

1

Mathematische Methoden der Elektrodynamik

1.1 Vektor- und Tensoralgebra

Wir wählen im dreidimensionalen Raum ein rechtwinkliges und geradliniges (kartesisches) Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 . Der Raum werde als *Euklidisch* angenommen. Das bedeutet, dass in ihm die Axiome der Euklidischen Geometrie und deren Folgerungen erfüllt sind, die man aus der Schulmathematik kennt. Zum Beispiel berechnet sich das Quadrat des Abstands dl^2 zwischen zwei eng benachbarten Punkten gemäß folgender Beziehung:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (1.1)$$

Neben dem ursprünglichen betrachten wir noch weitere ebensolche Koordinatensysteme, die alle denselben Koordinatenursprung haben, aber gegenüber dem ursprünglichen System gedreht sind (siehe Abb. 1.1).

Als *Skalar* oder *Invariante* bezeichnet man eine Größe, die ihren Wert bei einer Drehung des Koordinatensystems nicht ändert, d.h. sie hat ein und denselben Wert im ursprünglichen und im gedrehten Koordinatensystem:

$$S' = S = \text{inv.} \quad (1.2)$$

So ist insbesondere $dl^2 = dl'^2 = \text{inv.}$

Ein *Vektor* im dreidimensionalen Raum ist durch drei Komponenten V_α ($\alpha = 1, 2, 3$) charakterisiert, die bezüglich jedes der Koordinatensysteme definiert sind und sich bei Drehung derselben nach der Beziehung

$$V'_\alpha = a_{\alpha\beta} V_\beta \quad (1.3)$$

transformieren, wobei über die Größen mit den sich wiederholenden Indizes β von 1 bis 3 zu summieren ist. Die V_β sind die Projektionen des Vektors auf die entsprechenden x_β -Achsen des ursprünglichen Koordinatensystems, die V'_α die Projektionen auf die x'_α -Achsen des gedrehten Koordinatensystems und die Transformationskoeffizienten $a_{\alpha\beta}$ die Kosinus der Winkel zwischen der jeweiligen x_β -Achse des ursprünglichen und der x'_α -Achse des gedrehten Koordinatensystems, die man als Skalarprodukt der Einheitsvektoren in Richtung der entsprechenden Koordinatenachsen schreiben kann:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \quad (1.4)$$

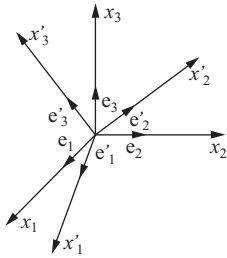


Abb. 1.1 Drehung des Koordinatensystems.

Ein *Tensor zweiter Stufe* im dreidimensionalen Raum ist eine neunkomponentige Größe $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), die in allen Koordinatensystemen definiert ist und sich bei Drehung des Koordinatensystems wie das Produkt der Komponenten zweier Vektoren folgendermaßen transformiert:

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} T_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Analog hat ein Tensor s -ter Stufe s Indizes und transformiert sich wie das Produkt von s Vektorkomponenten:

$$T'_{\beta \dots \kappa} = a_{\beta\mu} \dots a_{\kappa\nu} T_{\mu \dots \nu}. \quad (1.6)$$

Skalare und Vektoren kann man als Tensoren nullter bzw. erster Stufe betrachten.

Eine *Drehmatrix* \hat{a} hat folgende Eigenschaften:

1) Orthogonalität:

$$a_{\alpha\mu} a_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\mu} a_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Für das *Kroneckersymbol* $\delta_{\alpha\beta}$ gilt:

$$\delta_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{für } \alpha = \beta, \quad \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für } \alpha \neq \beta. \quad (1.8)$$

2) Die Determinante der Drehmatrix ist gleich eins:

$$\det \hat{a} \equiv |\hat{a}| \equiv |a_{\mu\nu}| = 1. \quad (1.9)$$

3) Das Produkt zweier Drehmatrizen

$$\hat{c} = \hat{a}\hat{g}, \quad c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu} g_{\mu\beta} \quad (1.10)$$

beschreibt die Drehung \hat{c} eines Koordinatensystems, die sich ergibt, wenn man zuerst eine Drehung mit der Matrix \hat{g} und anschließend eine mit der Matrix \hat{a} durchführt.

4) Die inverse Matrix \hat{a}^{-1} bewirkt die inverse Transformation

$$V_{\beta} = a_{\beta\alpha}^{-1} V'_{\alpha}. \quad (1.11)$$

Sie ist durch die Beziehungen

$$\hat{a}^{-1}\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^{-1} = \hat{1} \quad \text{oder} \quad a_{\alpha\mu}^{-1} a_{\mu\beta} = a_{\alpha\mu} a_{\mu\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.12)$$

definiert. Man erhält sie aus der Ausgangsmatrix als transponierte Matrix, d.h. durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten und umgekehrt:

$$\hat{a}^{-1} = \hat{a}^T, \quad a_{\alpha\beta}^{-1} = \tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \quad (1.13)$$

Während sich Vektoren bei Drehungen immer gemäß Gleichung (1.3) transformieren, können sie sich auf zwei verschiedene Arten bei der Inversion des Koordinatensystems verhalten, bei der die Koordinaten gemäß

$$x'_{\alpha} = -x_{\alpha} \quad (1.14)$$

ihr Vorzeichen umkehren. Die Transformationsmatrix ist hierbei $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. Diejenigen Vektoren, deren Komponenten ebenso wie die Koordinaten x_α bei der Inversion ihr Vorzeichen ändern, nennt man *polare* Vektoren. Vektoren, deren Komponenten bei der Inversion des Koordinatensystems ihr Vorzeichen nicht ändern, nennt man *axiale* oder *Pseudovektoren* (z. B. die Winkelgeschwindigkeit, das Vektorprodukt zweier polarer Vektoren $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ usw.). Diese Definition umfasst auch Tensoren beliebiger Stufe s : Die Komponenten *polarer (echter)* Tensoren werden bei der Inversion mit $(-1)^s$ multipliziert, die Komponenten der *Pseudotensoren* mit $(-1)^{s+1}$.

Ein Tensor wird *symmetrisch (antisymmetrisch)* bezüglich eines Indexpaares α und β genannt, wenn die Komponenten die Bedingungen

$$Q_{\alpha\beta\mu} = Q_{\beta\alpha\mu} \quad (Q_{\alpha\beta\mu} = -Q_{\beta\alpha\mu}) \quad (1.15)$$

erfüllen.

Sehr wichtig für die Anwendung sind die invarianten Einheitstensoren $\delta_{\alpha\beta}$ und $e_{\alpha\beta\lambda}$. Der erstere ist ein polarer, symmetrischer Tensor, dessen Komponenten mit dem Kronecker-Symbol (1.8) übereinstimmen. Der zweite Tensor ist ein bezüglich beliebiger Indexpaare antisymmetrischer Pseudotensor mit $e_{123} = 1$, dessen übrige Komponenten entweder gleich ± 1 oder 0 sind.¹ In beiden Tensoren behalten die Komponenten ihre Werte bei Transformationen gemäß der Gleichung (1.6) in allen Koordinatensystemen bei.

Die Summe zweier Tensoren gleicher Stufe ist ein dritter Tensor derselben Stufe mit den Komponenten

$$Q_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}. \quad (1.16)$$

Aus den direkten Produkten der Komponenten zweier Vektoren (ohne Summation) ergibt sich ein Tensor, dessen Stufe gleich der Summe der Stufen der Tensor-Faktoren ist, z. B.

$$Q_{\alpha\beta\lambda} = T_{\alpha\beta}V_\lambda, \quad (1.17)$$

wobei $Q_{\alpha\beta\lambda}$ ein Tensor dritter Stufe ist.

Unter der *Kontraktion eines Tensors*² versteht man die Erzeugung eines neuen Tensors, dessen Komponenten dadurch gebildet werden, dass man die Komponenten mit zwei gleichen Indizes auswählt und über diese summiert. Zum Beispiel ist $Q_{\alpha\beta\beta} = A_\alpha$ ein Vektor und $Q_{\alpha\beta\alpha} = B_\beta$ ein anderer Vektor. Im Ergebnis der Kontraktion verringert sich die Stufe des Tensors um 2. So ist insbesondere

$$S = T_{\alpha\alpha} = \text{inv} \quad (1.18)$$

ein Skalar. Ein komplizierteres Beispiel einer Kontraktion erhalten wir, wenn wir die Komponenten des Vektorproduktes $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ mit Hilfe des antisymmetrischen Einheitstensors $e_{\alpha\mu\nu}$ bilden:

$$C_\alpha = e_{\alpha\mu\nu}A_\mu B_\nu. \quad (1.19)$$

Dabei ergibt sich der Vektor C_α als Resultat der Kontraktion des Tensors $e_{\alpha\mu\nu}$ mit dem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe $(A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu)/2$.

Beim Aufschreiben von Gleichungen zwischen Tensoren muss man beachten, dass sie die gleiche Dimensionalität haben: Man kann nur Tensoren gleicher Stufen gleichsetzen. Das bedeutet, dass die Zahl der freien Indizes (über die nicht summiert wird) auf der linken und

¹ Das ist der so genannte Levi-Civita-Tensor. (Anm. d. Übers.)

² im deutschen Sprachgebrauch auch *Verjüngung eines Tensors* genannt (Anm. d. Übers.)

der rechten Seite einer Gleichung identisch sein muss. Die Zahl der „stummen“ Indizes, über die summiert wird, kann rechts und links beliebig sein.

Beispiel 1.1: Man bringe den reellen ($S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^*$) symmetrischen ($S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$) Tensor zweiter Stufe in Diagonalform, d.h. man finde ein solches Achsensystem, in dem nur die Diagonalkomponenten des Tensors von Null verschieden sind.

Lösung: Wir stellen ein algebraisches Gleichungssystem

$$S_{\alpha\beta}n_\beta = Sn_\alpha, \quad \text{und} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.20)$$

zur Bestimmung der Eigenvektoren n_α und der Hauptwerte S des betrachteten Tensors auf. Die Eigenvektoren werden wir auf eins normieren: $n_{\{\alpha\}}^* n_\alpha = 1$. Aus Gleichung (1.20) und den Eigenschaften des Tensors $S_{\alpha\beta}$ finden wir, dass die Eigenwerte S reelle Skalare sind: $S = n_\alpha^* S_{\alpha\beta} n_\beta = S^*$. Sie werden aus der Bedingung berechnet, dass die Determinante des Gleichungssystems (1.20) gleich Null ist:

$$|S_{\alpha\beta} - S\delta_{\alpha\beta}| = 0. \quad (1.21)$$

Das ist eine algebraische Gleichung dritten Grades in S , die drei reelle Lösungen $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ hat. Im allgemeinen Fall sind diese voneinander verschieden. Jedoch sind auch mehrfache Lösungen entweder in der Form $S^{(1)} = S^{(2)} \neq S^{(3)}$ oder $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)}$ möglich. Hierbei sind die Indizes in Klammern keine Tensorindizes!

Wenn wir im Falle verschiedener Lösungen die gefundenen Werte S der Reihe nach in das Gleichungssystem (1.20) einsetzen, drücken wir zwei Projektionen jedes der Eigenvektoren $n_\alpha^{(1)} \neq n_\alpha^{(2)} \neq n_\alpha^{(3)}$ durch die dritte aus, die durch die Normierungsbedingung bestimmt wird. Alle Eigenvektoren sind reell, weil die Koeffizienten des Gleichungssystems (1.20) reell sind. Sie stehen paarweise senkrecht aufeinander, was aus demselben Gleichungssystem folgt, z. B. $(S^{(1)} - S^{(2)})(\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(2)}) = 0$ und in analoger Weise für die anderen Paare. Verwendet man die Eigenvektoren als Einheitsvektoren eines Koordinatensystems (sie bestimmen die Hauptachsen des Tensors), so findet man aus (1.20) die Gestalt des Tensors in diesem Achsensystem:

$$\hat{S}' = \begin{pmatrix} S^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & S^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & S^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Im Falle zweifacher Lösungen $S^{(1)} = S^{(2)}$ ist die Bestimmung der Eigenvektoren $\mathbf{n}^{(1)}$ und $\mathbf{n}^{(2)}$ nicht eindeutig – in der Ebene senkrecht zu $\mathbf{n}^{(3)}$ kann man ein beliebiges Paar senkrecht aufeinander stehender Richtungen auswählen. Wenn alle drei Lösungen gleich sind, kann man beliebige drei zueinander senkrechte Richtungen als Hauptachsen wählen. ■

Empfohlene Literatur: Batygin und Toptygin (2005); Arfken et al. (2012); Borisenko und Tarapow (1966); Kotschin (2017); Lee (1965); Mathews and Walker (1970)

Aufgaben

1.1 Beweisen Sie die Gleichung (1.9). Wie ändert sich die Determinante der Transformationsmatrix, wenn zusätzlich zur Drehung eine Inversion der Koordinatenachsen durchgeführt wird?

