine Methode, den Ort eines Teilchens (oder eines Objekts, das wie ein Teilchen behandelt werden kann) darzustellen, ist die Angabe seines **Ortsvektors**  $\vec{r}$ . Dieser erstreckt sich von einem Referenzpunkt – üblicherweise dem Ursprung eines Koordinatensystems – bis zu dem entsprechenden Teilchen. In der Einheitsvektoren-Schreibweise von Abschnitt. 3.2 kann  $\vec{r}$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad (4.1)$$

wobei  $x\vec{e}_x$ ,  $y\vec{e}_y$  und  $z\vec{e}_z$  die Vektorkomponenten von  $\vec{r}$  und die Koeffizienten  $x$ ,  $y$  und  $z$  die skalaren Komponenten von  $\vec{r}$  sind.

Die Koeffizienten  $x$ ,  $y$  und  $z$  geben den Ort eines Teilchens entlang der Koordinatenachsen und relativ zum Ursprung an; das Teilchen besitzt also in dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten  $(x, y, z)$ . Abbildung 4.1 zeigt z. B. ein Teilchen mit dem Ortsvektor

$$\vec{r} = (-3\text{ m})\vec{e}_x + (2\text{ m})\vec{e}_y + (5\text{ m})\vec{e}_z$$

und den rechtwinkligen Koordinaten  $(-3\text{ m}, 2\text{ m}, 5\text{ m})$ . Entlang der  $x$ -Achse befindet sich das Teilchen 3 m weit in Richtung  $-\vec{e}_x$  vom Ursprung entfernt. Entlang der  $y$ -Achse ist es 2 m in  $+\vec{e}_y$ -Richtung und entlang der  $z$ -Achse 5 m in  $+\vec{e}_z$ -Richtung vom Ursprung entfernt.

Wenn sich ein Teilchen bewegt, verändert sich sein Ortsvektor derart, dass er immer vom Referenzpunkt (dem Ursprung) zur aktuellen Position des Teilchens zeigt. Verändert sich der Ortsvektor z. B. von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls, dann ist die **Verschiebung**  $\Delta\vec{r}$  des Teilchens während dieses Zeitintervalls gleich

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4.2)$$

In der Einheitsvektoren-Schreibweise von Gl. 4.1 wird diese Verschiebung zu:

$$\Delta\vec{r} = (x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z) - (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z)$$

oder

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z, \quad (4.3)$$

wobei die Koordinaten  $(x_1, y_1, z_1)$  zum Ortsvektor  $\vec{r}_1$  und die Koordinaten  $(x_2, y_2, z_2)$  zum Ortsvektor  $\vec{r}_2$  gehören. Wir können die Verschiebung weiter umformen, indem wir  $\Delta x$  für  $(x_2 - x_1)$ ,  $\Delta y$  für  $(y_2 - y_1)$  und  $\Delta z$  für  $(z_2 - z_1)$  einsetzen:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y + \Delta z\vec{e}_z. \quad (4.4)$$

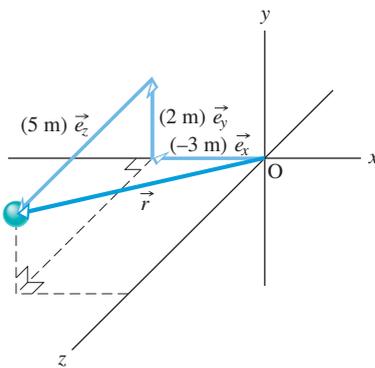


Abb. 4.1  
Der Ortsvektor  $\vec{r}$  eines Teilchens ist die Vektorsumme seiner Vektorkomponenten.

#### BEISPIELAUFGABE 4.1

Ein Auto fährt auf einer zum Parken freigegebenen Fläche, bei der zur genauen Angabe der Parkplätze ein Koordinatensystem aufgemalt wurde. Die Koordinaten

des Pkw-Mittelpunkts werden durch die Gleichungen

$$x = -0,31t^2 + 7,2t + 28 \quad (4.5)$$

und

$$y = 0,22t^2 - 9,1t + 30 \quad (4.6)$$

angegeben, wobei  $t$  in Sekunden und  $x$  und  $y$  in Metern gemessen werden.

**(a) FRAGE:** Wie lautet der Ortsvektor  $\vec{r}$  des Autos zum Zeitpunkt  $t = 15$  s in Einheitsvektoren- bzw. Betrag-Winkel-Schreibweise?

**LÖSUNG:** Die Lösungsidee ist hier, dass die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten, wie sie in den Gln. 4.5 und 4.6 angegeben sind, gleichzeitig die skalaren Komponenten des Ortsvektors  $\vec{r}$  des Autos darstellen. Also ist

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y. \quad (4.7)$$

(Wir schreiben hier  $\vec{r}(t)$  anstelle von  $\vec{r}$ , da die Komponenten Funktionen von  $t$  sind und der Vektor  $\vec{r}$  damit ebenso eine Funktion von  $t$  ist.)

Zum Zeitpunkt  $t = 15$  s sind die skalaren Komponenten

$$x = (-0,31)(15)^2 + (7,2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

und

$$y = (0,22)(15)^2 + (9,1)(15) + 30 = -57 \text{ m}.$$

Zur Zeit  $t = 15$  s ist also

$$\vec{r} = (66 \text{ m})\vec{e}_x - (57 \text{ m})\vec{e}_y.$$

Dieser Vektor ist in Abb. 4.2a dargestellt.

Um den Betrag und den Winkel von  $\vec{r}$  zu ermitteln, können wir entweder einen vektorfähigen Taschenrechner benutzen oder aber Gl. 3.6 ausnutzen, was auf

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2} = 87 \text{ m}$$

und

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \left( \frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}} \right) = -41^\circ.$$

führt. (Obwohl  $\theta = 139^\circ$  denselben Tangens besitzt wie  $-41^\circ$ , können wir  $139^\circ$  als Lösung ausschließen, wenn wir die Vorzeichen der Komponenten von  $\vec{r}$  berücksichtigen.)

**(b) FRAGE:** Zeichnen Sie die Bahnkurve des Autos von  $t = 0$  bis  $t = 25$  s.

**LÖSUNG:** Wir können hier Teil (a) für verschiedene Werte von  $t$  wiederholen und diese Ergebnisse auftragen. Abbildung 4.2b zeigt entsprechende Punkte für fünf verschiedene Zeiten sowie die Kurve, die diese Punkte verbindet. Wir können auch einen grafikfähigen Taschenrechner benutzen, um eine Parameterkurve zu erstellen:

Das heißt, wir lassen den Taschenrechner  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  auftragen, wobei diese Koordinaten als Funktionen von  $t$  durch die Gln. 4.5 und 4.6 gegeben sind.

### KONTROLLFRAGE 1

(a) Eine Fledermaus fliege vom Ort mit den  $xyz$ -Koordinaten  $(-2 \text{ m}, 4 \text{ m}, -3 \text{ m})$  nach  $(6 \text{ m}, -2 \text{ m}, -3 \text{ m})$ . Wie lautet ihre Verschiebung  $\Delta\vec{r}$  in Einheitsvektoren-Schreibweise? (b) Verläuft  $\Delta\vec{r}$  parallel zu einer der drei Ebenen, die von den Koordinatenachsen aufgespannt werden? Wenn ja, zu welcher?

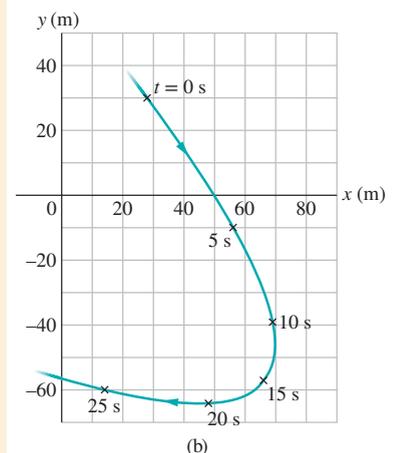
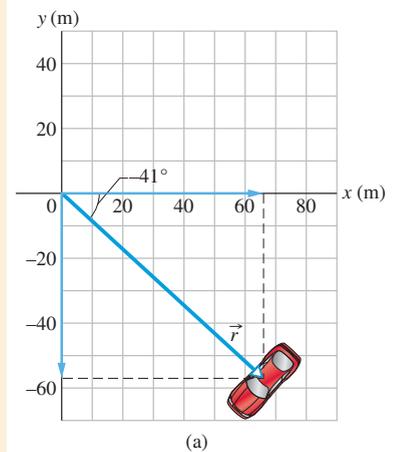


Abb. 4.2

(a) Der Ortsvektor  $\vec{r}$  eines Autos zur Zeit  $t = 15$  s. Die skalaren Komponenten von  $\vec{r}$  sind entlang der jeweiligen Achsen eingezeichnet. (b) Die Bahnkurve des Autos und seine Position zu fünf verschiedenen Zeiten  $t$ .

## 4.2 Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit



### Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- zu verstehen, dass die Geschwindigkeit eine Vektorgröße ist und daher einen Betrag und eine Richtung sowie Komponenten besitzt,
- zwei- und dreidimensionale Geschwindigkeitsvektoren für ein Teilchen zu zeichnen und ihre Komponenten bezüglich der Achsen des Koordinatensystems anzugeben,
- eine Beziehung zwischen Start- und Endposition eines Teilchens, dem Zeitintervall zwischen Start und Ankunft und dem zugehörigen Vektor der mittleren Geschwindigkeit des Teilchens sowohl in Betrag-Winkel- als auch in Einheitsvektoren-Schreibweise anzugeben,
- aus dem Ort eines Teilchens als Funktion der Zeit seinen (momentanen) Geschwindigkeitsvektor zu bestimmen.



### Schlüsselideen

- Wenn ein Teilchen im Zeitintervall  $\Delta t$  eine Verschiebung  $\Delta \vec{r}$  erfährt, ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{gem}}$  in diesem Zeitintervall

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

- Wenn wir das Zeitintervall  $\Delta t$  gegen null gehen lassen, erhalten wir die Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \vec{v}$  (oft auch einfach als Geschwindigkeit bezeichnet):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

die wir in Einheitsvektoren-Schreibweise als

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

mit  $v_x = dv/dx$ ,  $v_y = dv/dy$  und  $v_z = dv/dz$  schreiben können.

- Die Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}$  eines Teilchens zeigt stets in Richtung der Tangente an die Bahnkurve des Teilchens an seinem momentanen Ort.