1.2 Beweisen Sie die Gleichungen $\delta'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und $e'_{\alpha\mu\nu} = e_{\alpha\mu\nu}$ bei beliebiger Drehung des Koordinatensystems.

1.3 Wie lautet die Transformationsregel der Komponenten eines Pseudotensors s -ter Stufe, die zusätzlich zu den Drehungen auch Spiegelungen der Koordinatenachsen beschreibt?

1.4 Stellen Sie einen beliebigen Tensor zweiter Stufe $T_{\alpha\beta}$ in Form einer Summe aus einem symmetrischen ($S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$) und einem antisymmetrischen ($A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$) Tensor dar. Überzeugen Sie sich von der Eindeutigkeit der Darstellung.

1.5 Stellen Sie einen beliebigen komplexen Tensor zweiter Stufe $T_{\alpha\beta}$ in Form einer Summe aus einem Hermiteschen ($S_{\alpha\beta}^h = S_{\beta\alpha}^{h*}$) und einem antihermiteschen ($A_{\alpha\beta}^{ah} = -A_{\beta\alpha}^{ah*}$) Tensor dar. Überzeugen Sie sich von der Eindeutigkeit der Darstellung.

1.6 Zeigen Sie, dass

- die Kontraktion eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors gleich Null ist: $S_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} = 0$;
- die Kontraktion zweier Hermitescher oder zweier antihermitescher Tensoren zweiter Stufe eine reelle Zahl ergibt;
- die Kontraktion eines Hermiteschen und eines antihermiteschen Tensors zweiter Stufe eine rein imaginäre Zahl ergibt.

1.7 Zeigen Sie, dass die Symmetrie eines Tensors eine Eigenschaft ist, die invariant unter Rotationen ist, d. h. ein Tensor, der in irgend einem Koordinatensystem symmetrisch (antisymmetrisch) in einem Paar von Indizes ist, bleibt symmetrisch (antisymmetrisch) in diesen Indizes in allen Koordinatensystemen, die gegenüber dem Ausgangssystem gedreht sind.

1.8 Zeigen Sie unter Verwendung der Transformationsregeln (1.2)-(1.6) für Tensoren, dass

- A_α ein Vektor (Pseudovektor) ist, wenn $A_\alpha B_\alpha = \text{inv}$ und B_α ein Pseudovektor (Vektor) ist;
- A_α ein Vektor ist, wenn in jedem Koordinatensystem $A_\alpha = T_{\alpha\beta}B_\beta$ ist, wobei $T_{\alpha\beta}$ ein Tensor zweiter Stufe ist und B_α ein Vektor;
- $T_{\alpha\alpha} = \text{inv}$, wobei $T_{\alpha\beta}$ ein Tensor zweiter Stufe ist;
- $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ein Tensor zweiter Stufe ist, wenn A_α und B_α Vektoren sind und in allen Koordinatensystemen $A_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}B_\beta$ ist. Was wird aus $\varepsilon_{\alpha\beta}$, wenn A_α ein Vektor und B_α ein Pseudovektor ist? Was wird aus $\varepsilon_{\alpha\beta}$, wenn sowohl A_α als auch B_α Pseudovektoren sind?
- $A_{\alpha\beta\lambda}B_{\alpha\beta}$ ein Vektor ist, wenn $A_{\alpha\beta\lambda}$ und $B_{\alpha\beta}$ Tensoren dritter bzw. zweiter Stufe sind;
- $T_{\alpha\beta}P_{\alpha\beta}$ ein Pseudoskalar ist, wenn $T_{\alpha\beta}$ und $P_{\alpha\beta}$ ein Tensor bzw. ein Pseudotensor zweiter Stufe sind.

1.9 Bestimmen Sie die Transformationsregel der Gesamtheit der Volumenintegrale $T_{\alpha\beta} = \int x_\alpha x_\beta dV$ bei Drehung und bei Spiegelung (x_α und x_β sind kartesische Koordinaten).

1.10 Zeigen Sie, dass man die Komponenten eines (polaren oder axialen) antisymmetrischen Tensors zweiter Stufe $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ mit den Komponenten eines bestimmten (polaren oder axialen) Vektors C_α identifizieren kann, da sie sich bei Drehungen und Spiegelungen

in der gleichen Weise transformieren. In diesem Falle nennt man C_α den zum Tensor $A_{\alpha\beta}$ dualen Vektor (und umgekehrt: der antisymmetrische Tensor $A_{\alpha\beta}$ ist dual zum Vektor C_α).

1.11 Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\alpha = e_{\alpha\beta\lambda} A_\beta B_\lambda,$

b) $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C} = e_{\alpha\beta\lambda} A_\alpha B_\beta C_\lambda = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$

Wie transformieren sich das Vektorprodukt, das doppelte Vektorprodukt und das Spatprodukt bei Drehung und Spiegelung, wenn alle drei Vektoren polar sind?

1.12 Zeigen Sie, dass wenn in einem bestimmten Koordinatensystem die entsprechenden Komponenten zweier Vektoren proportional zueinander sind, so sind sie auch in jedem beliebigen anderen Koordinatensystem proportional. Diese Vektoren sind parallel.

1.13 Die Fläche eines aus den sehr kleinen Vektoren $d\mathbf{r}$ und $d\mathbf{r}'$ gebildeten infinitesimalen Parallelogramms werde durch einen Vektor $d\mathbf{S}$ repräsentiert, der entlang der Flächennormale des Parallelogramms gerichtet ist und dessen Absolutbetrag gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms ist. Schreiben Sie diesen Vektor in Tensorschreibweise.

1.14 Schreiben Sie das Volumen dV des infinitesimalen Parallelepipeds, das aus den sehr kleinen Vektoren $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$, $d\mathbf{r}''$ gebildet wird, in Tensorschreibweise. Wie transformiert es sich bei Drehung und Spiegelung?

1.15 Beweisen Sie folgende Identitäten:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = 0,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0,$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{D}])\mathbf{C} + (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}])\mathbf{D} = 0,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}])\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{D}])\mathbf{A} = 0.$$

1.16 In einem sphärischen Koordinatensystem werden die beiden Richtungen \mathbf{n} und \mathbf{n}' durch die Winkel ϑ, α und ϑ', α' bestimmt. Finden Sie den Kosinus des Winkels θ zwischen diesen beiden Richtungen.

1.17 In bestimmten Fällen kann es günstiger sein, anstatt der kartesischen Komponenten eines Vektors A_x, A_y, A_z seine zyklischen Komponenten zu betrachten, die durch folgende Formeln definiert werden:

$$A_{\pm 1} = \frac{\mp (A_x \pm iA_y)}{\sqrt{2}}, \quad A_0 = A_z.$$

Drücken Sie das Skalarprodukt und das Vektorprodukt zweier Vektoren durch ihre zyklischen Komponenten aus. Drücken Sie weiterhin die zyklischen Komponenten des Ortsvektors durch die Legendreschen Kugelfunktionen³ aus.

³ Die Legendreschen Kugelfunktionen werden in Abschnitt 1.3 definiert.

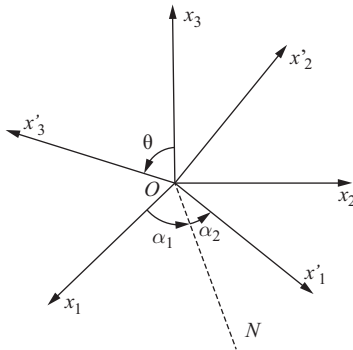


Abb. 1.2 Beschreibung der Drehung eines kartesischen Koordinatensystems durch Eulersche Winkel.

1.18 Wie lautet die Transformationsmatrix \hat{g} der Vektorkomponenten bei Drehung eines kartesischen Koordinatensystems um die Ox_3 -Achse um den Winkel α ?

1.19 Bilden Sie die Transformationsmatrizen der Einheitsvektoren beim Übergang von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten und umgekehrt und beim Übergang von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten und zurück.

1.20 Finden Sie die Transformationsmatrix \hat{g} der Vektorkomponenten bei einer Drehung des Koordinatensystems, die durch die Eulerschen Winkel α_1 , θ und α_2 bestimmt ist (siehe Abb. 1.2), durch Multiplikation der Matrizen, die den Drehungen um den Winkel α_1 um die Ox_3 -Achse, um den Winkel θ um die Knotenlinie ON und um den Winkel α_2 um die Ox'_3 -Achse entsprechen.

1.21 Finden Sie die Transformationsmatrix $\hat{D}(\alpha_1\theta\alpha_2)$ für die zyklischen Vektorkomponenten (siehe Aufgabe 1.17) bei einer Drehung des Koordinatensystems, die durch die Eulerschen Winkel (Abb. 1.2) beschrieben wird.

1.22 Zeigen Sie, dass die Matrix einer infinitesimal kleinen Drehung in der Form $\hat{a} = 1 + \hat{\epsilon}$ geschrieben werden kann, wobei $\hat{\epsilon}$ eine antisymmetrische Matrix ist ($\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$). Erklären Sie die geometrische Bedeutung der $\epsilon_{\alpha\beta}$.

1.23 Ist es möglich, durch Drehung des Koordinatensystems im physikalisch dreidimensionalen Raum einen beliebigen reellen Tensor zweiter Stufe ($T_{\alpha\beta} \neq T_{\beta\alpha}$) in Diagonalf orm zu überführen? Ist es mit einem Hermiteschen Tensor zweiter Stufe ($T_{\alpha\beta}^h = T_{\beta\alpha}^{h*}$) möglich?

1.24 Stellen Sie einen reellen symmetrischen Tensor zweiter Stufe $S_{\alpha\beta}$ in einem beliebigen Koordinatensystem durch seine Hauptwerte $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ und $S^{(3)}$ und die Einheitsvektoren $n_\alpha^{(i)}$ der Hauptachsen dar.

1.25 Bilden Sie mit Hilfe der charakteristischen Gleichung (1.21) Invarianten bezüglich Drehungen aus den Komponenten eines beliebigen Tensors zweiter Stufe $T_{\alpha\beta}$.

1.26 Finden Sie unter Verwendung der Entwicklungsformel für Determinanten nach den Elementen einer Zeile oder einer Spalte die Komponenten des inversen Tensors $T_{\alpha\beta}^{-1}$. Seine Definition entspricht der Definition (1.12) einer inversen Matrix. Unter welcher Bedingung existiert ein inverser Tensor?

1.27 Beweisen Sie folgende Identitäten:

a) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6$;

b) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\sigma} = 2\delta_{\gamma\sigma}$;

c) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\nu\sigma} = \delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\beta\nu} & \delta_{\gamma\nu} \\ \delta_{\beta\sigma} & \delta_{\gamma\sigma} \end{vmatrix}$;

d) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\sigma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\sigma} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu} -$
 $-\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\gamma\mu} \\ \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\gamma\nu} \\ \delta_{\alpha\sigma} & \delta_{\beta\sigma} & \delta_{\gamma\sigma} \end{vmatrix}$.

Beweisen Sie mit Hilfe der dritten Gleichung die Formel aus der Vektoralgebra

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

1.28 Schreiben Sie in invarianter Vektorform:

a) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\sigma\kappa}e_{\gamma\nu\epsilon}e_{\kappa\omega\epsilon}A_{\beta}A_{\sigma}B_{\nu}C_{\omega}$;

b) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\rho\sigma\kappa}e_{\gamma\nu\epsilon}e_{\kappa\omega\epsilon}A_{\sigma}A_{\beta}B_{\rho}B_{\alpha}C_{\omega}C_{\nu}$.

1.29 Beweisen Sie die Identität

$$T_{\alpha\beta}A_{\alpha}B_{\beta} - T_{\alpha\beta}A_{\beta}B_{\alpha} = 2\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

wobei $T_{\alpha\beta}$ ein beliebiger Tensor zweiter Stufe ist. \mathbf{A} und \mathbf{B} sind Vektoren. \mathbf{C} ist der duale Vektor des antisymmetrischen Teils des Tensors $T_{\alpha\beta}$.

1.30 Stellen Sie das Produkt $(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))(\mathbf{A}' \cdot (\mathbf{B}' \times \mathbf{C}'))$ als Summe von Termen dar, die nur Skalarprodukte von Vektoren enthalten.

Hinweis: Wenden Sie das Theorem zur Multiplikation von Determinanten an oder nutzen Sie den Pseudotensor $e_{\alpha\beta\gamma}$.

1.31 Zeigen Sie, dass der einzige Vektor, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind, der Nullvektor ist; dass jeder Tensor zweiter Stufe, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind, proportional $\delta_{\alpha\beta}$ ist; dass jeder Tensor dritter Stufe, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind, proportional $e_{\alpha\beta\gamma}$ ist und dass jeder Tensor vierter Stufe, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind, proportional $(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})$ ist.

1.32 Es sei \mathbf{n} ein Einheitsvektor, dessen Richtungen im Raum alle gleichwahrscheinlich sind. Bestimmen Sie die Mittelwerte seiner Komponenten n_{α} und der Produkte $n_{\alpha}n_{\beta}$, $n_{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma}$ und $n_{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma}n_{\nu}$, mit Hilfe der Transformationseigenschaften der gesuchten Größen.

1.33 Bestimmen Sie die Mittelwerte der folgenden Größen: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{n})^2$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n})$ und $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})$, wobei über alle Richtungen gemittelt wird und \mathbf{n} ein Einheitsvektor ist, dessen Richtungen alle gleichwahrscheinlich sind und \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und \mathbf{d} konstante Vektoren sind.

Hinweis: Benutzen Sie das Resultat der vorigen Aufgabe.

1.34 Bilden Sie alle möglichen unabhängigen Invarianten aus den polaren Vektoren \mathbf{n} , \mathbf{n}' und dem Pseudovektor \mathbf{l} .

1.35 Welche unabhängigen Pseudoskalare kann man aus zwei polaren Vektoren \mathbf{n}, \mathbf{n}' und dem Pseudovektor \mathbf{l} bilden und welche aus den drei polaren Vektoren $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ und \mathbf{n}_3 ?

1.2 Vektoranalysis

Die meisten differentiellen Operationen der Vektoranalysis kann man durch den Nablaoperator⁴ ∇ ausdrücken. Insbesondere erhalten wir

$$\text{grad } S = \nabla S, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \Delta = \nabla^2. \quad (1.23)$$

Der letzte Operator wird Laplaceoperator genannt. In kartesischen Koordinaten hat der Operator ∇ die Form

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (1.24)$$

und dementsprechend der Laplaceoperator Δ die Form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \quad (1.25)$$

In krummlinigen Koordinatensystemen wird die Form des Operators ∇ komplizierter, und die Einheitsvektoren \mathbf{e}_α hängen im Gegensatz zum kartesischen Koordinatensystem von den Koordinaten ab.

In einem beliebigen orthogonalen System mit den Koordinaten q_1, q_2 und q_3 wird das Quadrat eines Längenelementes durch die Formel

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 \quad (1.26)$$

ausgedrückt und das Volumenelement durch die Formel

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \quad (1.27)$$

wobei die

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (1.28)$$

Funktionen der Koordinaten sind (Lamésche Koeffizienten). Die verschiedenen differentiellen Vektoroperationen lassen sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\text{grad } S = \frac{1}{h_1} \frac{\partial S}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial S}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial S}{\partial q_3} \mathbf{e}_3; \quad (1.29)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]; \quad (1.30)$$

$$\Delta S = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial S}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial S}{\partial q_3} \right) \right]; \quad (1.31)$$

⁴ Im russischen Original als Hamiltonscher Vektordifferentialoperator bezeichnet. (Anm. d. Übers.)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{e}_1 + \\
&+ \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{e}_2 + \\
&+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Hierbei sind \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 die orthogonalen Einheitsvektoren des entsprechenden Koordinatensystems.

Im Zylinderkoordinatensystem r , α und z gelten

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \alpha, & y &= r \sin \alpha, & z &= z; \\
h_r &= 1, & h_\alpha &= r, & h_z &= 1;
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{e}_z; \tag{1.34}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{1.35}$$

$$\Delta S = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}; \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \\
&+ \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\alpha + \\
&+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Im Kugelkoordinatensystem r , ϑ und α erhalten wir

$$\begin{aligned}
x &= r \sin \vartheta \cos \alpha, & y &= r \sin \vartheta \sin \alpha, & z &= r \cos \vartheta; \\
h_r &= 1, & h_\vartheta &= r, & h_\alpha &= r \sin \vartheta;
\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial S}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha; \tag{1.39}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \tag{1.40}$$

$$\Delta S = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}; \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \\
&+ \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) \right] \mathbf{e}_\vartheta + \\
&+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\alpha.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Für beliebige \mathbf{A} und S geltend die Identitäten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} S &\equiv 0, & \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &\equiv 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} S &\equiv \Delta S, & \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &\equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Die folgenden grundlegenden Integralsätze gestatten es, Volumen-, Oberflächen- und Kurvenintegrale ineinander umzuwandeln:

Satz von Gauß-Ostrogradski:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.44)$$

Dabei ist V ein Volumen, S die geschlossene Oberfläche, die dieses Volumen umschließt.

Satz von Stokes:

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.45)$$

Hier ist l eine geschlossene Linie und S eine beliebige Fläche, die von dieser Linie umrandet wird.

Empfohlene Literatur: Batygin und Topytgin (2005); Kotschin (2017); Arfken et al. (2012); Mathews and Walker (1970); Borisenko und Tarapow (1966); Morse and Feshbach (1953)

Aufgaben

1.36 Zeigen Sie, dass sich der Nablaoperator (1.24) bei der Drehung eines kartesischen Koordinatensystems gemäß der Regel für die Transformation eines Vektors (1.3) verhält.

1.37 Berechnen Sie mit Hilfe von kartesischen Kugel- und Zylinderkoordinaten $\operatorname{grad}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{r}$. \mathbf{r} ist der Ortsvektor und \mathbf{l} ein konstanter Vektor.

1.38 Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ist.

1.39 Berechnen Sie

$$\operatorname{grad} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \text{const.}$$

1.40 Schreiben Sie ein Gleichungssystem auf, das die *Feldlinien* in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten bestimmt. Als Feldlinie eines Vektorfeldes wird eine Kurve im Raum bezeichnet, deren Tangente an jedem ihrer Punkte die Richtung des Vektors $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ des Feldes in diesem Punkt angibt.

1.41 Beschreiben Sie mit Hilfe von Kugelkoordinaten die Gesamtheit der Linien, die tangential zum Vektor

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \text{const}$$

sind.

1.42 Schreiben Sie die zyklischen Komponenten des Gradienten in Kugelkoordinaten. Die Definition der zyklischen Komponenten wurde in Aufgabe (1.17) gegeben.

1.43 Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} \mathbf{A}$ und der Laplaceoperator invariant bezüglich Drehungen eines kartesischen Koordinatensystems sind und dass $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ sich wie ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe oder der zu ihm duale Vektor transformiert.

1.44 Berechnen Sie $\operatorname{div} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{div} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ und $\operatorname{rot} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$, wobei $\boldsymbol{\omega}$ ein konstanter Vektor ist.

1.45 Berechnen Sie

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad \mathbf{m} = \text{const.}$$

Konstruieren Sie die Feldlinien für den Vektor \mathbf{H} . Fertigen Sie eine Zeichnung an.

1.46 Beweisen Sie die folgenden wichtigen Identitäten, die man oft in praktischen Rechnungen anwenden muss, mit Hilfe der Regeln der Vektoralgebra und -analysis, ohne die Komponentenschreibweise zu benutzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\varphi\psi) &= \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi; \\ \operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) &= \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi; \\ \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi; \\ \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}; \\ \operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}; \\ \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Hierbei sind φ, ψ skalare und \mathbf{A}, \mathbf{B} Vektorfunktionen der Koordinaten.

1.47 Beweisen Sie die folgenden Identitäten, in denen der Nablaoperator in den Produkten auf alle Faktoren wirkt, die rechts von ihm stehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A}; \\ (\mathbf{C} \cdot \nabla) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A}; \\ (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}); \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{C}; \\ (\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}); \\ -(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} &= -\mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \end{aligned}$$

1.48 Berechnen Sie $\operatorname{grad} \varphi(r)$, $\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \mathbf{r}$ und $(\mathbf{1} \cdot \nabla) \varphi(r) \mathbf{r}$.

1.49 Wie lautet die Funktion $\varphi(r)$, die der Bedingung $\operatorname{div} \varphi(r) \mathbf{r} = 0$ genügt?

1.50 Berechnen Sie Divergenz und Rotation folgender Vektoren:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}, \quad \varphi(r) (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}),$$

wobei \mathbf{a} und \mathbf{b} konstante Vektoren sind.

1.51 Berechnen Sie $\text{grad } \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(r)$, $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$, $\text{div } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $\text{rot } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$ und $(\mathbf{1} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{A}(r)$.

1.52 Beweisen Sie die Beziehung $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A}$ für $\mathbf{A}^2 = \text{const.}$

1.53 Wandeln Sie das Volumenintegral $\int_V (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dV$ in ein Oberflächenintegral um.

1.54 Drücken Sie die Integrale über eine geschlossene Oberfläche $\oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S})$ und $\oint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})d\mathbf{S}$ durch das Volumen aus, welches von dieser Oberfläche eingeschlossen ist. \mathbf{a} ist ein konstanter Vektor.

Hinweis: Multiplizieren Sie jedes der Integrale mit einem beliebigen konstanten Vektor \mathbf{c} und wenden den Satz von Gauß-Ostrogradski an.

1.55* Wandeln Sie die Integrale über eine geschlossene Fläche

$$\oint_S \mathbf{n} \varphi dS, \quad \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS, \quad \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{A} dS \quad \text{und} \quad \oint_S T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \mathbf{n}_\beta dS$$

in Volumenintegrale über das von der Fläche eingeschlossene Volumen um (\mathbf{b} ist ein konstanter Vektor, \mathbf{n} ist der Einheitsvektor in Normalenrichtung).

1.56 Leiten Sie mit Hilfe einer der in der vorigen Aufgabe bewiesenen Identitäten das Archimedische Gesetz durch Summierung der Druckkräfte ab, die an den Oberflächenelementen des in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers angreifen.

1.57* Beweisen Sie die Identität

$$\int_V (\mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}.$$

1.58 Innerhalb des Volumens V erfüllt der Vektor \mathbf{A} die Bedingung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ und auf dem Rand des Volumens (auf der Oberfläche S) die Bedingung $A_n = 0$. Beweisen Sie, dass dann $\int_V \mathbf{A} dV = 0$ gilt.

1.59* Beweisen Sie, dass für den in der vorigen Aufgabe definierten Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\text{div}_{\mathbf{r}} \int_V \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0$$

gilt.

1.60 Beweisen Sie die Greenschen Formeln

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} \quad \text{und}$$

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{S},$$

wobei φ und ψ skalare differenzierbare Funktionen sind.

1.61 Wandeln Sie das Integral $\oint_l u df$ über eine geschlossene Linie in ein Flächenintegral über die von dieser Linie begrenzte Fläche um.