### 4.2.1 Mittlere und Momentangeschwindigkeit

Wenn ein Teilchen in einem Zeitintervall  $\Delta t$  eine Verschiebung  $\Delta \vec{r}$  durchläuft, dann ist seine **Durchschnittsgeschwindigkeit**  $\vec{v}_{\text{gem}}$ :

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Verschiebung}}{\text{Zeitintervall}}$$

beziehungsweise

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (4.8)$$

Dies bedeutet, dass die Richtung von  $\vec{v}_{\text{gem}}$  (dem Vektor auf der linken Seite von Gl. 4.8) dieselbe sein muss wie die der Verschiebung  $\Delta \vec{r}$  (des Vektors auf der rechten Seite). Anhand von Gl. 4.4 können wir Gl. 4.8 in Vektorkomponenten umschreiben und erhalten:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y + \Delta z \vec{e}_z}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{e}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{e}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{e}_z. \quad (4.9)$$

Wenn sich das Teilchen aus Beispielaufgabe 4.1 in 2,0 s von seiner Anfangs- zu seiner Endposition bewegt, so ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit während dieses

Zeitintervalls:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12 \text{ m})\vec{e}_x + (3,0 \text{ m})\vec{e}_z}{2,0 \text{ s}} = (6,0 \text{ m/s})\vec{e}_x + (1,5 \text{ m/s})\vec{e}_z.$$

Wenn wir von der **Geschwindigkeit** eines Teilchens sprechen, so meinen wir üblicherweise die **Momentangeschwindigkeit**  $\vec{v}$  des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt. Diese Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist der Grenzwert, den  $\vec{v}_{\text{gem}}$  anstrebt, wenn wir das Zeitintervall  $\Delta t$  um diesen Zeitpunkt herum gegen null gehen lassen. Formal können wir  $\vec{v}$  also als die Ableitung

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.10)$$

schreiben. Abbildung 4.3 zeigt die Bahnkurve eines Teilchens, dessen Bewegung auf die  $xy$ -Ebene beschränkt ist. Während das Teilchen sich entlang der Kurve nach rechts bewegt, schwenkt auch sein Ortsvektor nach rechts. Während des Zeitintervalls  $\Delta t$  ändert sich der Ortsvektor von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$ , die Verschiebung des Teilchens ist  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

Um die Momentangeschwindigkeit des Teilchens zur Zeit  $t_1$  zu bestimmen (zu der sich das Teilchen am Ort 1 befindet), lassen wir das Intervall  $\Delta t$  um  $t_1$  herum gegen null gehen. Dabei passieren drei Dinge: (1) Der Ortsvektor  $\vec{r}_2$  in Abb. 4.4 bewegt sich auf  $\vec{r}_1$  zu, sodass  $\Delta \vec{r}$  gegen null geht. (2) Die Richtung von  $\Delta \vec{r} / \Delta t$  (also von  $\vec{v}_{\text{gem}}$ ) nähert sich der Richtung der Tangente an die Bahnkurve des Teilchens im Punkt 1 an. (3) Die Durchschnittsgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{gem}}$  nähert sich der Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}$  zum Zeitpunkt  $t_1$  an.

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  geht  $\vec{v}_{\text{gem}}$  im Grenzwert gegen  $\vec{v}$ ; außerdem nimmt  $\vec{v}_{\text{gem}}$  – was an dieser Stelle besonders wichtig ist – die Richtung der Tangente an die Bahnkurve an. Also besitzt  $\vec{v}$  ebenfalls diese Richtung:

 Die Richtung der Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}$  eines Teilchens verläuft immer tangential zur Bahnkurve des Teilchens am momentanen Ort des Teilchens.

Dieses Ergebnis gilt genauso in drei Dimensionen:  $\vec{v}$  weist immer entlang der Tangente an die (räumliche) Bahnkurve des Teilchens.

Um Gl. 4.10 in Einheitsvektoren-Schreibweise zu schreiben, ersetzen wir  $\vec{r}$  mithilfe von Gl. 4.1:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z.$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen, indem wir sie in die Form

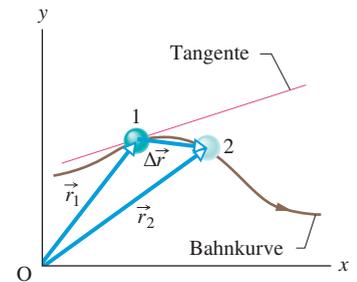
$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \quad (4.11)$$

bringen, wobei die skalaren Komponenten von  $\vec{v}$  gleich

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (4.12)$$

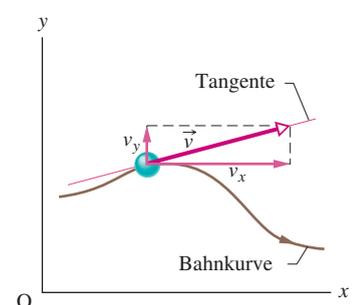
sind. So ist  $dx/dt$  z. B. die skalare Komponente von  $\vec{v}$  entlang der  $x$ -Achse. Wir können also die skalaren Komponenten von  $\vec{v}$  bestimmen, indem wir die skalaren Komponenten von  $\vec{r}$  nach der Zeit ableiten.

Abbildung 4.4 zeigt einen Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  und seine skalaren Komponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Beachten Sie, dass  $\vec{v}$  am Ort des Teilchens tangential zur Bahnkurve des Teilchens verläuft. *Vorsicht:* Wenn ein Ortsvektor wie in den Abb. 4.1–4.3 gezeichnet wird, dann wird er durch einen Pfeil dargestellt, der sich von einem Punkt (einem „hier“) zu einem anderen Punkt (einem „dort“) erstreckt. Wenn ein Geschwindigkeitsvektor so gezeichnet wird wie in Abb. 4.4, dann erstreckt er sich *nicht* von einem Punkt zu einem anderen. Vielmehr zeigt er die momentane Richtung an, in der sich das Teilchen bewegt, das sich an seinem Anfang befindet. Die Länge des Pfeils (die dem Betrag der Geschwindigkeit entspricht) kann in einem beliebigen Maßstab gezeichnet werden.

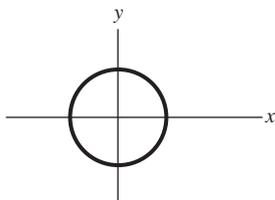


**Abb. 4.3**  
Die Verschiebung  $\Delta \vec{r}$  eines Teilchens während eines Zeitintervalls  $\Delta t$  von Position 1 mit Ortsvektor  $\vec{r}_1$  zur Zeit  $t_1$  zur Position 2 mit Ortsvektor  $\vec{r}_2$  zur Zeit  $t_2$ . Eingezeichnet ist auch die Tangente an die Bahnkurve des Teilchens am Ort 1.

TS.11



**Abb. 4.4**  
Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  eines Teilchens und die skalaren Komponenten von  $\vec{v}$ .



## BEISPIELAUFGABE 4.2

## KONTROLLFRAGE 2

Die Abbildung zeigt die kreisförmige Bahn eines Teilchens. Die Momentangeschwindigkeit des Teilchens ist  $\vec{v} = (2 \text{ m/s}) \vec{e}_x - (2 \text{ m/s}) \vec{e}_y$ . Durch welche Quadranten bewegt sich das Teilchen, wenn es den Kreis (a) im Uhrzeigersinn und (b) im Gegenuhrzeigersinn durchläuft? Zeichnen Sie  $\vec{v}$  in beiden Fällen in die Abbildung ein.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  für das Auto aus Beispielaufgabe 4.1 zur Zeit  $t = 15 \text{ s}$  sowohl in Einheitsvektoren-Schreibweise als auch mit Betrag und Winkel.

**LÖSUNG:** Hier gibt es zwei Lösungsideen: (1) Wir können die Geschwindigkeit des Autos ermitteln, indem wir zunächst die Komponenten der Geschwindigkeit bestimmen. (2) Diese Komponenten können wir herausfinden, indem wir die Komponenten des Pkw-Ortsvektors nach der Zeit ableiten. Wenden wir die erste Gleichung von Gl. 4.12 auf Gl. 4.5 an, so erhalten wir die  $x$ -Komponente von  $\vec{v}$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (-0,31t^2 + 7,2t + 28) = -0,62t + 7,2. \quad (4.13)$$

Zur Zeit  $t = 15 \text{ s}$  ergibt dies  $v_x = -2,1 \text{ m/s}$ . Indem wir die zweite Gleichung von Gl. 4.12 auf Gl. 4.6 anwenden, erhalten wir analog die  $y$ -Komponente:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (0,22t^2 - 9,1t + 30) = 0,44t - 9,1. \quad (4.14)$$

Zur Zeit  $t = 15 \text{ s}$  ergibt dies  $v_y = -2,5 \text{ m/s}$ . Gleichung 4.11 liefert schließlich:

$$\vec{v} = -(2,1 \text{ m/s}) \vec{e}_x - (2,5 \text{ m/s}) \vec{e}_y.$$

Diese Geschwindigkeit ist in Abb. 4.5 dargestellt. Sie verläuft tangential zur Bahn des Autos und zeigt daher in die Richtung, in die das Auto zum Zeitpunkt  $t = 15 \text{ s}$  fährt.

Um den Betrag und den Winkel von  $\vec{v}$  zu bestimmen, können wir entweder einen vektorfähigen Taschenrechner benutzen, oder wir berechnen beide Werte anhand von Gl. 3.6:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2,1 \text{ m/s})^2 + (-2,5 \text{ m/s})^2} = 3,3 \text{ m/s}$$

und

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \left( \frac{-2,5 \text{ m/s}}{-2,1 \text{ m/s}} \right) = \arctan 1,19 = -130^\circ.$$

(Obwohl  $50^\circ$  denselben Tangens besitzt wie  $-130^\circ$ , zeigt die Betrachtung der Vorzeichen der Geschwindigkeitskomponenten, dass der gesuchte Winkel im dritten Quadranten liegt und durch  $50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$  gegeben ist.)

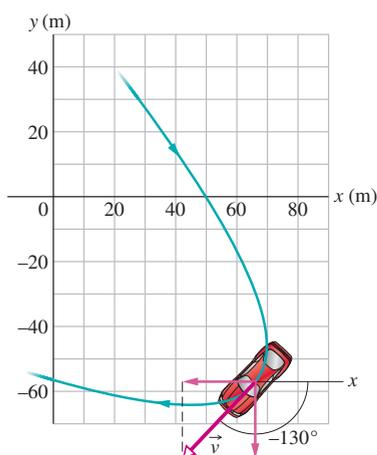


Abb. 4.5

Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Autos bei  $t = 15 \text{ s}$ . Der Geschwindigkeitsvektor verläuft tangential zur Bahnkurve am momentanen Ort des Autos. Die skalaren Komponenten von  $\vec{v}$  sind ebenfalls eingezeichnet.

### 4.3 Durchschnittsbeschleunigung und Momentanbeschleunigung



#### Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- Zu verstehen, dass die Beschleunigung eine Vektorgröße ist und daher sowohl einen Betrag als auch eine Richtung sowie Komponenten besitzt,
- zwei- und dreidimensionale Beschleunigungsvektoren für ein Teilchen zu zeichnen und ihre Komponenten anzugeben,
- aus der Start- und Endgeschwindigkeit eines Teilchens und dem entsprechenden Zeitintervall den zugehörigen Vektor der mittleren Beschleunigung des Teilchens sowohl in Betrag-Winkel- als auch in Einheitsvektoren-Schreibweise anzugeben,

- aus der Geschwindigkeit eines Teilchens als Funktion der Zeit seinen (momentanen) Beschleunigungsvektor zu bestimmen,
- die Gleichungen für eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung (siehe Kapitel 2) für jede Dimension der Bewegung anzuwenden, um Beschleunigung, Geschwindigkeit, Ort und Zeit in Beziehung zu setzen.