1.62* Beweisen Sie die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned}\oint_l \varphi \, d\mathbf{l} &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla \varphi) dS; \\ \oint_l (d\mathbf{l} \times \mathbf{A}) &= \int_S ((\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A}) dS; \\ \oint_l d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} &= \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} dS.\end{aligned}$$

Hier ist \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor auf der Oberfläche, φ und \mathbf{A} sind Funktionen der Koordinaten, l ist eine geschlossene Linie, S eine nicht geschlossene durch l begrenzte Fläche. Die angegebenen Identitäten kann man als Spezialfälle des verallgemeinerten Satzes von Stokes

$$\oint_l (\dots) d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla)(\dots) dS,$$

betrachten, wobei das Symbol (...) einen Tensor beliebiger Stufe bezeichnet.

1.63 Zeigen Sie: Wenn die skalare Funktion ψ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ ist und \mathbf{a} irgendein konstanter Vektor, so erfüllen die Vektorfunktionen $\mathbf{L} = \text{grad } \psi$, $\mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{a}\psi)$ und $\mathbf{N} = \text{rot } \mathbf{M}$ die Helmholtzsche Vektorgleichung $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$, $k^2 = \text{const}$.

1.3 Spezielle Funktionen der mathematischen Physik

1.3.1 Zylinderfunktionen

Die Zylinderfunktionen $Z_\nu(x)$ erfüllen die Besselsche Gleichung

$$Z_\nu'' + \frac{1}{x} Z_\nu' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu = 0, \quad \nu = \text{const}. \quad (1.46)$$

Die Lösungen der Gleichung (1.46), die bei $\text{Re } \nu \geq 0$ für $x \rightarrow 0$ beschränkt sind, nennt man Zylinderfunktionen erster Art (oder Bessel-Funktionen). Man kann sie in Form einer Potenzreihe darstellen:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\nu + s + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}. \quad (1.47)$$

Die unabhängige Variable wird mit z bezeichnet, weil die Reihe für alle ν auch in der gesamten komplexen z -Ebene, die man sich entlang der negativen reellen Achse aufgeschnitten denken muss, konvergiert.

Wenn ν nicht ganzzahlig ist ($\nu \neq n = 0, \pm 1 \dots$), kann als zweite linear unabhängige Lösung $J_{-\nu}(x)$ verwendet werden. Ist ν ganzzahlig ($\nu = n = 0, \pm 1 \dots$), besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (1.48)$$

Deshalb wählt man als zweite linear unabhängige Lösung die Zylinderfunktionen zweiter Art (oder Neumannsche Funktionen)⁵

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}, \quad (1.49)$$

die für $\nu \rightarrow n$ endliche Grenzwerte haben.

Man kann auch die Zylinderfunktionen dritter Art (Hankel-Funktionen) als zwei linear unabhängige Lösungen verwenden:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \quad (1.50)$$

Alle aufgeführten Funktionen sind Lösungen der Besselschen Gleichung. Die Funktionen Y_ν und $H_\nu^{(1,2)}$ haben für $z \rightarrow 0$ eine Singularität. Alle Lösungen erfüllen die Rekursionsformeln

$$Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} Z_\nu(z) \quad \text{und} \quad (1.51)$$

$$Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2Z'_\nu(z). \quad (1.52)$$

Diese Rekursionsformeln kann man in andere Formen umschreiben:

$$Z_{\nu\pm 1}(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) \mp Z'_\nu(z); \quad Z_{\nu\mp 1}(z) = \pm z^{\mp\nu} \frac{d}{dz} [z^{\pm\nu} Z_\nu(z)]. \quad (1.53)$$

Speziell gelten

$$J_1(z) = -J'_0(z) \quad \text{und} \quad Y_1(z) = -Y'_0(z). \quad (1.54)$$

Für die Zylinderfunktionen mit ganzzahliger Ordnung gibt es eine einfache Integraldarstellung:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \exp(ix \sin \varphi - im\varphi) d\varphi \\ &= \frac{(-i)^m}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \exp(ix \cos \varphi - im\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Folgende asymptotische Darstellungen kann man zur näherungsweisen Berechnung der Zylinderfunktionen verwenden: Für $z \rightarrow 0$

$$J_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad (1.56)$$

$$Y_0(z) \approx -iH_0^{(1)}(z) \approx iH_0^{(2)}(z) \approx \frac{2}{\pi} \ln z; \quad (1.57)$$

$$Y_\nu(z) \approx -iH_\nu^{(1)}(z) \approx iH_\nu^{(2)}(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \text{Re } \nu > 0; \quad (1.58)$$

und für $|z| \rightarrow \infty$ und beliebige ν

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi; \quad (1.59)$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi; \quad (1.60)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad -\pi < \arg z < 2\pi; \quad (1.61)$$

⁵ In der deutschen Fachliteratur werden diese Funktionen meist mit $N_\nu(z)$ abgekürzt. In der englischen Literatur werden die Funktionen $Y_\nu(z)$ auch als Webersche Funktionen bezeichnet. (Anm. d. Übers.)

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad -2\pi < \arg z < \pi. \quad (1.62)$$

Zylinderfunktionen mit rein imaginärem Argument bezeichnet man als modifizierte Zylinderfunktionen $I_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$, (wobei die Funktion $K_\nu(z)$ auch als McDonald-Funktion bezeichnet wird). Sie werden durch die Gleichungen

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(iz) \quad (1.63)$$

oder

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2s}}{s! \Gamma(\nu + s + 1)}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \quad (1.64)$$

definiert und erfüllen die Gleichung

$$W_\nu'' + \frac{1}{z} W_\nu' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) W_\nu = 0. \quad (1.65)$$

Diese Funktionen sind reellwertig für reelle ν und $z > 0$. Rekursionsformeln und Formeln für die Ableitung ergeben sich aus den Gleichungen (1.51–1.53) und (1.63). Insbesondere gelten

$$I_0'(z) = I_1(z) \quad \text{und} \quad K_0'(z) = -K_1(z). \quad (1.66)$$

Asymptoten sind für $z \rightarrow 0$

$$I_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad (1.67)$$

$$K_0(z) \approx -\ln z; \quad (1.68)$$

$$K_\nu(z) \approx \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0; \quad (1.69)$$

und für $|z| \rightarrow \infty$

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad |\arg z| < \pi/2; \quad (1.70)$$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad |\arg z| < 3\pi/2. \quad (1.71)$$

Die sphärischen Zylinderfunktionen erster und dritter Art (sphärische Bessel- und Hankel-Funktionen) benötigt man recht häufig bei der Lösung physikalischer Aufgaben in Kugelkoordinaten. Sie sind von halbzahliger Ordnung und durch folgende Gleichungen definiert:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad h_l^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.72)$$

und erfüllen die Gleichung

$$z_l'' + \frac{2}{x} z_l' + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] z_l = 0. \quad (1.73)$$

Für kleine x gelten

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l+1)} \quad \text{und} \quad h_l^{(1,2)} \approx \mp \frac{x^{-l-1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l-1)}. \quad (1.74)$$

Für große x gelten

$$j_l(x) \approx \frac{1}{x} \cos \left[x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right] \quad \text{und} \quad h_l^{(1,2)}(x) \approx \frac{1}{x} \exp \left\{ \pm \left[x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right] \right\}. \quad (1.75)$$

Aufgaben

1.64 Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int x^\nu Z_{\nu-1}(x) dx \quad \text{und} \quad \int x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x) dx.$$

1.65 Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty J_1(x) dx, \quad \int_0^\infty J_2(x) x^{-1} dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty J_n(x) x^{-n} dx.$$

1.66 Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_0^\infty J_n(x) dx = \int_0^\infty J_{n+2}(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

1.67 Leiten Sie die Integraldarstellung

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}} du$$

her.

Hinweis: Substituieren Sie $u = \sin \varphi$.

1.68* Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \varphi) d\varphi = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Hinweis: Nutzen Sie Potenzreihenentwicklungen.

1.69 Leiten Sie die folgenden Formeln her:

$$J_n(x) = (-1)^k x^n \left(\frac{d}{x dx} \right)^k (x^{k-n} J_{n-k}(x)) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x dx} \right)^n J_0(x).$$

1.70 Leiten Sie die Rekursionsformeln für die modifizierten Zylinderfunktionen her:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \quad I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z) \quad \text{und} \quad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z).$$

1.71* Zeigen Sie, dass

$$J_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_1) J_n(r_2) \exp(in\vartheta)$$

ist, wobei ϑ der Winkel zwischen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 ist.

1.72* a) Schreiben Sie eine Gleichung auf, die von der Funktion $u(x) = J_n(ax)$ erfüllt wird.

b) Berechnen Sie für $b \neq a$ das Integral

$$\int_0^1 x J_n(ax) J_n(bx) dx = \frac{a J_n'(a) J_n(b) - b J_n'(b) J_n(a)}{b^2 - a^2}. \quad (1.76)$$

c) Es seien $a \neq b$ Lösungen der Gleichung $J_n(x) = 0$, d. h. $J_n(a) = J_n(b) = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_0^1 x J_n(ax) J_n(bx) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 x J_n^2(ax) dx = \frac{1}{2} [J_n'(a)]^2 \quad (1.77)$$

ist.

Anmerkung: Die in der ersten der Gleichungen (1.77) ausgedrückte Eigenschaft nennt man *Orthogonalität der mit x gewichteten Zylinderfunktionen*.

1.3.2 Kugelflächenfunktionen⁶

Die von den Polarwinkeln ϑ und α abhängige Kugelflächenfunktion der Ordnung l und m ist durch die Rodrigues-Formel

$$Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\alpha} \quad (1.78)$$

definiert, wobei die ganzen Zahlen l und m den Bedingungen $l \geq 0$ und $-l \leq m \leq l$ genügen. Mit P_l^m wird das zugeordnete Legendresche Polynom

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2-1)^l, \quad -l \leq m \leq l \quad (1.79)$$

bezeichnet, das für $m = 0$ mit dem Legendreschen Polynom $P_l(x)$ übereinstimmt: $P_l^0(x) = P_l(x)$. Die zugeordneten Legendreschen Polynome erfüllen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l^m(x)}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{x^2-1} \right] P_l^m(x) = 0. \quad (1.80)$$

Nützliche Beziehungen sind:

$$Y_{lm}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}, \quad Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = (-1)^l Y_{lm}(\pi - \vartheta, \pi + \alpha), \quad (1.81)$$

$$P_l(1) = 1,$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \text{mit } n!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (1.82)$$

und

$$P_{2n+1}(0) = 0.$$

⁶ Die Bezeichnung dieser Funktionen ist in der Fachliteratur nicht einheitlich. Im russischen Original werden sie als *Legendresche Kugelfunktionen* bezeichnet und in der englischen Fachliteratur als *Spherical Harmonics*. (Anm. d. Übers.)

Die Kugelflächenfunktionen bilden auf der Oberfläche einer Kugel ein vollständiges Orthonormalsystem der Funktionen von ϑ und α . Das bedeutet, dass

$$\int Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha) Y_{l'm'}(\vartheta, \alpha) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.83)$$

ist, wobei $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ das Raumwinkelement bezeichnet, und dass jede quadratisch integrierbare Funktion von ϑ und α in eine Reihe nach den Y_{lm}

$$f(\vartheta, \alpha) = \sum_{lm} f_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad (1.84)$$

entwickelt werden kann. Die Koeffizienten f_{lm} sind durch die Beziehung

$$f_{lm} = \int Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha) f(\vartheta, \alpha) d\Omega \quad (1.85)$$

bestimmt.

Wenn $\mathbf{r}(r, \vartheta, \alpha)$ und $\mathbf{r}'(r', \vartheta', \alpha')$ die Ortsvektoren zweier Raumpunkte sind, wobei $r' < r$ ist, so gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (1.86)$$

mit $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\alpha - \alpha')$. Die Funktion $1/R$ wird erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome genannt. Weiterhin gilt folgendes Additionstheorem für die Kugelflächenfunktionen:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'). \quad (1.87)$$

Setzt man (1.87) in (1.86) ein, so erhält man die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r'^l}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'). \quad (1.88)$$

Aus der Beziehung (1.86) ergibt sich die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \xi - \cos \eta}} = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(l+1/2)|\xi|} P_l(\cos \eta), \quad (1.89)$$

wenn man $r'/r = e^{-|\xi|}$ setzt.

Empfohlene Literatur: Abramowitz and Stegun (1965); Gradstein und Ryschik (2014); Lebedew (2010); Kolokolow et al. (2000)

Aufgaben

1.73 Zeigen Sie, dass für $x = \cos \vartheta$ die Gleichung für die Legendreschen Polynome die Form

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP_l}{d\vartheta} + l(l+1)P_l = 0 \quad (1.90)$$

annimmt.

1.74* Leiten Sie die Rekursionsformeln

$$(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) \text{ und} \quad (1.91)$$

$$(2l + 1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) \quad (1.92)$$

her ($l = 1, 2, \dots$). Dafür können Sie die Formel (1.79) verwenden.

1.75 Berechnen Sie mit Hilfe der Rekursionsformeln die ersten fünf Legendreschen Polynome.

1.76 Beweisen Sie mit Hilfe der Beziehung (1.79) die Orthogonalität der Legendreschen Polynome und berechnen Sie das Normierungsintegral

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l + 1} \delta_{ll'}. \quad (1.93)$$

Hinweis: Drücken Sie das Normierungsintegral durch die Eulersche Beta-Funktion aus.

1.77 Leiten Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Legendreschen Polynome (1.86) die Entwicklung

$$\frac{1 - u^2}{(1 - 2ux + u^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)P_l(x)u^l$$

her.

1.78 Schreiben Sie die Gleichung (1.80) für die zugeordneten Legendreschen Polynome in Kugelkoordinaten auf.

1.79 Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen die Gleichung

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l + 1)Y_{lm} = 0 \quad (1.94)$$

erfüllen.

1.80 Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehung (1.79), dass

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^m(x)$$

gilt.

Hinweis: Wenden Sie auf das Produkt $(x - 1)^l(x + 1)^l$ die Leibnizsche Produktregel zur Berechnung einer Ableitung beliebiger Ordnung eines Produktes zweier Funktionen an:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

1.81 Schreiben Sie für $l = 0, 1, 2, 3$ die Kugelflächenfunktionen P_l^m in expliziter Form auf.

1.3.3 Diracsche Delta-Funktion

Zum Begriff der Delta-Funktion gelangen wir z. B. beim Versuch, die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ eines punktförmigen Teilchens zu beschreiben. Das Teilchen möge sich im Koordinatenursprung befinden und die Ladung e haben. Dann muss offensichtlich die Funktion $\rho(\mathbf{r})$

folgende Eigenschaft haben:

$$\rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{für } r \neq 0. \quad (1.95)$$

Aber für $r \rightarrow 0$ darf die Dichte $\rho(\mathbf{r})$ nur so schnell wachsen, dass

$$\int_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}) dV = e \quad (1.96)$$

wird. Das heißt, wenn man das Integral über ein beliebiges Volumen berechnet, in dem sich das Teilchen befindet, müsste es einen endlichen Wert ergeben, der gleich der Ladung e ist.

Indem wir $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(r)$ ansetzen, erhalten wir aus den Gleichungen (1.95) und (1.96) die Beziehungen, über die wir die dreidimensionale Delta-Funktion definieren können:

$$\left. \begin{aligned} \delta(\mathbf{r}) &= 0 && \text{für } r \neq 0; \\ \delta(\mathbf{r}) &\rightarrow \infty && \text{für } r \rightarrow 0; \\ \int_{\Delta V} \delta(\mathbf{r}) dV &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Analog wird die eindimensionale Delta-Funktion definiert:

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x); \\ \delta(x) &= 0 && \text{für } x \neq 0; \\ \delta(x) &\rightarrow \infty && \text{für } x \rightarrow 0; \\ \int_{\Delta} \delta(x) dx &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.98)$$

wobei Δ ein Intervall auf der x -Achse ist, das den Punkt $x = 0$ enthält.

Die Delta-Funktion gehört zur Klasse der singulären verallgemeinerten Funktionen. Sie erlangt ihre exakte Bedeutung erst unter einem Integral. Wie aus der Beziehung (1.98) folgt, berechnet sich das Integral über das Produkt aus der Delta-Funktion und einer beliebigen kontinuierlichen, begrenzten Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (1.99)$$

wobei das Intervall (x_1, x_2) den Punkt $x = a$ enthalten muss. Anderenfalls ist das Integral gleich Null. Weiterhin gelten die Beziehungen

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(\alpha x) f(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} f(0) \quad (1.100)$$

und

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} f(a_i), \quad (1.101)$$

wobei a_i die reellen Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$ sind. Die letztere Eigenschaft der Delta-Funktion kann man in Form einer symbolischen Gleichung schreiben:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} \delta(x - a_i). \quad (1.102)$$

Wenn $g'(a_i) = 0$ ist, also a_i eine vielfache Nullstelle von $g(x)$, dann verlieren die Gleichungen (1.101) und (1.102) ihren Sinn. Ebenso hat das Produkt $\delta(x)f(x)$ keinen Sinn, wenn die Funktion $f(x)$ bei $x = 0$ eine Singularität hat.

Man kann auch eine Ableitung der Delta-Funktion definieren. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial a} \quad (1.103)$$

und analog für die Ableitungen höherer Ordnungen

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta^{(n)}(x-a) dx = (-1)^n f^{(n)}(a). \quad (1.104)$$

Die Funktion $\delta(x)$ selbst kann als Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion $\Theta(x)$ angesehen werden. Das folgt aus der offensichtlichen Beziehung

$$\int_{x_1}^x \delta(x) dx = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad (1.105)$$

wobei die untere Integrationsgrenze x_1 eine beliebige negative Zahl ist. Wenn wir diesen Ausdruck nach x differenzieren, erhalten wir

$$\Theta'(x) = \delta(x). \quad (1.106)$$

Für den Fall, dass in Gleichung (1.105) die obere Integrationsgrenze mit dem Punkt zusammenfällt, in dem das Argument der Delta-Funktion null wird, setzen wir als Funktionswert die Hälfte des Funktionswertes der glatten Funktion $f(x) = 1$. Dabei nutzen wir die Integrationsregel

$$\int_{x_1}^a f(x) \delta(x-a) dx = \frac{1}{2} f(a). \quad (1.107)$$

Diese Regel steht in Übereinstimmung damit, dass es sich bei der Delta-Funktion um eine gerade Funktion handelt.

Die dreidimensionale Delta-Funktion kann man als Produkt dreier eindimensionaler Delta-Funktionen auffassen:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z). \quad (1.108)$$

Deshalb kann man alle oben betrachteten Eigenschaften der eindimensionalen Delta-Funktion leicht auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinern.

Eine anschauliche Vorstellung von der Delta-Funktion und ihren Ableitungen erhält man, wenn man sich irgendeine stetige Funktion $\delta_\epsilon(x-a)$ mit der Eigenschaft $\int_{\Delta} \delta_\epsilon(x-a) dx = 1$ graphisch darstellt. Der Parameter ϵ charakterisiert die Breite des Intervalls, in dem diese Funktion von Null verschieden ist (siehe Abb. 1.3) Die Delta-Funktion. und ihre Ableitungen sind als Grenzwerte

$$\begin{aligned} \delta(x-a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x-a), \\ \frac{\partial \delta(x-a)}{\partial x} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \delta_\epsilon(x-a)}{\partial x} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

definiert. Viele nichtsinguläre Funktionen, die von einem Parameter abhängen, gehen bei Annäherung dieses Parameters an einen bestimmten Grenzwert in die Delta-Funktion über. Die gebräuchlichsten Darstellungen der Delta-Funktion sind:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right); \quad (1.109)$$

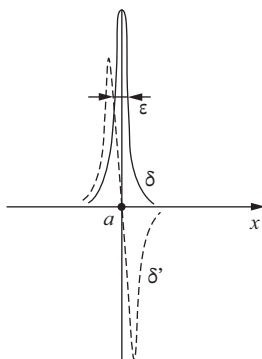


Abb. 1.3 Visualisierung der Delta-Funktion und ihrer ersten Ableitung.

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin Kx}{x}; \quad (1.110)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Kx}{Kx^2}; \quad (1.111)$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}. \quad (1.112)$$

Aus der Gleichung (1.110) ergeben sich folgende Darstellungen:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos kx dk. \quad (1.113)$$

Man kann das als Darstellung der Delta-Funktion in Form eines Fourier-Integrals betrachten. Manchmal lässt man in Gleichung (1.113) das \lim -Zeichen weg und verwendet statt dessen unendliche Integrationsgrenzen, d. h.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk.$$

Wenn man bei der Berechnung von Integralen für die Delta-Funktion eine der Darstellungen (1.109)–(1.113) verwendet, muss man zuerst die Integration ausführen und danach erst den Grenzübergang. So ergibt sich z. B. bei Verwendung von Gleichung (1.110)

$$\int_{-a}^b \delta(x) f(x) dx = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y} dy = \frac{1}{\pi} f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = f(0), \quad (1.114)$$

obwohl der Grenzwert (1.110) an sich nicht existiert.

In der theoretischen Physik verwendet man oft die Darstellung der Delta-Funktion durch Linienintegrale in der komplexen Ebene. Wir wenden die Cauchysche Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \quad (1.115)$$

an, wobei $f(z)$ eine Funktion ist, die innerhalb des von der geschlossenen Kurve C begrenzten Gebietes und auf dieser Kurve selbst in der Ebene der komplexen Variablen z keine Singularitäten hat, und die Integration entlang der Kurve C entgegen dem Uhrzeigersinn ausgeführt wird. Vergleicht man die Gleichung (1.99) und (1.115), erkennt man, dass die Größe

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-a}$$

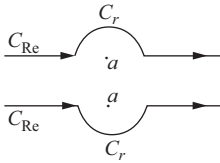


Abb. 1.4 Umgehung eines singulären Punktes auf der reellen Achse in der komplexen Ebene.

als Darstellung der Delta-Funktion $\delta(z-a)$ betrachtet werden kann, vorausgesetzt, die Integration wird über eine geschlossene Kurve durchgeführt, die den Punkt $z = a$ umschließt und innerhalb derer und auf der selbst keine anderen Singularitäten des Integranden auftreten. Zum Beispiel kann die Kurve C ein Kreis mit einem kleinen Radius sein.

In Anwendungen treten häufig Integrale der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx, \quad x_1 < a < x_2$$

entlang der reellen Achse auf, in denen $f(x)$ im Intervall $[x_1, x_2]$ keine Singularität aufweist. Dabei können die Grenzen x_1 und x_2 unendlich sein. Solch ein Integral hat für ein reelles a keinen bestimmten Wert, da der Integrand einen Pol innerhalb des Integrationsweges hat. Die Berechnung des Integrals erfordert eine zusätzliche Information, die es ermöglicht, die Singularität zu umgehen. Die Regel dafür wird gewöhnlich auf der Grundlage physikalischer Argumente aufgestellt:

$$\int_{C_{\text{Re}}+C_r} \frac{f(x)}{x-a} dx = \int_{C_r} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{C_{\text{Re}}} \frac{f(x)}{x-a} dx.$$

Das bedeutet, dass das Integral auf der linken Seite der obigen Gleichung, in dem über die gesamte Kurve integriert wird, als Summe zweier Integrale dargestellt werden kann (siehe Abb. 1.4). Im ersten wird die Integration entweder entlang des oberen oder unteren sehr kleinen Halbkreises C_r um den singulären Punkt durchgeführt, im zweiten über den Rest des Intervalls entlang der reellen Achse mit dem Symbol C_{Re} .