### Schlüsselideen

- Wenn sich die Geschwindigkeit eines Teilchens im Zeitintervall  $\Delta t$  von  $\vec{v}_1$  nach  $\vec{v}_2$  ändert, ist seine mittlere Beschleunigung  $\vec{a}_{\text{gem}}$  in diesem Zeitintervall

$$\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

- Wenn wir das Zeitintervall  $\Delta t$  gegen null gehen lassen, erhalten wir die Momentanbeschleunigung  $\vec{a}$  (oft auch einfach als Beschleunigung bezeichnet):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

- In Einheitsvektoren-Schreibweise ist

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

mit  $a_x = da/dx$ ,  $a_y = da/dy$  und  $a_z = da/dz$ .

### 4.3.1 Veränderliche Geschwindigkeiten

Wenn sich die Geschwindigkeit eines Teilchens innerhalb eines Zeitintervalls  $\Delta t$  von  $\vec{v}_1$  nach  $\vec{v}_2$  ändert, dann ist seine **Durchschnittsbeschleunigung** (oder **mittlere Beschleunigung**)  $\vec{a}_{\text{gem}}$  im Zeitintervall  $\Delta t$  durch

$$\text{Durchschnittsbeschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$$

gegeben, d. h.:

$$\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4.15)$$

Lassen wir  $\Delta t$  um einen bestimmten Zeitpunkt herum gegen null gehen, dann nähert sich  $\vec{a}_{\text{gem}}$  im Grenzwert der **Momentanbeschleunigung** (oder **Beschleunigung**)  $\vec{a}$  zu diesem Zeitpunkt an, d. h.:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.16)$$

Wenn die Geschwindigkeit sich *entweder* in ihrem Betrag *oder* in ihrer Richtung ändert (oder in beiden), dann muss das Teilchen einer Beschleunigung unterliegen.

Indem wir  $\vec{v}$  anhand von Gl. 4.11 ersetzen, können wir Gl. 4.16 in die Einheitsvektoren-Schreibweise umschreiben:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z) = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z.$$

Dies können wir wiederum in die Form

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (4.17)$$

bringen, wobei die skalaren Komponenten von  $\vec{a}$  gleich

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{und} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (4.18)$$

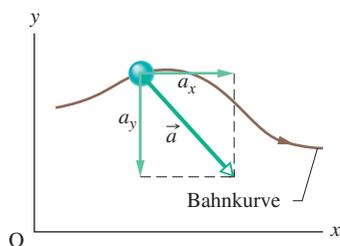


Abb. 4.6

Die Beschleunigung  $\vec{a}$  eines Teilchens und die skalaren Komponenten von  $\vec{a}$ .

sind. Demnach ermitteln wir die skalaren Komponenten von  $\vec{a}$ , indem wir die skalaren Komponenten von  $\vec{v}$  nach der Zeit ableiten.

Abbildung 4.6 zeigt einen Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  und seine skalaren Komponenten für ein Teilchen, das sich in zwei Dimensionen bewegt. *Vorsicht:* Wenn ein Beschleunigungsvektor wie in Abb. 4.6 gezeichnet wird, erstreckt er sich *nicht* von einem Punkt zu einem anderen. Vielmehr zeigt er die Richtung der Beschleunigung eines Teilchens an, das sich am Anfang des Vektors befindet. Seine Länge (der Betrag der Beschleunigung) kann in einem beliebigen Maßstab gezeichnet werden.

### KONTROLLFRAGE 3

Anbei finden Sie vier Angaben (in Metern) zur Position eines Eishockeypucks, der sich in einer  $xy$ -Ebene bewegt:

1.  $x = -3t^2 + 4t - 2$  und  $y = 6t^2 - 4t$ ,
2.  $x = -3t^2 - 4t$  und  $y = -5t^2 + 6$ ,
3.  $\vec{r} = 2t^2\vec{e}_x - (4t + 3)\vec{e}_y$ ,
4.  $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ .

Bestimmen Sie für jede dieser Positionen, ob  $x$ - und  $y$ -Komponente der Beschleunigung des Pucks konstant sind und ob der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  konstant ist.

### BEISPIELAUFGABE 4.3

Bestimmen Sie die Beschleunigung  $\vec{a}$  für das Auto aus den Beispielaufgaben 4.1 und 4.1 zur Zeit  $t = 15$  s in Einheitsvektoren- und Betrag-Winkel-Schreibweise.

**LÖSUNG:** Hier gibt es zwei Lösungsideen: (1) Wir können die Beschleunigung  $\vec{a}$  des Autos ermitteln, indem wir zuerst die Komponenten der Beschleunigung bestimmen. (2) Diese Komponenten können wir berechnen, indem wir die Geschwindigkeitskomponenten des Autos nach der Zeit ableiten. Wenden wir die erste Gleichung von Gl. 4.18 auf Gl. 4.13 an, so erhalten wir die  $x$ -Komponente von  $\vec{a}$ :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0,62t + 7,2) = -0,62 \text{ m/s}.$$

Analog ergibt sich die  $y$ -Komponente, indem wir die zweite Gleichung von Gl. 4.18 auf Gl. 4.14 anwenden:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0,44t - 9,1) = 0,44 \text{ m/s}.$$

Wie man sieht, hängt die Beschleunigung nicht von der Zeit ab (sie ist konstant), da die Zeitvariable  $t$  in keiner der beiden Beschleunigungskomponenten vorkommt.

Gleichung 4.17 liefert dann:

$$\vec{a} = (-0,62 \text{ m/s}^2)\vec{e}_x + (0,44 \text{ m/s}^2)\vec{e}_y.$$

Die Beschleunigung ist in Abb. 4.7 auf der Bahnkurve des Autos eingezeichnet.

Um den Betrag und den Winkel von  $\vec{a}$  zu ermitteln, benutzen wir entweder einen vektorfähigen Taschenrechner oder Gl. 3.6. Für den Betrag ergibt sich damit:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0,62 \text{ m/s}^2)^2 + (0,44 \text{ m/s}^2)^2} = 0,76 \text{ m/s}^2,$$

für den Winkel erhalten wir

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \left( \frac{0,44 \text{ m/s}^2}{-0,62 \text{ m/s}^2} \right) = -35^\circ.$$

Dieses letzte Ergebnis, das der Taschenrechner liefert, bedeutet, dass  $\vec{a}$  in Abb. 4.7 nach rechts unten gerichtet sein muss. Wir wissen jedoch aus den oben genannten Komponenten, dass  $\vec{a}$  tatsächlich nach links oben zeigen sollte. Um einen zweiten Winkel zu finden, der denselben Tangens besitzt wie  $-35^\circ$ , aber von unserem Taschenrechner nicht angezeigt wird, addieren wir  $180^\circ$ :

$$-35^\circ + 180^\circ = 145^\circ.$$

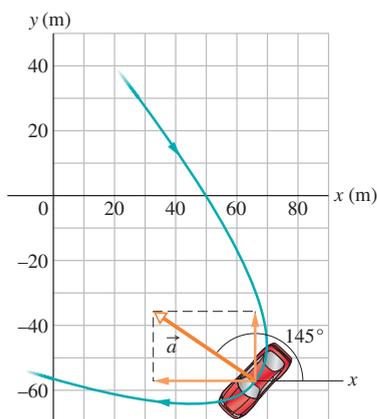


Abb. 4.7

Die Beschleunigung  $\vec{a}$  des Pkw bei  $t = 15$  s. Der Fahrer gibt gerade so viel Gas, dass sein Auto konstant beschleunigt wird.

Dieser Winkel passt nun zu den Komponenten von  $\vec{a}$ . Beachten Sie, dass  $\vec{a}$  während der gesamten Fahrt denselben Betrag und dieselbe Richtung aufweist, da die Beschleunigung, wie wir bereits zuvor festgestellt hatten, konstant ist.

#### KONTROLLFRAGE 4

Die Position einer Murmel wird durch  $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\vec{e}_x + 3t\vec{e}_y$  gegeben, wobei  $\vec{r}$  in Metern und  $t$  in Sekunden gemessen wird. Welche Einheiten besitzen die Koeffizienten 4, -2 und 3?

## 4.4 Wurfbewegungen

### Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- in einer Skizze der Bahnkurve eines Teilchens Betrag und Richtung der Geschwindigkeit sowie die Komponenten der Beschleunigung anzugeben,
- aus der gegebenen Startgeschwindigkeit eines Teilchens in Betrag-Richtung- oder Einheitsvektoren-Schreibweise den Ort, die Verschiebung und die Geschwindigkeit des Teilchens für beliebige Zeitpunkte während seines Flugs zu berechnen,
- aus den Daten für einen beliebigen Zeitpunkt während des Flugs die Startgeschwindigkeit zu berechnen.



### Schlüsselideen

- Bei Wurfbewegungen wird ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  in einem Winkel  $\theta_0$  (gegen eine horizontale  $x$ -Achse gemessen) in die Luft geworfen. Während des Flugs ist seine horizontale Beschleunigung (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands) null und seine vertikale Beschleunigung beträgt  $-g$  (entlang einer vertikalen  $y$ -Achse nach unten).
- Während des Flugs lauten die Bewegungsgleichungen des Teilchens

$$\begin{aligned}x - x_0 &= (v_0 \cos \theta_0) t, \\y - y_0 &= (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2, \\v_y &= v_0 \sin \theta_0 - g t, \\v_y^2 &= (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0).\end{aligned}$$

- Die Trajektorie (Bahnkurve, Flugbahn) eines fliegenden Teilchens ist eine Parabel, die für  $x_0 = y_0 = 0$  durch

$$y = (\tan \theta_0) x - \frac{g x^2}{2 (v_0 \cos \theta_0)^2}$$

gegeben ist.

- Die horizontale Reichweite  $R$  des Teilchens, d. h. die horizontale Entfernung vom Startpunkt bis zu der Stelle, an der es die Abwurfhöhe wieder erreicht, beträgt

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0.$$

### 4.4.1 Wurfbewegungen

Als Nächstes betrachten wir einen Spezialfall der zweidimensionalen Bewegung: Ein Teilchen bewege sich in einer senkrechten Ebene mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  und unterliege dabei der nach unten gerichteten Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}$ . Ein solches Teilchen wird ein **Projektile** genannt, da es



Abb. 4.8

Eine Stroboskopaufnahme eines gelben Tennisballs, der von einer harten Oberfläche abprallt. Zwischen den Augenblicken, in denen er den Boden berührt, führt der Ball eine Wurfbewegung aus.

geworfen oder geschossen wurde. Seine Bewegung bezeichnen wir als eine **Wurfbewegung**. Ein solches Projektil kann z. B. ein Tennisball (Abb. 4.8) oder ein Stein während des Flugs sein – ein Flugzeug oder eine fliegende Ente wären jedoch keine Projektile. Unser Ziel ist es hier, die Wurfbewegung anhand der in den Abschnitten 4.1–4.3 vorgestellten „Werkzeuge“ für die zweidimensionale Bewegung zu analysieren. Dazu setzen wir voraus, dass die Auswirkungen des Luftwiderstands auf das Projektil vernachlässigt werden können.