Das Integral über den oberen Halbkreis mit dem Radius $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt die Hälfte (negatives Vorzeichen wegen des Umlaufs um die Polstelle im mathematisch negativen Sinn, d. h. im Uhrzeigersinn) des Integrals über den Vollkreis. Man erhält mit Gleichung (1.115):

$$\int_{C_r} \frac{f(x)}{x-a} dx = -i\pi f(a).$$

Das Integral über die reelle Achse unter Ausschluss des singulären Punktes wird im Sinne des Hauptwertes berechnet:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{x_1}^{a-\epsilon} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\epsilon}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx \right\} \equiv \mathcal{P} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a} dx.$$

Umgeht man die Polstelle entlang des unteren Halbkreises, kehrt sich das Vorzeichen gegenüber der Umgehung entlang des oberen Halbkreises um. Im Ergebnis erhalten wir die folgende Regel zur Berechnung des Integrals (Sohotskij-Formel):

$$\frac{1}{x-a} = \mp i\pi \delta(x-a) + \mathcal{P} \frac{1}{x-a}. \tag{1.116}$$

Das Symbol \mathcal{P} kennzeichnet den Hauptwert. Das obere Vorzeichen gilt für die obere Umgehung der Polstelle, das untere für die untere (siehe Abb. 1.4).

Anstatt den Integrationsweg zu deformieren, kann man die Lage der Polstelle um einen kleinen Abstand von der reellen Achse verschieben. Das erreicht man durch Hinzufügen

eines kleinen Imaginärteils: $a \rightarrow a \mp i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. Durch diese Substitution nimmt Gleichung (1.116) folgende Form an:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - a \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x - a) + \frac{\mathcal{P}}{x - a}. \quad (1.117)$$

Die beiden Identitäten (1.116) und (1.117) tragen symbolischen (Operator-) Charakter und müssen in dem Sinne verstanden werden, dass die Integration über die mit einer beliebigen stetigen Funktion multiplizierte linke und rechte Seite ein und dasselbe Resultat ergibt. Wenn wir in der Gleichung (1.117) den Ausdruck auf der linken Seite in Real- und Imaginärteil zerlegen, erhalten wir für $\delta(x - a)$ die Darstellung (1.109), wobei $x \rightarrow x - a$ zu substituieren ist. Für den Hauptwert ergibt sich

$$\frac{\mathcal{P}}{x - a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x - a}{(x - a)^2 + \epsilon^2}. \quad (1.118)$$

Eine andere Darstellung des Hauptwertes, die direkt zur Darstellung der Delta-Funktion (1.109) gehört (ohne die eben angeführte Substitution), hat die Form

$$\frac{\mathcal{P}}{x} = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1 - \cos Kx}{x}. \quad (1.119)$$

Die streng mathematische Theorie verallgemeinerter Funktionen findet man in [Vladimirov (1976)], während Anwendungsaspekte in [Seldovich und Myshkis (1972)] beschrieben werden. Siehe auch [Kolokov et al. (2000)].

Aufgaben

1.82 Berechnen Sie die Integrale

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^3 (x^2 - x - 5)\delta(-3x)dx, \\ & \int_{-10}^{-3} (x + 3)\delta(x + 5)dx, \\ & \int_0^5 (x + 5)\delta(x + 5)dx \text{ und} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha x)\delta(x^2 + x - 2)dx, \quad \alpha = \text{const.} \end{aligned}$$

1.83 Vereinfachen Sie die Ausdrücke

$$\begin{aligned} & (x - a)\delta(x - a), \\ & f(x)\delta(x - a) \text{ und} \\ & (3x^3 - 7x)\delta\left[\frac{2}{5}(x^2 - 3x - 4)\right]. \end{aligned}$$

1.84 Beweisen Sie, dass die Beziehungen (1.109), (1.111) und (1.113) die Delta-Funktion darstellen. Berechnen Sie dafür Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$ mit einer stetigen Funktion $f(x)$, wobei sie unter dem Integral $\delta(x)$ durch die jeweilige Darstellung ersetzen. Überzeugen Sie sich davon, dass sich nach der Integration und dem anschließend durchzuführenden Grenzprozess $f(0)$ ergibt (siehe Gleichung (1.114)).

1.85 Schreiben Sie die dreidimensionalen Delta-Funktionen $\delta(\mathbf{r})$ und $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ in Zylinderkoordinaten, wobei $\mathbf{a} = (a_\perp, \alpha_0, a_z)$ ein konstanter Vektor in Zylinderkoordinaten ist.

1.86 Wiederholen Sie die vorige Aufgabe für Kugelkoordinaten mit $\mathbf{a} = (a, \vartheta_0, \alpha_0)$.

1.87 Schreiben Sie mit Hilfe der Delta-Funktion die erste Ableitung der unstetigen Funktion

$$\begin{cases} x^3, & \text{wenn } x < 1, \\ 2 & \text{wenn } x = 1, \\ x^2 + 2 & \text{wenn } x > 1. \end{cases}$$

1.88 Die Funktion $f(x)$ habe in den Punkten a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ Unstetigkeitsstellen erster Art (endliche Sprünge). Schreiben Sie die erste Ableitung mit Hilfe der Delta-Funktion.

1.89 Finden Sie die Regel zur Berechnung des Integrals über das Produkt $f(x)x^n\delta^{(m)}(x)$, wobei $f(x)$ eine an der Stelle $x = 0$ im klassischen Sinne differenzierbare Funktion ist. $\delta^{(m)}(x)$ ist die m -te Ableitung der Delta-Funktion und n eine positive ganze Zahl.

1.90 Zeigen Sie, dass die Funktion $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ die Poisson-Gleichung mit deltaförmiger rechter Seite erfüllt:

$$\Delta G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.120)$$

1.91 Zeigen Sie unter Verwendung der Gln. (1.84) und (1.85), dass die Kugelflächenfunktionen ein vollständiges Funktionensystem bilden:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\alpha - \alpha').$$

1.3.4 Fouriertransformation

Wir werden die Fouriertransformation und ihre Umkehrtransformation in der nichtsymmetrischen Form schreiben:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{2\pi}, \quad F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \quad (1.121)$$

Da das Fourierintegral reellwertig ist, gilt:

$$F(-\lambda) = F^*(\lambda) \quad (1.122)$$

für reelle λ und $f(x)$.

Die Zerlegung in ein Fourierintegral kann man leicht auf den Fall mehrerer Dimensionen verallgemeinern. Zum Beispiel kann man die Fouriertransformation im dreidimensionalen Raum in der Form

$$f(\mathbf{r}) = \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad F(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (1.123)$$

schreiben. In beiden Integralen wird die Transformation über den gesamten Raum ausgeführt.

Viele Integraltransformationen sind in den Nachschlagewerken [Bateman und Erdelyi, Prudnikow et al.] enthalten.

Aufgaben

1.92 Drücken Sie die Fouriertransformierte der Ableitung $f'(x)$ durch die Fouriertransformierte $F(\lambda)$ der Funktion $f(x)$ aus. Es werde angenommen, dass das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ konvergiert.

1.93 Wiederholen Sie die vorige Aufgabe für die Funktion $f(ax) \exp(ibx)$.

1.94 Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$.

Hinweis: Betrachten Sie x als komplexe Variable, wählen Sie als geschlossenen Integrationsweg einen Kreisbogen mit unendlichem Radius und wenden Sie den Residuensatz an.

1.95 Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $\exp(-\alpha^2 x^2)$.

1.96 Berechnen Sie die dreidimensionale Fouriertransformierte der Funktion $f(r) = \exp(-\alpha^2 r^2)$.

1.97 Berechnen Sie die dreidimensionale Fouriertransformierte der Funktion $\frac{e^{-kr}}{r}$.

1.98* Berechnen Sie die dreidimensionale Fouriertransformierte der Funktion $G(r) = r^{-1}$.

1.99* Entwickeln Sie die ebene Welle $\exp(ikr \cos \theta)$ in eine Reihe nach den Legendreschen Polynomen $P_l(\cos \theta)$. Berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten, indem Sie die Orthogonalität der Legendreschen Polynome nutzen.

1.100 Die Richtungen der Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{r} seien in Kugelkoordinaten durch die Winkel (θ, ϕ) bzw. (ϑ, φ) gegeben. Entwickeln Sie die ebene Welle $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ in eine Reihe nach den Kugelflächenfunktionen.

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat der vorigen Aufgabe und den Satz über die Entwicklung nach den Kugelflächenfunktionen.

1.101* Beweisen Sie die Identität

$$\frac{1}{\sqrt{r_{\perp}^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr_{\perp}) dk,$$

wobei r_{\perp} und z Zylinderkoordinaten sind.

1.4 Antworten und Lösungen

1.1 Aus Gleichung (1.7), die aus der Definition (1.4) folgt, gilt $|\hat{a}|^2 = 1$ für beliebige Drehwinkel, d. h. $|\hat{a}| = \pm 1$. Bei Drehung um den Winkel Null (identische Transformation) ist $|\hat{a}| = 1$. Da die Matrixelemente stetige Funktionen der Drehwinkel sind, bleibt dieser

Wert der Determinante für alle Drehwinkel erhalten. Bei der Inversion der Achsen ergibt sich $|\hat{a}| = -1$.

1.3 $P'_{\alpha\beta\dots\kappa} = |\hat{a}| a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} \dots a_{\kappa\sigma} P_{\mu\nu\dots\sigma}$.

Hier ist $|\hat{a}|$ die Determinante der Transformationsmatrix. Bei der Inversion dreier Achsen lautet die Transformationsmatrix $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. Deshalb ist $|\hat{a}| = -1$ und $P'_{\alpha\beta\dots\kappa} = (-1)^{s+1} P_{\alpha\beta\dots\kappa}$ gemäß der Definition des Pseudotensors s -ter Stufe. Die Gleichung (1.6) beschreibt die Transformation eines polaren Tensors bei Drehungen und Spiegelungen korrekt, nicht aber die Spiegelungen eines Pseudotensors (obwohl seine Drehungen durch diese Formel richtig beschrieben werden).

1.4 $T_{\alpha\beta} = (1/2)(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) + (1/2)(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$.

1.5 $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^h + T_{\alpha\beta}^{ah}$, mit dem Hermiteschen Tensor $T_{\alpha\beta}^h = (1/2)(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}^*)$ und dem antihermiteschen Tensor $T_{\alpha\beta}^{ah} = (1/2)(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}^*)$.

1.9 $T_{\alpha\beta}$ ist ein polarer Tensor zweiter Stufe.

1.10 $C_\alpha = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\gamma}$, d. h. $C_1 = A_{23} = -A_{32}$, $C_2 = A_{31} = -A_{13}$ und $C_3 = A_{12} = -A_{21}$.

1.11 $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ ist ein Pseudovektor oder ein zu ihm dualer polarer antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe, $A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$, $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{C}$ ist ein polarer Vektor und $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C}$ ist ein Pseudoskalar.

1.13 $dS_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} dx_\beta dx'_\gamma = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma} dS_{\beta\gamma}$, wobei $dS_{\beta\gamma} = dx_\beta dx'_\gamma - dx_\gamma dx'_\beta$ die Projektion der Parallelogrammfläche auf die $x_\beta x_\gamma$ -Koordinatenebene ist.

1.14 $dV = [\mathbf{dr} \times \mathbf{dr}'] \cdot \mathbf{dr}'' = e_{\alpha\beta\gamma} dx_\alpha dx'_\beta dx''_\gamma$. Das Volumenelement ist ein Pseudoskalar. Für $\mathbf{dr} = \mathbf{e}_1 dx_1$, $\mathbf{dr}' = \mathbf{e}_2 dx_2$ und $\mathbf{dr}'' = \mathbf{e}_3 dx_3$ erhalten wir den gewohnten Ausdruck für das Volumenelement in kartesischen Koordinaten $dV = dx_1 dx_2 dx_3$.

1.16 $\cos \theta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\alpha - \alpha')$.

1.17

Skalarprodukt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\mu=-1}^{+1} (-1)^\mu A_{-\mu} B_\mu$,

Vektorprodukt: $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_0 = i(A_{-1} B_{+1} - A_{+1} B_{-1})$, $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\pm 1} = \pm(A_0 B_{\pm 1} - A_{\pm 1} B_0)$ und

Radiusvektor: $r_\mu = r(4\pi/3)^{1/2} (-1)^\mu Y_{1\mu}(\vartheta, \alpha)$.

1.18 $\hat{g} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.19 Der Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten (siehe Abb. 1.5a) wird durch die Beziehung $e'_\mu = a_{\mu\beta} e_\beta$ beschrieben, wobei e_β ($\beta = 1, 2, 3$) die Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem sind, e'_μ ($\mu = r, \vartheta, \alpha$) sind die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten und $a_{\mu\beta}$ sind die Projektionen der Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten

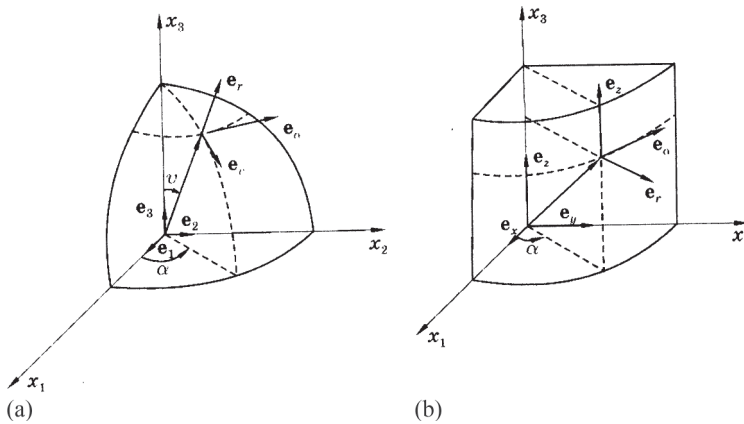


Abb. 1.5 Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten (a) und zu Zylinderkoordinaten (b).

auf die Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem. Es ergeben sich folgende Transformationsmatrizen:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \cos \alpha & -\sin \vartheta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich für den Übergang von kartesischen zu Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren e_r , e_α , e_z (siehe Abb. 1.5b):

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.20 Unter Verwendung der Resultate der vorigen Aufgabe erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{g}(\alpha_1 \theta \alpha_2) &= \hat{g}(\alpha_2) \hat{g}(\theta) \hat{g}(\alpha_1) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \theta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \theta \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 & \sin \theta \sin \alpha_2 \\ -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \theta \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \theta \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & \sin \theta \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \theta & -\sin \theta \cos \alpha_1 & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.21

$$\hat{D}(\alpha_1 \theta \alpha_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\alpha_2} & -\frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\alpha_1} & \cos \theta & -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\alpha_1} \\ -\frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\alpha_2} & \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \end{pmatrix}.$$

1.22 Da die Matrix einer Drehung um den Winkel 0 gleich 1 ist (identische Transformation), gilt für eine Drehung um einen kleinen Winkel $|\varepsilon_{\alpha\beta}| \ll 1$. Für den Beweis der Beziehungen $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ benutzen wir die Invarianz von $r^2 = \delta_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ gegenüber Drehungen. Wegen $x'_\alpha = \alpha_{\alpha\beta} x_\beta = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta$ erhalten wir unter Vernachlässigung von Größen, die von zweiter Ordnung klein sind, die Relation $r'^2 = r^2 + 2\varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$. Aus der Invarianz von r^2 folgt $\varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ für beliebige x_α , was nur bei $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ möglich ist.

Wir führen nun einen Vektor $\delta\boldsymbol{\varphi}$ mit den Komponenten $\delta\varphi_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}$ ein. Dann gilt $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, woraus folgt, dass $\delta\boldsymbol{\varphi}$ den Vektor eines kleinen Drehwinkels darstellt, dessen Richtung die Drehachse und dessen Betrag den Drehwinkel angibt.

1.23 Ein beliebiger reeller Tensor zweiter Stufe kann in der Form $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$ dargestellt werden, ein beliebiger Hermitescher Tensor in der Form $T_{\alpha\beta}^h = S_{\alpha\beta} + iA_{\alpha\beta}$, wobei $S_{\alpha\beta}$ und $A_{\alpha\beta}$ symmetrische bzw. antisymmetrische reelle Tensoren sind. Der antisymmetrische Tensor $A_{\alpha\beta}$ ist zu einem Vektor äquivalent (siehe Aufgabe 1.10), der nicht durch irgendeine Drehung zu Null gemacht werden kann. Deshalb kann nur der reelle symmetrische Teil eines beliebigen Tensors zweiter Stufe in Diagonalform überführt werden.

$$\mathbf{1.24} \quad S_{\alpha\beta} = S^{(1)} n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + S^{(2)} n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)} + S^{(3)} n_\alpha^{(3)} n_\beta^{(3)}.$$

1.25 Wenn wir die Determinante (1.21) berechnen und berücksichtigen, dass die Hauptwerte T^i nur dann Invariante sind, wenn sie Koeffizienten einer algebraischen Gleichung dritten Grades sind, finden wir drei Invariante:

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} + T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}, \\ I_2 &= D_{11} + D_{22} + D_{33} = T^{(1)}T^{(2)} + T^{(1)}T^{(3)} + T^{(2)}T^{(3)}, \\ I_3 &= D = T^{(1)}T^{(2)}T^{(3)}, \end{aligned}$$

wobei $D = |\hat{T}|$ die Determinante des Tensors ist, während die $D_{\alpha\beta}$ die Adjunkten⁷ dieser Determinante sind. Die Ausdrücke auf den rechten Seiten der Gleichungen folgen aus dem Satz von Vieta über den Zusammenhang der Koeffizienten einer kubischen Gleichung mit ihren Lösungen. Das Resultat ist für beliebige Tensoren zweiter Stufe gültig.

1.26 Die Entwicklung einer Determinante $D = |\hat{T}|$ nach den Elementen der Reihen oder Spalten lautet

$$T_{\alpha\beta} D_{\gamma\beta} = D \delta_{\alpha\gamma} \quad \text{bzw.} \quad D_{\gamma\alpha} T_{\gamma\beta} = D \delta_{\alpha\beta},$$

wobei $D_{\gamma\alpha} = (-1)^{\alpha+\gamma} \Delta_{\gamma\alpha}$ die Adjunkte und $\Delta_{\gamma\alpha}$ die Unterdeterminante von D ist, d. h. die Determinante, die durch Streichen der γ -ten Zeile und der α -ten Spalte von D entsteht. Gemäß den Ergebnissen der vorigen Aufgabe ist die Determinante D eines Tensors invariant. Da $\delta_{\alpha\beta}$ ein Tensor ist, bilden auch die Kofaktoren $D_{\gamma\alpha}$ dieser Determinante einen Tensor. Die Größen

$$T_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{D_{\beta\alpha}}{D}$$

bilden den inversen Tensor zu \hat{T} . Für die Existenz des inversen Tensors ist es notwendig und hinreichend, dass $D = |\hat{T}| \neq 0$ ist.

⁷ Andere Bezeichnungen sind „algebraisches Komplement“ oder „Kofaktor“. (Anm. d. Übers.)

1.28 a) $\mathbf{A}^2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$

b) $[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}] \cdot [(\mathbf{A}' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{C}']$

1.30 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}')(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}') + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}')(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}')(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}') + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}')(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}')(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}') -$
 $-(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}')(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}')(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}') - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}')(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}')(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}') - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}')(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}')(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}')$.

1.31 Wir führen den Beweis für den Vektor und den Tensor zweiter Stufe.

a) Für die Komponenten des Vektors soll laut Aufgabenstellung bei beliebigen Drehungen $A'_\alpha = A_\alpha$ gelten, d. h.

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z.$$

Drehen wir nun das Koordinatensystem um den Winkel π um die z -Achse, erhalten wir

$$A'_x = -A_x, \quad A'_y = -A_y, \quad A'_z = A_z.$$

Wegen $A'_x = A_x = -A_x$ muss $A_x = 0$ sein. Analog ergibt sich $A_y = 0$. Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel π um die x -Achse, erkennt man, dass auch $A_z = 0$ sein muss. Also ist der einzige Vektor, dessen Komponenten nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, der Nullvektor.

b) Man kann jeden beliebigen Tensor zweiter Stufe als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors schreiben: $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$. Der antisymmetrische Tensor ist äquivalent zu einem Pseudovektor, dessen Komponenten, wie oben für einen Vektor bewiesen, nur dann nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, wenn sie gleich Null sind. Deshalb betrachten wir nur den symmetrischen Tensor $S_{\alpha\beta}$.

Wir wählen ein Koordinatensystem, in dem der symmetrische Tensor die Diagonalform $S^{(\alpha)}\delta_{\alpha\beta}$ hat. Wenn die Größen $S^{(\alpha)}$ voneinander verschieden sind, so hängen die Komponenten des Tensors von der Wahl der Achsen ab, d. h. davon, mit welcher Zahl (1, 2 oder 3) die betrachtete Achse bezeichnet wird. Nur für $S^{(1)} = S^{(2)} = S^{(3)} = S$ hängen die Komponenten des Tensors nicht von der Wahl der Achsen ab, der somit die Form $S\delta_{\alpha\beta}$ hat, was zu beweisen war.

1.32 Offenbar sind die Mittelwerte $\overline{n_\alpha}$, $\overline{n_\alpha n_\beta}$, $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma}$, $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu}$ Tensoren erster, zweiter, dritter und vierter Stufe. Da laut Aufgabenstellung alle Richtungen des Einheitsvektors gleichwahrscheinlich sein sollen, dürfen ihre Komponenten auch nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen.

Wir berücksichtigen die Resultate der Aufgabe 1.31 und betrachten zunächst $\overline{n_\alpha}$. Da es außer dem Nullvektor keinen Vektor gibt, dessen Komponenten vom Koordinatensystem unabhängig sind, folgt $\overline{n_\alpha} = 0$.

Der Tensor $\overline{n_\alpha n_\beta}$ muss durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe ausgedrückt werden, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen gleich sind. Das ergibt

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = S\delta_{\alpha\beta}.$$

Zur Bestimmung von S kontrahieren wir den Tensor bezüglich der beiden Indizes und erhalten

$$\overline{n_\alpha n_\alpha} = \overline{\mathbf{n}^2} = 1 = 3S.$$

Damit ergibt sich

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned} \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} &= 0 \\ \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu} &= \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}). \end{aligned}$$

$$1.33 \quad \frac{1}{3} a^2, \quad \frac{1}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \frac{1}{3} \mathbf{a}, \quad \frac{2}{3} a^2, \quad \frac{2}{3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

$$\frac{1}{15} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})].$$

$$1.34 \quad n^2, \quad n'^2, \quad l^2, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}', \quad (\mathbf{n} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{l}, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})^2, \quad (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{l})^2, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{l}).$$

$$1.35 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}, \quad \mathbf{n}' \cdot \mathbf{l}, \quad \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3).$$

$$1.37 \quad \mathbf{l}, \mathbf{l}$$

$$1.39 \quad -\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} + \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

$$1.40 \quad \frac{dr}{A_r} = \frac{rd\alpha}{A_\alpha} = \frac{dz}{A_z}, \quad \frac{dr}{A_r} = \frac{rd\vartheta}{A_\vartheta} = \frac{r \sin \vartheta d\alpha}{A_\alpha}.$$

1.41 Wir orientieren die polare Achse entlang des Vektors \mathbf{p} und projizieren den Vektor \mathbf{E} auf die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten:

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{r^3}, \quad E_\varphi = 0.$$

Die Feldlinien in Kugelkoordinaten werden aus dem Gleichungssystem

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\vartheta}{E_\vartheta} = \frac{r \sin \vartheta d\varphi}{E_\varphi}$$

bestimmt. Dass die Komponente E_φ zu Null wird, bedeutet, dass auch das Differential $d\varphi = 0$ wird, d. h. $\varphi = \text{const.}$ Aus diesem Grunde liegen alle Feldlinien in Ebenen, die durch den Vektor \mathbf{p} hindurch gehen. Setzen wir die nichtverschwindenden Projektionen von \mathbf{E} in die einzige verbliebene Differentialgleichung ein und kürzen die gemeinsamen Faktoren, erhalten wir nach Trennung der Variablen die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dr}{r} = 2 \cot \vartheta d\vartheta.$$

Wenn wir beide Seiten integrieren, erhalten wir

$$\ln r - \ln r_0 = 2 \ln \sin \vartheta \quad \text{bzw.} \quad r(\vartheta) = r_0 \sin^2 \vartheta,$$

wobei r_0 die Integrationskonstante ist, die den Abstand der Feldlinie vom Koordinatenursprung in der Ebene senkrecht zum Vektor \mathbf{p} angibt.

$$1.42 \quad \nabla_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\alpha} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm \frac{i}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

$$\nabla_0 = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

$$1.44 \quad \operatorname{div} \mathbf{r} = 3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{div} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 0, \quad \operatorname{rot} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 2\boldsymbol{\omega}.$$

$$1.45 \quad \mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

1.48 ⁸.