Die Abb. 4.9, die im nächsten Abschnitt analysiert wird, zeigt die Bahnkurve, die ein Projektil beschreibt, wenn der Luftwiderstand gleich null ist. Das Projektil wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  geworfen, die sich in der Form

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y \quad (4.19)$$

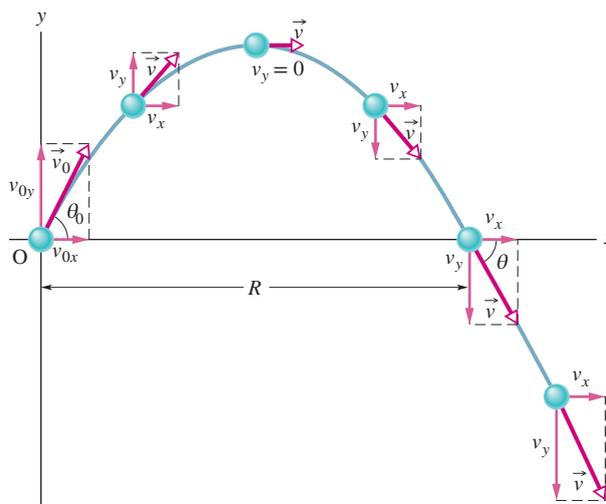
schreiben lässt. Die Komponenten  $v_{0x}$  und  $v_{0y}$  lassen sich mithilfe des Winkels  $\theta_0$  zwischen  $\vec{v}_0$  und der positiven  $x$ -Richtung bestimmen:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{und} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 . \quad (4.20)$$

Während der zweidimensionalen Bewegung des Projektils verändern sich sein Ortsvektor  $\vec{r}$  und sein Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  kontinuierlich; der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  ist jedoch konstant und *immer* senkrecht nach unten gerichtet. Ein Projektil erfährt keine horizontale Beschleunigung.

Abb. 4.9

Die Bahn eines Projektils, das bei  $x_0 = 0$  und  $y_0 = 0$  mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  geworfen wird. Eingezeichnet sind die Anfangsgeschwindigkeit sowie die Geschwindigkeiten an verschiedenen Punkten der Bahnkurve zusammen mit ihren Komponenten. Beachten Sie, dass die horizontale Geschwindigkeitskomponente konstant bleibt, die vertikale Geschwindigkeitskomponente sich jedoch kontinuierlich verändert. Die *Reichweite*  $R$  ist die horizontale Entfernung, die das Projektil in dem Moment zurückgelegt hat, in dem es wieder *seine Ausgangshöhe erreicht*.



Die in den Abb. 4.8 und 4.9 dargestellte Wurfbewegung sieht kompliziert aus, die folgende – experimentell bestätigte – Tatsache vereinfacht die Situation jedoch deutlich:

☞ Bei der Wurfbewegung erfolgen die horizontale und die vertikale Bewegung unabhängig voneinander, sie beeinflussen sich gegenseitig nicht.

Diese Eigenschaft erlaubt es uns, eine Aufgabe mit einer zweidimensionalen Bewegung in zwei getrennte, einfachere eindimensionale Aufgaben zu zerlegen – eine für die horizontale Bewegung (bei der die *Beschleunigung null* ist) und eine für die vertikale Bewegung (mit einer *gleichmäßigen, nach unten gerichteten Beschleunigung*). Lassen Sie uns zwei Experimente betrachten, die zeigen, dass die waagerechte und die senkrechte Bewegung voneinander unabhängig sind.

## Zwei Golfbälle

Abbildung 4.10 zeigt eine Stroboskopaufnahme zweier Golfbälle: Während der eine Ball einfach fallen gelassen wird, wird der andere durch eine Feder in die horizontale Richtung geschossen. Die Golfbälle besitzen die gleiche vertikale Bewegung, beide fallen während desselben Zeitintervalls die gleiche senkrechte Strecke

nach unten. Die Tatsache, dass sich der eine Ball während des Falls auch horizontal bewegt, hat keinen Einfluss auf seine vertikale Bewegung. Die waagerechte und die senkrechte Bewegung sind also unabhängig voneinander.

## Ein Beispiel für die Physikvorlesung

Abbildung 4.11 zeigt eine Vorführung, die bereits in zahlreichen Physikvorlesungen für Stimmung gesorgt hat. Dazu wird eine „Blasrohr-Gun“ G mit einem kleinen Ball als Projektil benötigt. Ziel ist es, eine an einem Magneten M aufgehängte Dose zu treffen; das Blasrohr ist dabei direkt auf die Büchse gerichtet. Das Experiment wird so aufgebaut, dass der Magnet die Dose genau in dem Augenblick freigibt, in dem der Ball das Blasrohr verlässt.

Wäre  $g$  (der Betrag der Erdbeschleunigung) gleich null, so würde der Ball wie in Abb. 4.11 gezeigt eine gerade Linie beschreiben und die Dose würde, nachdem der Magnet sie freigegeben hat, an ein und derselben Stelle hängenbleiben. Der Ball würde die Dose mit Sicherheit treffen.

Die Gravitationsbeschleunigung  $g$  ist jedoch nicht gleich null. Und dennoch trifft der Ball die Dose! Wie Abb. 4.11 zeigt, fallen Dose und Ball während der Flugzeit des Balls ab dem Moment, in dem der Ball das Blasrohr verlässt, die gleiche Strecke  $h$ . Je stärker der Vorführende in das Rohr bläst, desto größer ist die Anfangsgeschwindigkeit des Balls, desto kürzer ist die Flugzeit und desto kleiner auch der Wert von  $h$ .

### 4.4.2 Analyse der Wurfbewegung

Lassen Sie uns nun die Wurfbewegung sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung im Einzelnen analysieren.

#### Die horizontale Bewegung

Da in horizontaler Richtung keine Beschleunigung stattfindet, bleibt die horizontale Komponente  $v_x$  der Projektilgeschwindigkeit während der gesamten Bewegung unverändert gleich der Anfangsgeschwindigkeit  $v_{0x}$ . Zu jeder beliebigen Zeit  $t$  ist die horizontale Verschiebung  $\Delta x = x - x_0$  des Projektils von seiner Ausgangsposition  $x_0$  durch Gl. 2.13 gegeben, wobei  $a = 0$  ist. Damit haben wir

$$x - x_0 = v_0 t .$$

Wegen  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$  wird daraus:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0) t . \quad (4.21)$$

#### Die vertikale Bewegung

Die vertikale Bewegung entspricht derjenigen, die wir in Abschnitt. 2.5 für ein Teilchen im freien Fall untersucht hatten. Wichtig ist hier, dass die Beschleunigung konstant ist. Also gelten die Gleichungen aus Tab. 2.1, wobei wir  $a$  durch  $-g$  ersetzen und die Gleichungen für  $y$  umschreiben müssen. So wird etwa Gl. 2.13 zu:

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 , \quad (4.22)$$

wobei die vertikale Komponente  $v_{0y}$  der Anfangsgeschwindigkeit durch den äquivalenten Ausdruck  $v_0 \sin \theta$  ersetzt wurde. Analog ergibt sich aus den Gln. 2.9 und 2.14

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t \quad (4.23)$$

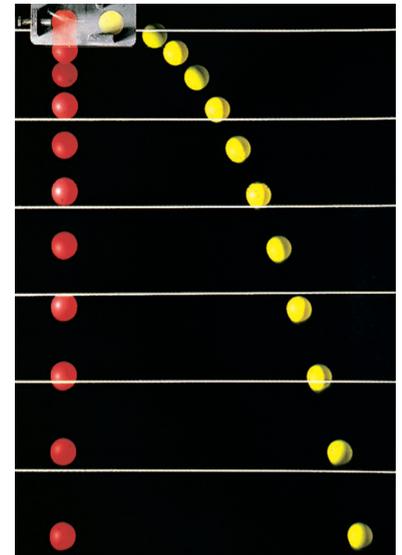


Abb. 4.10

Ein Ball wird ohne Anfangsgeschwindigkeit in dem Moment fallen gelassen, in dem ein anderer Ball horizontal nach rechts geworfen wird. Die vertikale Bewegung der beiden Bälle ist identisch.

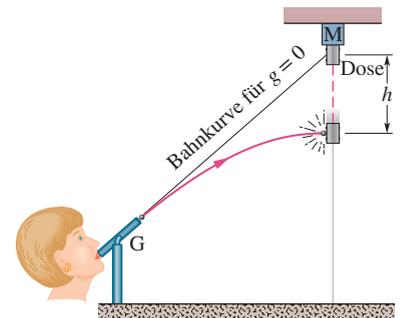


Abb. 4.11

Der Ball – das Projektil – trifft die fallende Dose immer. Beide fallen eine Entfernung  $h$  von dem Punkt aus gemessen, an dem sie sich ohne Gravitationsbeschleunigung befinden würden.

und

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0) . \quad (4.24)$$

Wie aus Abb. 4.9 und Gl. 4.23 deutlich wird, verhält sich die vertikale Geschwindigkeitskomponente genauso wie bei einem Ball, der senkrecht nach oben geworfen wurde. Sie zeigt anfänglich nach oben und ihr Betrag nimmt kontinuierlich ab, bis er schließlich verschwindet – dieser Punkt entspricht der maximalen Höhe der Flugbahn. Daraufhin verändert die Geschwindigkeitskomponente ihre Richtung und ihr Betrag wird mit der Zeit immer größer.

## Die Bahngleichung

Wir können die Gleichung ermitteln, welche die Form der Flugbahn (**Trajektorie**) des Teilchens beschreibt, indem wir  $t$  aus den Gln. 4.21 und 4.22 eliminieren. Dazu lösen wir Gl. 4.21 nach  $t$  auf und setzen das Ergebnis in Gl. 4.22 ein. Nach kleinen Umformungen erhalten wir:

$$y = (\tan \theta_0) x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} . \quad (4.25)$$

Dies ist die Gleichung der in Abb. 4.9 gezeigten Bahnkurve. Bei ihrer Herleitung haben wir der Einfachheit halber in den Gln. 4.21 und 4.22 jeweils  $x_0 = 0$  und  $y_0 = 0$  gesetzt. Da  $g$ ,  $\theta_0$  und  $v_0$  Konstanten sind, hat Gl. 4.25 die allgemeine Form  $y = ax + bx^2$ , wobei  $a$  und  $b$  konstant sind. Dies ist die Gleichung einer Parabel; man sagt, das Projektil beschreibt eine *parabolische* Bahn bzw. eine *Wurfparabel*.

## Die horizontale Reichweite

Die *horizontale Reichweite* des Projektils ist, wie Abb. 4.9 zeigt, die Entfernung, die das Projektil in *horizontaler Richtung* zurückgelegt hat, wenn es seine ursprüngliche (Abwurf-)Höhe wieder erreicht. Um die Reichweite  $R$  zu bestimmen, setzen wir  $x - x_0 = R$  in Gl. 4.21 und  $y - y_0 = 0$  in Gl. 4.22. Damit erhalten wir:

$$R = (v_0 \cos \theta_0) t$$

und

$$0 = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Eliminieren wir  $t$  aus diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 .$$

Nun nutzen wir aus, dass  $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$  (siehe Anhang ??), und erhalten damit:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 . \quad (4.26)$$

*Vorsicht:* Diese Gleichung gibt *nicht* die horizontale Entfernung an, die ein Projektil zurückgelegt hat, wenn die Höhe des Endpunkts ungleich der Höhe des Startpunkts ist.