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi' \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{div} \varphi(r)\mathbf{r} = 3\varphi + r\varphi',$$

$$\operatorname{rot} \varphi(r)\mathbf{r} = 0, \quad (\mathbf{1} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{r} = \mathbf{1}\varphi + \mathbf{r}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{r})\frac{\varphi'}{r}.$$

$$1.49 \quad \varphi(r) = \operatorname{const}/r^3.$$

$$1.50 \quad \operatorname{div} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \operatorname{rot} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b};$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r};$$

$$\operatorname{div} \varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{rot} \varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = (2\varphi + r\varphi')\mathbf{a} - \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\frac{\varphi'}{r};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 3(\mathbf{a} \times \mathbf{r}).$$

$$1.51 \quad \operatorname{grad} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(r) = \mathbf{A} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}')\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{grad} \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r) = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}')\frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\operatorname{div} \varphi(r)\mathbf{A}(r) = \frac{\varphi'}{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}'), \quad \operatorname{rot} \varphi(r)\mathbf{A}(r) = \frac{\varphi'}{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{A}) + \frac{\varphi}{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{A}'),$$

$$(\mathbf{1} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{A}(r) = \frac{\mathbf{1} \cdot \mathbf{r}}{r}(\varphi'\mathbf{A} + \varphi\mathbf{A}').$$

$$1.53 \quad \int_V (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

1.54 Es ist hier ebenso wie in einer Reihe weiterer Fälle günstig, das Skalarprodukt des Integrals mit einem beliebigen konstanten Vektor \mathbf{c} zu betrachten:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}) &= \mathbf{c} \cdot \oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})dS = \oint_S (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) a_n dS = \\ &= \int_V \operatorname{div} [((\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a})] dV = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \int_V dV = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})V. \end{aligned}$$

Hierbei ist \mathbf{n} der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor des Flächenelementes $d\mathbf{S}$ und a_n die Projektion des Vektors \mathbf{a} auf \mathbf{n} . Da \mathbf{c} ein beliebiger Vektor ist, folgt $\oint_S \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}) = \mathbf{a}V$. Analog findet man $\oint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{S} = \mathbf{a}V$.

1.55 Wenn wir die in der Aufgabe 1.54 erläuterte Methode der skalaren Multiplikation mit einem konstanten Vektor auf jedes der zu untersuchenden Integrale anwenden, erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{n}\varphi dS &= \int_V \operatorname{grad} \varphi dV, \\ \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A})dS &= \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dV, \\ \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{A}dS &= \int_V (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{A} dV, \end{aligned}$$

⁸ In den Aufgaben 1.48 bis 1.51 bezeichnet der Strich die Ableitung nach r .

$$\oint_S T_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta dS = \int_V \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV.$$

Alle diese Beziehungen kann man als Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Ostrogradski betrachten:

$$\oint_S \mathbf{n}(\dots) dS = \int_V \nabla(\dots) dV,$$

wobei das Symbol (...) einen Tensor beliebiger Stufe darstellt.

$$1.61 \quad \int_S (\nabla u \times \nabla f) \cdot d\mathbf{S}.$$

$$1.64 \quad x^\nu Z_\nu(x) + C, \quad -x^{-\nu} Z_\nu(x) + C.$$

$$1.65 \quad \int_0^\infty J_1(x) dx = 1,$$

$$\int_0^\infty J_2(x) x^{-1} dx = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty J_n(x) x^{-n} dx = \frac{1}{2^n n!}.$$

$$1.72 \text{ a) } xu'' + u' + x(a^2 - n^2/x^2)u = 0.$$

b) Das Integral wird mit Hilfe der Gleichungen für die Funktionen $u(x) = J_n(ax)$ und $v(x) = J_n(bx)$ berechnet.

c) Die Gleichung (1.77) folgt unmittelbar aus Gleichung (1.76), die zweite erhält man durch den Grenzübergang.

$$1.75 \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

$$1.78 \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{dP_l^m}{d\vartheta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_l^m = 0.$$

$$1.81 \quad P_1^0 = P_1,$$

$$P_1^1 = -2P_1^{-1} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin \vartheta,$$

$$P_2^1 = -6P_2^{-1} = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 3 \cos \vartheta \sin \vartheta,$$

$$P_2^2 = 24P_2^{-2} = 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \vartheta,$$

$$P_3^1 = -12P_3^{-1} = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta,$$

$$P_3^2 = 120P_3^{-2} = 15x(1-x^2) = 15 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta,$$

$$P_3^3 = -720P_3^{-3} = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = 15 \sin^3 \vartheta.$$

Wir weisen darauf hin, dass die zugeordneten Legendreschen Polynome im Allgemeinen die Wurzeln $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ enthalten und deshalb streng genommen keine Polynome sind.

$$\begin{aligned}
 1.82 \quad & \int_{-2}^3 (x^2 - x - 5)\delta(-3x)dx = -\frac{5}{3}, \\
 & \int_{-10}^{-3} (x+3)\delta(x+5)dx = -2, \\
 & \int_0^5 (x+5)\delta(x+5)dx = 0, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha x)\delta(x^2 + x - 2)dx = \frac{1}{3} \exp(\alpha) + \frac{1}{3} \exp(-2\alpha).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.83 \quad & (x-a)\delta(x-a) = 0, \\
 & f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \\
 & (3x^3 - 7x)\delta\left[\frac{2}{5}(x^2 - 3x - 4)\right] = 82\delta(x-4) + 2\delta(x+1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.85 \quad & \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r_{\perp}} \delta(r_{\perp})\delta(z), \\
 & \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{1}{a_{\perp}} \delta(r_{\perp} - a_{\perp})\delta(\alpha - \alpha_0)\delta(z - a_z).
 \end{aligned}$$

Um den Grenzübergang $\mathbf{a} \rightarrow 0$ durchzuführen, ist es nicht ausreichend, nur die Größen a_{\perp} und a_z gegen Null gehen zu lassen, sondern man muss auf der rechten Seite über den Azimutwinkel α_0 mitteln, so dass der Nullvektor keine Richtung hat.

$$\begin{aligned}
 1.86 \quad & \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r), \\
 & \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{1}{a^2} \delta(r - a)\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)\delta(\alpha - \alpha_0).
 \end{aligned}$$

$$1.87 \quad f'(x) = g(x) + 2\delta(x-1), \text{ mit } g(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{wenn } x < 1, \\ 2x, & \text{wenn } x > 1. \end{cases}$$

$$1.88 \quad f'(x) = \frac{df}{dx} + \sum_{k=1}^n \Delta f_k \delta(x - a_k),$$

wobei $\Delta f_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0)$ ist, und $\frac{df}{dx}$ die gewöhnliche („klassische“) Ableitung in den stetigen Bereichen der Funktion darstellt.

$$1.89 \quad \frac{(-1)^m m!}{(n-m)!} f^{(m-n)}(0), \quad \text{wenn } m \geq n; \quad 0, \quad \text{wenn } m < n.$$

1.90 Für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ist G eine beschränkte differenzierbare Funktion und die Gleichung ist erfüllt, weil $\Delta G = 0$ ist. Für $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ hat die Funktion G eine Singularität. Um den Charakter der Singularität zu klären, integrieren wir Gleichung (1.120) über das Volumen einer kleinen Kugel mit dem Radius $R \rightarrow 0$ und dem Mittelpunkt im Punkte $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Wir wenden den Satz von Gauß-Ostrogradski an und erhalten

$$\int_V \Delta G dV = \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dV = \oint_S \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{1}{R^2} R^2 d\Omega = -4\pi.$$

Das ist genau der Wert, den auch die Integration der rechten Seite von Gleichung (1.120) ergibt, die damit erfüllt ist.

1.91 Wenn wir die Formel (1.85) für die f_{lm} in die Reihenentwicklung (1.84) einsetzen, erhalten wir für jede beliebige, quadratisch integrierbare Funktion die Gleichung

$$f(\vartheta, \alpha) = \int f(\vartheta', \alpha') \sum_{lm} [Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] d\Omega'.$$

Das ist nur möglich, wenn die in der Aufgabenstellung vorausgesetzte Gleichung erfüllt ist.

1.92 $i\lambda F(\lambda)$.

1.93 $\frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda - b}{a}\right)$.

1.94 $\pi \exp(-|\lambda|)$.

1.95 $\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}\right)$.

1.96 $\frac{\pi^{3/2}}{\alpha^3} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha^2}\right)$,

wobei \mathbf{k} der Ortsvektor im dreidimensionalen Fourierraum ist.

1.97 $4\pi/(k^2 + \kappa^2)$.

1.98 Für die Berechnung des Fourierintegrals verwenden wir Kugelkoordinaten und legen die Oz -Achse in die Richtung des \mathbf{k} -Vektors. Wenn wir zuerst über die Winkel und danach über r integrieren, erhalten wir

$$F(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{k^2} [1 - \cos(kR)].$$

Formal hat die Funktion auf der rechten Seite keinen Grenzwert. Jedoch kann man leicht verstehen, dass man den effektiven Grenzwert der \cos -Funktion als Null annehmen kann, da bei Anwendung der inversen Fouriertransformation der Term mit dem unendlich oszillierenden Kosinus einen Beitrag von Null liefert. Somit erhalten wir

$$F(k) = 4\pi/k^2.$$

Dasselbe Resultat können wir auch erhalten, indem wir bei der Lösung der vorigen Aufgabe den Grenzprozess $\kappa \rightarrow 0$ durchführen.

1.99 Wir schreiben die Reihenentwicklung in der Form

$$\exp(ikr \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

und erhalten unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Legendreschen Polynome die Darstellung für die gesuchten Funktionen u_l :

$$u_l(kr) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 e^{ikrx} P_l(x) dx.$$

Unter Verwendung der Rodrigues-Formel (1.78) und durch l -fache partielle Integration erhalten wir

$$u_l(kr) = \frac{(2l+1)(-ikr)^l}{2^{l+1}l!} \int_{-1}^1 e^{ikrx} (x^2 - 1)^l dx.$$

Weiterhin entwickeln wir die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe und integrieren diese absolut konvergente Reihe gliedweise. Es bleiben nur Summanden mit geraden Potenzen von x :

$$u_l(kr) = \frac{(2l+1)(-ikr)^l}{2^l l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ikr)^{2m}}{(2m)!} \int_0^1 x^{2m}(x^2-1)^l dx.$$

Schließlich lässt sich das Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung nach Substitution der Integrationsvariablen $t = x^2$, $dx = dt/2\sqrt{t}$ durch die Eulersche Betafunktion ausdrücken:

$$\int_0^1 t^{k-1/2}(1-t)^l dt = B(k+1/2, l+1) = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+k+3/2)}.$$

Als Endresultat erhalten wir durch Ausklammern aller gemeinsamen Faktoren folgende Reihe:

$$\begin{aligned} u_l(kr) &= i^l(2l+1) \frac{(kr)^l}{1 \cdot 3 \dots (2l+1)} \left\{ 1 - \frac{k^2 r^2 / 2}{1!(2l+3)} + \frac{(k^2 r^2 / 2)^2}{2!(2l+3)(2l+5)} - \dots \right\} \\ &= i^l(2l+1) j_l(kr), \end{aligned}$$

wobei $j_l(kr)$ eine sphärische Besselfunktion ist (siehe Abramowitz und Stegun (1965), Formel 10.1.2).

$$\mathbf{1.100} \quad \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\theta\phi) Y_{lm}(\vartheta\varphi).$$