Beachten Sie, dass der Wert von  $R$  in Gl. 4.26 maximal wird, wenn  $\sin 2\theta_0 = 1$  ist; dies entspricht einem Winkel von  $2\theta_0 = 90^\circ$  bzw.  $\theta_0 = 45^\circ$ .



Die horizontale Reichweite  $R$  ist maximal, wenn das Projektil in einem Winkel von  $45^\circ$  geworfen bzw. geschossen wird.

## Der Luftwiderstand

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass die Luft, durch die sich das Projektil bewegt, keinerlei Auswirkungen auf seine Bewegung hat. In vielen Situationen kann die Abweichung zwischen unseren Rechnungen und der tatsächlichen Bewegung des Projektils allerdings ganz beträchtlich sein, da die Luft der Bewegung in der Realität durchaus einen Widerstand entgegensetzt. Abbildung 4.12 z. B. zeigt zwei Bahnkurven eines Balls, der in einem Winkel von  $60^\circ$  zur Horizontalen und mit einer Anfangsgeschwindigkeit von  $44,7 \text{ m/s}$  geworfen wird. Bahn I entspricht einer berechneten Kurve, welche die normalen Bedingungen (in Luft) annähernd wiedergibt. Bahn II ist die Kurve, die der Ball in einem Vakuum beschreiben würde.

**TABELLE 4.1:**  
Zwei Bälle<sup>a)</sup>.

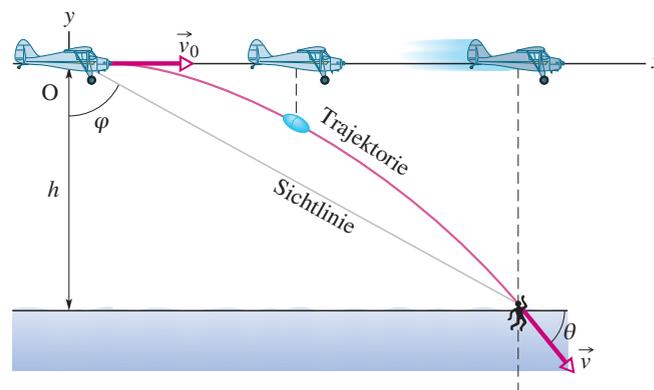
	Bahn I (in Luft)	Bahn II (im Vakuum)
Reichweite	98,5 m	177 m
maximale Höhe	53,0 m	76,8 m
Flugzeit	6,6 s	7,9 s

a) Siehe Abb. 4.12. Der Wurfwinkel beträgt  $60^\circ$ , die Abwurfgeschwindigkeit  $44,7 \text{ m/s}$ .

### KONTROLLFRAGE 5

Ein Ball wird aus dem Spielfeld herausgeschossen. Was passiert während seines Flugs (bei dem Sie den Luftwiderstand vernachlässigen können) mit (a) der horizontalen und (b) der vertikalen Komponente seiner Geschwindigkeit? Wie groß sind (c) die horizontale und (d) die vertikale Komponente seiner Beschleunigung während des Anstiegs, des Herabfallens und am höchsten Punkt seiner Flugbahn?

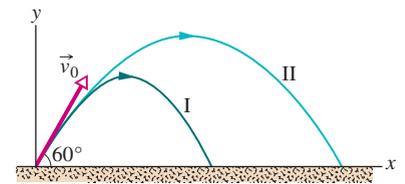
Abbildung 4.13 zeigt ein Rettungsflugzeug, das mit einer Geschwindigkeit von  $55,0 \text{ m/s}$  in einer konstanten Höhe von  $500 \text{ m}$  auf einen Punkt zufliegt, der direkt oberhalb eines im Wasser schwimmenden Schiffbrüchigen liegt. Der Pilot möchte eine Rettungskapsel so abwerfen, dass sie möglichst nahe bei dem Schiffbrüchigen auftrifft.



(a) Wie groß sollte der Winkel  $\varphi$  der Sichtlinie zwischen dem Piloten und dem Schiffbrüchigen in dem Moment sein, in dem der Pilot die Kapsel abwirft?

**LÖSUNG:** Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir die abgeworfene Kapsel als ein Projektil betrachten. Dies bedeutet, dass ihre horizontale und ihre vertikale Bewegung unabhängig sind und getrennt untersucht werden können (die gekrümmte Bahn, die die Kapsel tatsächlich beschreibt, brauchen wir nicht zu bestimmen). Abbildung 4.13 beinhaltet ein Koordinatensystem, dessen Ursprung am Abwurfpunkt liegt. Anhand des Koordinatensystems können wir erkennen, dass der Winkel  $\varphi$  durch

$$\varphi = \arctan \frac{x}{h} \quad (4.27)$$



**Abb. 4.12**

(I) Die Bahn eines geworfenen Balls, wenn man sie unter Berücksichtigung des Luftwiderstands berechnet. (II) Die Bahn, die derselbe Ball im Vakuum beschreiben würde. Sie wurde mit den in diesem Kapitel vorgestellten Methoden berechnet. Die verwendeten Daten finden Sie in Tab. 4.1. (Nach „The Trajectory of a Fly Ball“ von Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, Januar 1985.)

### BEISPIELAUFGABE 4.4

**Abb. 4.13**

Ein Flugzeug wirft eine Rettungskapsel ab; dabei fliegt es mit konstanter Geschwindigkeit in horizontaler Richtung. Während des Falls bleibt die horizontale Geschwindigkeitskomponente der Kapsel konstant gleich der Geschwindigkeit des Flugzeugs.

gegeben ist, wobei  $x$  die horizontale Koordinate des Schiffbrüchigen zum Zeitpunkt des Abwurfs angibt (und damit auch die Koordinate der Kapsel in dem Moment, in dem sie das Wasser berührt) und  $h$  die Flughöhe des Flugzeugs bezeichnet. Diese Höhe ist gleich 500 m; also benötigen wir nur noch  $x$ , um  $\varphi$  ermitteln zu können.  $x$  sollten wir anhand von Gl. 4.21 herausfinden können:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0) t. \quad (4.28)$$

Wir wissen, dass  $x_0 = 0$  ist, da der Ursprung des Koordinatensystems auf den Abwurfpunkt gelegt wurde. Da die Kapsel nur fallen gelassen und nicht abgeschossen wird, ist ihre Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  gleich der Geschwindigkeit des Flugzeugs. Also wissen wir ebenfalls, dass die Anfangsgeschwindigkeit einen Betrag von  $v_0 = 55,0$  m/s und einen Winkel von  $\theta_0 = 0^\circ$  (relativ zur positiven Richtung der  $x$ -Achse) besitzt. Wir kennen jedoch die Zeit  $t$  nicht, welche die Kapsel vom Flugzeug bis zum Schiffbrüchigen braucht.

Um  $t$  zu bestimmen, betrachten wir zunächst die senkrechte Bewegung und dabei speziell Gl. 4.22:

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4.29)$$

Hier ist die vertikale Verschiebung  $y - y_0$  der Kapsel gleich  $-500$  m (das negative Vorzeichen zeigt an, dass die Kapsel sich nach unten bewegt). Einsetzen der bekannten Werte in Gl. 4.29 ergibt dann

$$-500 \text{ m} = (55,0 \text{ m/s}) (\sin 0^\circ) t - \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) t^2.$$

Indem wir nach  $t$  auflösen, erhalten wir  $t = 10,1$  s. Einsetzen in Gl. 4.28 liefert nun

$$x - 0 = (55,0 \text{ m/s}) (\cos 0^\circ) (10,0 \text{ s})$$

beziehungsweise

$$x = 555,5 \text{ m}.$$

Damit erhalten wir mit Gl. 4.27 das Ergebnis

$$\varphi = \arctan \frac{555,5 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 48^\circ.$$

**(b)** Wie lautet die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Kapsel in dem Moment, in dem die Kapsel im Wasser auftrifft, in Einheitsvektoren- bzw. Betrag-Winkel-Schreibweise?

**LÖSUNG:** Auch hier hilft uns die **LÖSUNGSDIEE**, dass die horizontale und die vertikale Bewegung der Kapsel während des Falls voneinander unabhängig sind. Insbesondere sind die horizontale und die vertikale Komponente der Geschwindigkeit der Kapsel voneinander unabhängig.

Die zweite **LÖSUNGSDIEE** ist, dass sich die waagerechte Komponente der Geschwindigkeit  $v_x$  nicht verändert, sondern konstant gleich ihrem Anfangswert  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$  ist, da die Kapsel keiner horizontalen Beschleunigung unterliegt. In dem Moment, in dem die Kapsel die Wasseroberfläche erreicht, ist also

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (55,0 \text{ m/s}) (\cos 0^\circ) = 55,0 \text{ m/s}.$$

Eine dritte **LÖSUNGSDIEE** ist, dass sich die vertikale Komponente der Geschwindigkeit  $v_y$  verändert und nicht gleich ihrem Anfangswert  $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$  bleibt, da die Kapsel einer senkrechten Beschleunigung unterliegt. Nutzen wir Gl. 4.23 und die bekannte Fallzeit  $t = 10,1$  s der Kapsel, so erhalten wir für den Augenblick, in dem die Kapsel die Wasseroberfläche erreicht:

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \theta_0 - g t \\ &= (55,0 \text{ m/s}) (\sin 0^\circ) - (9,8 \text{ m/s}^2) (10,1 \text{ s}) = -99,0 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

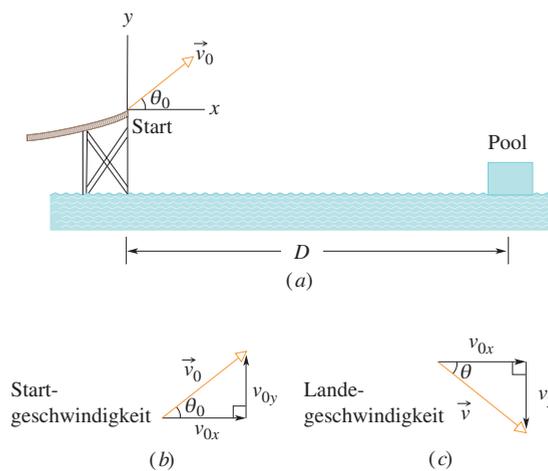
Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Kapsel das Wasser erreicht, besitzt sie also die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = (55,0 \text{ m/s}) \vec{e}_x - (99,0 \text{ m/s}) \vec{e}_y .$$

Mithilfe von Gl. 3.6 bzw. eines vektorfähigen Taschenrechners erhalten wir für den Betrag und den Winkel von  $\vec{v}$

$$v = 113 \text{ m/s} \quad \text{und} \quad \theta = -61^\circ .$$

Ein dramatisches (aber komplett fiktives) Webvideo zeigt einen Mann, wie er eine lange Wasserrutsche hinunterrutscht, dann in die Luft geschleudert wird und schließlich in einem Wasserbecken landet. Wir wollen einen solchen Flug auf der Grundlage sinnvoller Annahmen untersuchen, um herauszufinden, mit welcher Geschwindigkeit der Mann auf dem Wasser aufschlagen würde. Abbildung 4.14a zeigt die Startrampe und die Landestelle sowie ein Koordinatensystem, dessen Ursprung wir bequemerweise auf die Startrampe gelegt haben. Auf dem Video können wir die horizontale Flugstrecke zu  $D = 20,0 \text{ m}$  sowie die Flugdauer zu  $t = 2,50 \text{ s}$  abschätzen; der Abflugwinkel beträgt  $\theta_0 = 40,0^\circ$ . Welchen Betrag hat die Geschwindigkeit des Mannes beim Start und bei der Landung?



#### BEISPIELAUFGABE 4.5

Abb. 4.14

(a) Die Wasserrutsche mit Rampe für den Start und der Pool für die Landung. (b) Geschwindigkeitsvektor beim Start und (c) bei der Landung.

**LÖSUNG:** Die **LÖSUNGSIDEE** ist hier, dass wir die Gleichungen für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung separat auf die horizontale und die vertikale Komponente des Flugs anwenden können. Die vertikale Beschleunigung ist während des gesamten Flugs  $a_y = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$ , während die horizontale Beschleunigung durchgehend null ist.

Wie bei den meisten Analysen von Flugbahnen ist die entscheidende Frage: Wo beginnen? Es spricht nichts dagegen, verschiedene Gleichungen auszuprobieren, um zu sehen, ob wir irgendwie auf die Geschwindigkeiten kommen. Und in diesem Fall haben wir sogar einen Hinweis: Da wir die Gleichungen separat für die vertikale und die horizontale Bewegung anwenden wollen, sollten wir versuchen, auch die horizontalen und vertikalen Komponenten der Geschwindigkeit bei Start und Landung separat zu finden. Anschließend können wir für beide Stellen die zusammengehörenden Komponenten kombinieren, um die Geschwindigkeit zu erhalten.

Da wir die horizontale Verschiebung  $D = 20,0 \text{ m}$  kennen, wollen wir mit der horizontalen Bewegung beginnen. Weil  $a_x = 0$  ist, wissen wir, dass die horizontale Komponente der Geschwindigkeit während des Flugs unverändert bleibt, also immer gleich der horizontalen Komponente  $v_{0x}$  beim Start ist. Diese Komponente, die Flugdauer  $t = 2,50 \text{ s}$  und die horizontale Verschiebung  $x - x_0$  können wir mithilfe von Gl. 2.13 miteinander verknüpfen:

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 .$$

Wenn wir hier  $a_x = 0$  einsetzen, erhalten wir Gl. 4.21. Mit  $x - x_0 = D$  bekommen wir dann

$$20 \text{ m} = v_{0x}(2,50 \text{ s}) + \frac{1}{2}(0)(2,50 \text{ s})^2$$

$$v_{0x} = 8,00 \text{ m/s}.$$

Dies ist die  $x$ -Komponente der Anfangsgeschwindigkeit, wir benötigen aber den Betrag des vollständigen Vektors, wie Abb. 4.14b zeigt, in der die beiden Komponenten die Schenkel eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, dessen Hypotenuse der vollständige Vektor ist. Wir können also eine trigonometrische Beziehung nutzen, um den Betrag der vollen Geschwindigkeit beim Start herauszufinden:

$$\cos \theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0},$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{v_{0x}}{\cos \theta_0} \\ &= \frac{8,00 \text{ m/s}}{\cos 40^\circ} = 10,44 \text{ m/s} \approx 10,4 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Betrag der Geschwindigkeit bei der Landung herausfinden. Die horizontale Komponente kennen wir bereits, da sich ihr anfänglicher Wert von  $8,00 \text{ m/s}$  nicht verändert. Um die vertikale Komponente  $v_y$  zu bestimmen, schreiben wir Gl. 2.9 in der Form

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

und unter Verwendung von Abb. 4.14b

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 + a_y t.$$

Dann setzen wir  $t = 2,50 \text{ s}$  und  $a_y = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$  ein und bekommen

$$\begin{aligned} v_y &= (10,44 \text{ m/s}) \sin(40,0^\circ) - (9,8 \text{ m/s}^2)(2,50 \text{ s}) \\ &= -17,78 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Nachdem wir nun beide Komponenten der Landegeschwindigkeit kennen, verwenden wir Gl. 3.6, um ihren Betrag zu berechnen:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(8,00 \text{ m/s})^2 + (-17,78 \text{ m/s})^2} \\ &= 19,49 \text{ m/s} \approx 19,5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

## 4.5 Die gleichförmige Kreisbewegung



### Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- Die Bahnkurve in einer gleichförmigen Kreisbewegung zu skizzieren und die während der Bewegung auftretenden Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren zu erläutern (Betrag und Richtung),
- Beziehungen zwischen dem Radius der Kreisbahn, der Periode der Bewegung, der Geschwindigkeit des Teilchens und dem Betrag seiner Beschleunigung anzugeben und anzuwenden.

### Schlüsselideen

- Wenn ein Teilchen sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  im Kreis oder entlang eines Kreisbogens mit Radius  $r$  bewegt, spricht man von einer gleichförmigen Kreisbewegung. Ein solches Teilchen erfährt eine Beschleunigung  $\vec{a}$  mit dem konstanten Betrag

$$a = \frac{v^2}{r}$$

in Richtung des Kreismittelpunkts, die als Zentripetalbeschleunigung bezeichnet wird.

Zur Vollendung eines vollständigen Umlaufs benötigt das Teilchen die Zeit

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

die als Periode der Kreisbewegung bezeichnet wird.

#### 4.5.1 Konstanter Betrag, variable Richtung

Ein Teilchen führt eine **gleichförmige Kreisbewegung** aus, wenn es sich mit konstantem, d. h. gleichförmigem Geschwindigkeitsbetrag auf einem Kreis oder einem Kreisbogen bewegt. Obwohl sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert, wird das Teilchen *beschleunigt*. Dies mag auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen, da wir eine Beschleunigung meist mit einer Vergrößerung oder Verkleinerung des Geschwindigkeitsbetrags in Verbindung bringen. Tatsächlich ist die Geschwindigkeit jedoch ein Vektor, kein Skalar. Wenn eine Geschwindigkeit also nicht ihren Betrag, sondern nur ihre Richtung verändert, so ist dennoch eine Beschleunigung im Spiel – und genau dies ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung der Fall.

Abbildung 4.15 verdeutlicht die Beziehung zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und dem Beschleunigungsvektor während verschiedener Phasen einer gleichförmigen Kreisbewegung. Während des Ablaufs der Bewegung ist der Betrag beider Vektoren konstant, ihre Richtung ändert sich jedoch kontinuierlich, da die Geschwindigkeit immer in Bewegungsrichtung entlang der Tangente an die Kreisbahn zeigt. Die Beschleunigung ist immer auf den Mittelpunkt des Kreises gerichtet. Deshalb wird die Beschleunigung in der gleichförmigen Kreisbewegung auch **Zentripetalbeschleunigung** genannt (was so viel bedeutet wie „den Mittelpunkt suchende“ Beschleunigung). Wie wir gleich beweisen werden, ist der Betrag dieser Beschleunigung  $\vec{a}$  gleich

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (\text{Zentripetalbeschleunigung}) \quad (4.30)$$

wobei  $r$  der Radius der Kreisbahn und  $v$  der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Während dieser Beschleunigung bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag legt das Teilchen den Umfang des Kreises (welcher der Strecke  $2\pi r$  entspricht) in der Zeit  $T$  zurück mit

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (\text{Periode}) \quad (4.31)$$

$T$  wird die *Periode* der Bewegung genannt. Im Allgemeinen bezeichnet man damit die Zeit, die ein Teilchen benötigt, um eine geschlossene Bahn genau einmal zu durchlaufen.

#### 4.5.2 Beweis von Gleichung 4.32

Um den Betrag und die Richtung der Beschleunigung bei einer gleichförmigen Kreisbewegung zu bestimmen, betrachten wir Gl. 4.19. In Abb. 4.16a bewegt sich

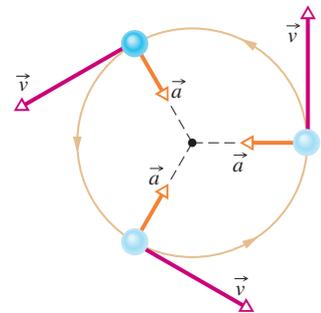
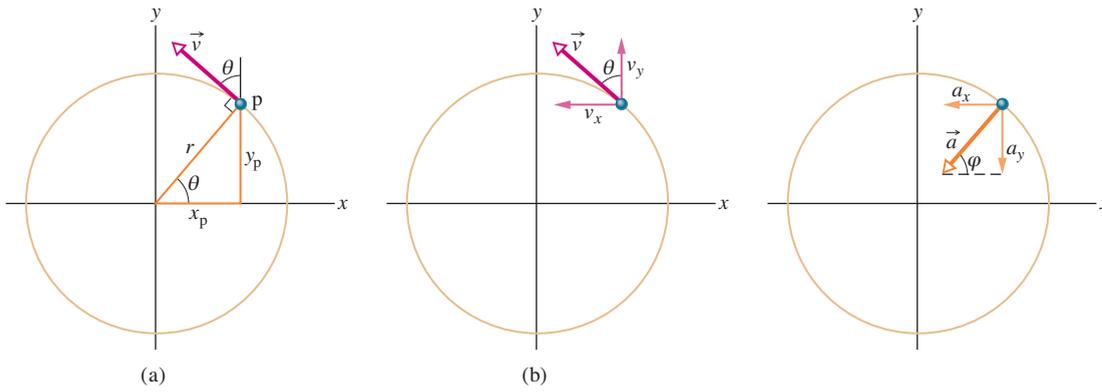


Abb. 4.15 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren eines Teilchens, das gegen den Uhrzeigersinn eine gleichförmige Kreisbewegung absolviert. Geschwindigkeit und Beschleunigung besitzen einen konstanten Betrag, ändern jedoch kontinuierlich ihre Richtung.



**Abb. 4.16** Das Teilchen p bewegt sich im Gegenuhrzeigersinn gleichförmig im Kreis. (a) Seine Position und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zu einem bestimmten Zeitpunkt. (b) Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und ihre Komponenten. (c) Die Beschleunigung  $\vec{a}$  des Teilchens und ihre Komponenten.

das Teilchen bzw. Partikel p mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag  $v$  entlang einer Kreisbahn mit Radius  $r$ . Zu dem dargestellten Zeitpunkt besitzt p die Koordinaten  $x_p$  und  $y_p$ .

In Abschnitt 4.2 hatten wir gezeigt, dass die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  eines bewegten Teilchens immer entlang der Tangente an die Bahnkurve des Teilchens am momentanen Ort des Teilchens zeigt. In Abb. 4.16a bedeutet dies, dass  $\vec{v}$  senkrecht auf dem Radius  $r$  steht, der zum Ort des Teilchens führt. Dann ist der Winkel  $\theta$ , den  $\vec{v}$  am Ort von p mit der Vertikalen bildet, gleich dem Winkel  $\theta$  zwischen dem Radius  $r$  und der  $x$ -Achse.

Die skalaren Komponenten von  $\vec{v}$  sind in Abb. 4.16b dargestellt. Mit ihnen können wir die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in der Form

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = (-v \sin \theta) \vec{e}_x + (v \cos \theta) \vec{e}_y \quad (4.32)$$

schreiben. Indem wir das rechtwinklige Dreieck aus Abb. 4.16a nutzen, können wir  $\sin \theta$  durch  $y_p/r$  und  $\cos \theta$  durch  $x_p/r$  ersetzen und erhalten damit

$$\vec{v} = \left(-\frac{v}{r} y_p\right) \vec{e}_x + \left(\frac{v}{r} x_p\right) \vec{e}_y. \quad (4.33)$$

Um die Beschleunigung  $\vec{a}$  des Teilchens p zu ermitteln, müssen wir diese Gleichung nach der Zeit ableiten. Da sich der Geschwindigkeitsbetrag  $v$  und der Radius  $r$  im Lauf der Zeit nicht ändern, ergibt dies

$$= \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt}\right) \vec{e}_y. \quad (4.34)$$

Beachten Sie nun, dass die Rate  $dy_p/dt$ , mit der sich  $y_p$  verändert, gleich der Geschwindigkeitskomponenten  $v_y$  ist. Entsprechend ist  $dx_p/dt = v_x$ . Ebenfalls aus Abb. 4.16b sehen wir, dass  $v_x = -v \sin \theta$  und  $v_y = v \cos \theta$ . Einsetzen in Gl. 4.34 liefert:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta\right) \vec{e}_x + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta\right) \vec{e}_y. \quad (4.35)$$

Dieser Vektor und seine Komponenten sind in Abb. 4.16c dargestellt. Mit Gl. 3.6 finden wir, dass der Betrag von  $\vec{a}$  gleich

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r}$$

ist, genau wie wir es beweisen wollten. Um die Richtung von  $\vec{a}$  zu ermitteln, bestimmen wir den in Abb. 4.16c eingezeichneten Winkel  $\varphi$ :

$$\tan \varphi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \tan \theta.$$

Demnach ist  $\varphi = \theta$ , was bedeutet, dass  $\vec{a}$  entlang dem in Abb. 4.16a eingezeichneten Radius  $r$  in Richtung Kreismittelpunkt zeigt, wie wir es beweisen wollten.

**KONTROLLFRAGE 6**

Ein Gegenstand bewege sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag in einer horizontalen  $xy$ -Ebene entlang einer Kreisbahn mit Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. In dem Moment, in dem sich der Gegenstand bei  $x = -2$  m befindet, sei seine Geschwindigkeit gleich  $-(4 \text{ m/s})\vec{e}_y$ . Geben Sie (a) die Geschwindigkeit und (b) die Beschleunigung des Gegenstands am Ort  $y = 2$  m an.

Die Piloten von Kampffjets müssen darauf achten, Kurven nicht zu eng zu fliegen, denn wenn ihr Körper mit dem Kopf in Richtung Kurvenmittelpunkt einer Zentripetalbeschleunigung ausgesetzt ist, nimmt der Blutdruck im Gehirn ab, was zu einer Beeinträchtigung der Gehirnfunktionen führen kann.

Verschiedene Warnsignale vermitteln dem Piloten, wann die Situation kritisch zu werden droht. Bei einer Zentripetalbeschleunigung von  $2g$  oder  $3g$  fühlt sich der Pilot schwer. Bei ungefähr  $4g$  verliert er die Fähigkeit, Farben zu sehen, und sein Sichtfeld reduziert sich auf den sogenannten „Tunnelblick“. Wird diese Beschleunigung beibehalten oder noch verstärkt, verliert der Pilot das Sehvermögen vollständig und wird kurze Zeit später ohnmächtig.

(a) Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung (in Einheiten von  $g$ ) eines Piloten, der ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_A = (400\vec{e}_x + 500\vec{e}_y)$  m/s in einen Kreisbogen fliegt und diesen 24,0 s später mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_E = (-400\vec{e}_x - 500\vec{e}_y)$  m/s wieder verlässt?

**LÖSUNG:** Die **LÖSUNGSDIEE** ist hier, dass es sich um eine gleichförmige Kreisbewegung handelt. Der Pilot spürt daher eine Zentripetalbeschleunigung mit einem Betrag  $a = v^2/R$ , wobei  $R$  der Radius des Kreises ist. Die Zeit für einen vollständigen Umlauf ist nach Gl. 4.33  $T = 2\pi R/v$ .

Da wir den Radius  $R$  nicht kennen, lösen wir Gl. 4.33 nach  $R$  auf und setzen in Gl. 4.32 ein. So erhalten wir

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Um die konstante Geschwindigkeit  $v$  zu bekommen, setzen wir die Komponenten der anfänglichen Geschwindigkeit in Gl. 3.6 ein:

$$v = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (500 \text{ m/s})^2} = 640,31 \text{ m/s}.$$

Die Periode  $T$  erhalten wir nun, indem wir uns klarmachen, dass die Endgeschwindigkeit des Flugzeugs gerade die Umkehrung der Anfangsgeschwindigkeit ist. Mit anderen Worten, das Flugzeug verlässt den Kreis nach genau einer halben Runde und fliegt in einer der ursprünglichen Flugrichtung entgegengesetzten Richtung zurück. Dafür hat er 24,0 s benötigt, für einen vollen Umlauf bräuchte es folglich 48,0 s. Wenn wir das in unsere Gleichung für  $a$  einsetzen, erhalten wir

$$a = \frac{2\pi (640,31 \text{ m/s})}{48,0 \text{ s}} = 83,81 \text{ m/s}^2 \approx 8,6g.$$

**BEISPIELAUFGABE 4.6****4.6 Relativbewegung in einer Dimension****Lernziele**

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- Die Beziehung zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens anzugeben, wenn diese in zwei Bezugssystemen gemessen werden, die sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Achse gegeneinander bewegen.

**Schlüsselideen**

- Wenn sich zwei Bezugssysteme A und B mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, unterscheidet sich die von einem Beobachter im Bezugs-



system A gemessene Geschwindigkeit eines Teilchens bzw. Partikels P in der Regel von der, die ein Beobachter im Bezugssystem B misst. Die beiden gemessenen Geschwindigkeiten hängen über

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

miteinander zusammen, wobei  $\vec{v}_{BA}$  die Geschwindigkeit von B relativ zu A ist. Beobachter in beiden Bezugssystemen messen jedoch dieselbe Beschleunigung des Teilchens:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} .$$

### 4.6.1 Bezugssysteme

Nehmen Sie an, Sie beobachten eine Ente, die mit 30 km/h nach Norden fliegt. Aus Sicht einer zweiten Ente, die neben der ersten herfliegt, ändert die erste Ente ihre Position dagegen nicht (sie befindet sich immer „neben mir“). Mit anderen Worten: Die Geschwindigkeit eines Teilchens hängt vom **Bezugssystem** desjenigen ab, der die Bewegung beobachtet bzw. die Geschwindigkeit misst. In unserem Fall ist ein Bezugssystem durch das physikalische Objekt gegeben, an dem wir unser Koordinatensystem befestigen. Im Alltag ist dies meist der Erdboden. So wird z. B. die Geschwindigkeit, die auf Ihrem Bußgeldbescheid erscheint, immer relativ zum Erdboden gemessen. Die Geschwindigkeit relativ zum Auto vor Ihnen ist eine ganz andere, da sich dies während der Messung relativ zum Erdboden bewegt!

Nehmen wir an, dass Alex (am Ursprung des Bezugssystems A) am Rand der Autobahn hält und zusieht, wie das Auto P (das „Partikel“) vorbeifährt. Barbara (am Ursprung des Bezugssystems B) fährt mit konstanter Geschwindigkeit die Autobahn entlang und beobachtet dabei ebenfalls das Auto P. Wie in Abb. 4.17 gezeigt, messen beide die Position des Autos zu einem bestimmten Zeitpunkt. Aus der Abbildung können wir ablesen, dass

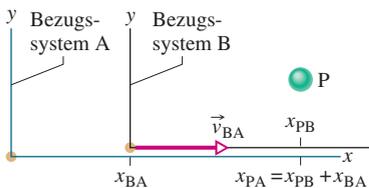


Abb. 4.17

Alex (Bezugssystem A) und Barbara (Bezugssystem B) beobachten das Auto P, während B und P sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten entlang der identisch verlaufenden  $x$ -Achsen der beiden Systeme bewegen. Zu dem dargestellten Zeitpunkt ist  $x_{BA}$  die Koordinate von B im System A. P besitzt im System B die Koordinate  $x_{PB}$  und im System A die Koordinate  $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ .

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA} . \quad (4.36)$$

Diese Gleichung besagt Folgendes: „Die von A gemessene Koordinate  $x_{PA}$  von P ist *gleich* der von B gemessenen Koordinate  $x_{PB}$  von P *plus* der von A gemessenen Koordinate  $x_{BA}$  von B.“ Beachten Sie, wie diese Bedeutung in der Reihenfolge der Indizes zum Ausdruck kommt.

Indem wir Gl. 4.36 nach der Zeit ableiten, erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} (x_{PA}) = \frac{d}{dt} (x_{PB}) + \frac{d}{dt} (x_{BA})$$

oder (da  $v = dx/dt$ )

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} . \quad (4.37)$$

Diese Gleichung bedeutet: „Die von A gemessene Geschwindigkeit  $v_{PA}$  von P ist *gleich* der von B gemessenen Geschwindigkeit  $v_{PB}$  von P *plus* der von A gemessenen Geschwindigkeit  $v_{BA}$  von B.“ Der Term  $v_{BA}$  entspricht der Geschwindigkeit des Bezugssystems B relativ zum Bezugssystem A. (Da die Bewegungen entlang einer einzigen Achse erfolgen, können wir hier in Gl. 4.37 die Komponenten entlang dieser Achse benutzen und die Vektorpfeile weglassen.)

An dieser Stelle beschränken wir unsere Betrachtungen auf Bezugssysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. In unserem Beispiel bedeutet dies, dass Barbara (System B) relativ zu Alex (System A) immer mit derselben Geschwindigkeit  $v_{BA}$  fährt. Das Auto P jedoch (das bewegte Teilchen) kann schneller oder langsamer werden, anhalten oder die Richtung wechseln (d. h. es darf einer Beschleunigung unterliegen).

Um die von Barbara und Alex gemessenen Beschleunigungen von P miteinander zu verknüpfen, leiten wir Gl. 4.37 nach der Zeit ab:

$$\frac{d}{dt} (v_{PA}) = \frac{d}{dt} (v_{PB}) + \frac{d}{dt} (v_{BA}) .$$

Da  $v_{BA}$  konstant ist, ist der letzte Term gleich null und wir erhalten:

$$a_{PA} = a_{PB} . \quad (4.38)$$

Mit anderen Worten:



Bei einem sich bewegenden Teilchen messen Beobachter in verschiedenen Bezugssystemen (die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen) die gleiche Beschleunigung.

#### KONTROLLFRAGE 7

Die nebenstehende Tabelle gibt für Barbara und das Auto P aus Abb. 4.17 in drei unterschiedlichen Situationen verschiedene Geschwindigkeiten an (in km/h). Wie lautet der fehlende Wert in jeder der drei Situationen und wie verändert sich die Entfernung zwischen Barbara und dem Auto P?

	$v_{BA}$	$v_{PA}$	$v_{PB}$
(a)	+50	+50	
(b)	+30		+40
(c)		+60	-20

Für die in Abb. 4.17 dargestellte Situation sei Barbaras Geschwindigkeit relativ zu Alex konstant  $v = 52$  km/h. Das Auto P bewege sich in die negative Richtung der  $x$ -Achse.

(a) Alex misst für das Auto P eine konstante Geschwindigkeit  $v_{PA} = -78$  km/h. Welche Geschwindigkeit misst Barbara?

**LÖSUNG:** Die **LÖSUNGSDIEE** ist hier, dass wir Alex das Bezugssystem A und Barbara ein anderes Bezugssystem B zuweisen. Da sich diese Bezugssysteme relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit entlang der gleichen Achse bewegen, können wir Gl. 4.37 ( $v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$ ) benutzen, um  $v_{PB}$  und  $v_{PA}$  miteinander zu verknüpfen. Wir erhalten

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h} ,$$

folglich ist

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h} .$$

(b) Das Auto bremst relativ zu Alex (und damit zum Erdboden) und hält nach  $t = 10$  s bei konstanter Beschleunigung an. Wie groß ist seine Beschleunigung  $a_{PA}$  relativ zu Alex?

**LÖSUNG:** Die **LÖSUNGSDIEE** ist hier, dass wir die Geschwindigkeiten des Autos P *relativ zu Alex* verwenden müssen, um die Beschleunigung des Autos *relativ zu Alex* herauszufinden. Da die Beschleunigung konstant ist, können wir Gl. 2.9 ( $v = v_0 + at$ ) benutzen, um die Beschleunigung mit der Anfangs- und Endgeschwindigkeit von P in Verbindung zu bringen. Die Anfangsgeschwindigkeit von P relativ zu Alex ist  $v_{PA} = -78$  km/h, die Endgeschwindigkeit ist null. Damit erhalten wir die Beschleunigung

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{3,6 \text{ km/h}} = 2,2 \text{ m/s}^2 .$$

(c) Wie groß ist die Beschleunigung  $a_{PA}$  des Autos relativ zu Barbara während des Bremsvorgangs?

**LÖSUNG:** Hier ist die **LÖSUNGSDIEE**, dass wir die Geschwindigkeiten des Autos P *relativ zu Barbara* verwenden müssen, um die Beschleunigung des Autos *relativ zu Barbara* zu ermitteln. Wir kennen die Anfangsgeschwindigkeit von P relativ zu Barbara aus Teil (a) ( $v_{PB} = -130$  km/h). Die Endgeschwindigkeit von P relativ zu Barbara ist  $-52$  km/h (dies entspricht der Geschwindigkeit des haltenden Fahrzeugs relativ zur sich bewegenden Barbara). Also erhalten wir hier ebenfalls die Beschleunigung:

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52 \text{ km/h} - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{3,6 \text{ km/h}} = 2,2 \text{ m/s}^2 .$$

#### BEISPIELAUFGABE 4.7

Dieses Ergebnis hätten wir voraussagen können: Da sich Alex und Barbara relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen, müssen sie für das Auto beide die gleiche Beschleunigung messen.

## 4.7 Relativbewegung in zwei Dimensionen



### Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieses Abschnitts sollten Sie in der Lage sein, ...

- die Beziehung zwischen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens in zwei Dimensionen aus Sicht zweier Bezugssysteme zu formulieren, die sich mit konstanter Geschwindigkeit aneinander vorbeibewegen.



### Schlüsselideen

- Wenn sich zwei Bezugssysteme A und B mit konstanter Geschwindigkeit aneinander vorbeibewegen, unterscheidet sich die in System A gemessene Geschwindigkeit eines Teilchens bzw. Partikels P in der Regel von der im System B gemessenen. Die beiden gemessenen Geschwindigkeiten hängen über die Beziehung

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

zusammen. Dabei ist  $\vec{v}_{BA}$  die Geschwindigkeit von B relativ zu A. Beide Beobachter bzw. Systeme messen jedoch die gleiche Beschleunigung von P:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} .$$

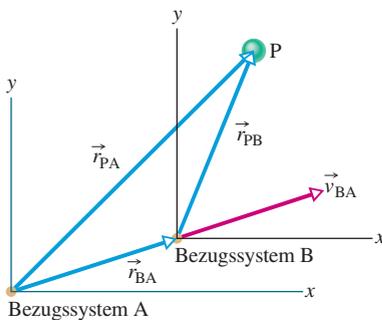


Abb. 4.18

Bezugssystem B besitzt eine konstante zweidimensionale Geschwindigkeit  $\vec{v}_{BA}$  relativ zum Bezugssystem A. Der Ortsvektor von B relativ zu A ist  $\vec{r}_{BA}$ . Die Ortsvektoren des Teilchens P sind  $\vec{r}_{PA}$  relativ zu A und  $\vec{r}_{PB}$  relativ zu B.

### 4.7.1 Mehr als eine Dimension

Wir wenden uns nun der Relativbewegung in zwei (und nach Erweiterung auch in drei) Dimensionen zu. In Abb. 4.18 betrachten unsere beiden Beobachter wieder ein sich bewegendes Teilchen P vom Ursprung ihrer jeweiligen Bezugssysteme A und B aus. Dabei bewegt sich B mit einer konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v}_{BA}$  relativ zu A. (Die Achsen der beiden Bezugssysteme bleiben dabei jedoch parallel.)

Abbildung 4.18 stellt eine Momentaufnahme während der Bewegung dar. Zu diesem Zeitpunkt ist der Ortsvektor von B relativ zu A gleich  $\vec{r}_{BA}$ . Die Ortsvektoren des Teilchens P sind  $\vec{r}_{PA}$  relativ zu A und  $\vec{r}_{PB}$  relativ zu B. Aus der Anordnung dieser drei Ortsvektoren können wir schließen, dass sie über die Gleichung

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \quad (4.39)$$

miteinander verknüpft sind. Indem wir diese Beziehung nach der Zeit ableiten, erhalten wir eine Verbindung zwischen den Geschwindigkeiten  $\vec{v}_{PA}$  und  $\vec{v}_{PB}$  des Teilchens P relativ zu unseren Beobachtern:

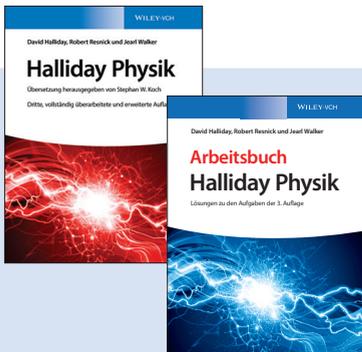
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} . \quad (4.40)$$

Indem wir diese Gleichung wiederum nach der Zeit ableiten, können wir die Beschleunigungen  $\vec{a}_{PA}$  und  $\vec{a}_{PB}$  des Teilchens P relativ zu den beiden Beobachtern miteinander verbinden. Beachten Sie jedoch, dass die Ableitung von  $\vec{v}_{BA}$  nach der Zeit null ist, da  $\vec{v}_{BA}$  konstant ist. Damit erhalten wir also:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} . \quad (4.41)$$

Genau wie bei der eindimensionalen Bewegung gilt auch hier die Regel: Beobachter in verschiedenen Bezugssystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, messen für ein sich bewegendes Teilchen die *gleiche* Beschleunigung.

## Bestellinformationen



 Auch als E-Book erhältlich.

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker

### Halliday Physik

3., vollst. überarb. u. erw. Auflage

2017 ca. 1500 S., ca. 1900 Farbabb.,  
ca. 100 Tab. Gebunden.  
ca. € 79,- ISBN: 978-3-527-41356-0



### Arbeitsbuch Physik

Lösungen zu den Aufgaben  
der 3. Auflage

2017 ca. 750 S., ca. 200 Abb. Broschur.  
ca. € 39,90 ISBN: 978-3-527-41357-7



### Halliday Physik Deluxe

3. Auflage

Lehrbuch und Arbeitsbuch

2017 ca. 2250 S., 2100 Abb., davon 1900  
in Farbe ca. 100 Tab.  
ca. € 109,- ISBN: 978-3-527-41358-4



### Service für Dozenten

Kostenloses Bonusmaterial  
(nicht sofort bei Erscheinen des  
Lehrbuchs verfügbar)

[www.wiley-vch.de/textbooks](http://www.wiley-vch.de/textbooks)

Wiley-VCH  
Postfach 10 11 61  
Tel. +49 (0) 62 01- 60 64 00  
Fax +49 (0) 62 01- 60 61 84  
service@wiley-vch.de

Die €-Preise gelten ausschließlich für Deutsch-  
land und enthalten die gesetzliche MwSt. Die  
Lieferung erfolgt zuzüglich Versandkosten. Es  
gelten die Liefer- und Versandbedingungen des  
Verlages. Irrtum und Preisänderungen vorbe-  
halten. Stand der Daten: 06/17

**Noch mehr moderne Physik, noch bessere Didaktik, noch mehr Beispiele, noch mehr Aufgaben und noch mehr Spaß. Der ideale Begleiter für das Physikstudium und zur Prüfungsvorbereitung!**

- Deckt den gesamten Stoff der einführenden Experimentalphysik-Vorlesungen für Hauptfachstudierende ab.
- Mehrere Kapitel zur besseren Verständlichkeit komplett umgeschrieben, etwa zum Gauß'schen Satz und zum elektrischen Potential.
- Umfangreichere Quantenmechanik-Kapitel behandeln die Schrödinger-Gleichung bis hin zur Reflexion von Materiewellen an Potentialstufen und der Schwarzkörperstrahlung.

**Für die dritte Auflage wurden die Kapitel vollständig überarbeitet und didaktisch neu strukturiert:**

- Modular organisierte Lerninhalte.
- Lernziele, Schlüsselideen und physikalische Motivation zum Einstieg.
- Zusammenfassung der Lerninhalte am Kapitelende.

**Unterstützt das selbstständige Lernen:**

- Rund 300 im Text durchgerechnete Beispiele.
- 250 Verständnis-Checks und 650 Fragen mit Antworten und Ergebnissen im Lehrbuch.
- Mehr als 2500 Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads mit ausführlichen Lösungen im Arbeitsbuch.

**+++ Für ein erfolgreiches Physikstudium +++  
+++ das Lehrbuch, das Arbeitsbuch – und das Deluxe Set +++**

**Aus Rezensionen der Vorauflagen:**

„Halliday Physik ist ein Klassiker.“

**Prof. Dr. Hartmut Zabel, Ruhr-Universität Bochum**

„Das didaktische Konzept des Halliday ist in seiner Form einzigartig.“

**Prof. Dr. Matthias Weidemüller, Universität Heidelberg**

„Der Stoff ist in überdurchschnittlich gelungener Weise didaktisch aufbereitet ... stellt eine Bereicherung des Literaturspektrums dar ...“

**Prof. Dr. Fedor Mitschke, Universität Rostock**