A 1
Aussagen, Mengen und Funktionen

A1.1 Aussagen

Aufgabe A1.1.1
Für folgende Aussagenverbindungen gebe man die Wahrheitstafeln an:

a) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, b) $(A \vee B) \wedge C$,
c) $(A \wedge B) \vee \neg(B \wedge C)$, d) $(A \Rightarrow B) \wedge B$.

Können c) und d) vereinfacht dargestellt werden?

Aufgabe A1.1.2
a) Man gebe für folgende Aussagen die Wahrheitstafeln an:

i) $((A \wedge B) \vee \neg A) \;\wedge\; ((A \wedge B) \vee \neg B)$, ii) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee C)$, iii) $A \wedge \neg B$.

b) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

i) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$, ii) $\neg(A \wedge \neg A)$,
iii) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, iv) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$,
v) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, vi) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Aufgabe A1.1.3
Man zeige mittels eines indirekten Beweises:

a) Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} .$$

b) $\log_{10} 2$ ist keine rationale Zahl.
c) Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} .$$

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 1, Aufgaben und Lösungen, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

Aufgabe A1.1.4

a) Man beweise indirekt, dass für ungerade Zahlen a, b und c

$$ax^2 + bx + c = 0$$

keine rationale Lösung x besitzt.

b) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung beweise man für reelle Zahlen a und b direkt

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \,.$$

Aufgabe A1.1.5

Man beweise direkt:

a) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für} \quad q \neq 1 \,,$

b) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \,.$

Aufgabe A1.1.6

a) Man bestimme die natürliche Zahl N, so dass für $n \geq N$ gilt (direkter Beweis):
i) $3^n > n^4$, ii) $n! \geq 4^n$.

b) Gegeben seien die folgenden natürlichen Zahlen

$$n = 2j(j+1) \,, \quad m = 2j + 1 \;\text{ mit }\; j \in \mathbb{N} \,.$$

Man zeige, dass auch die Summe $n^2 + m^2$ der Quadratzahlen wieder das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Aufgabe A1.1.7

a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$ beweise man die Behauptung

$$\text{B:} \quad a \leq \frac{2ab}{a+b} \qquad \text{i) indirekt und ii) direkt .}$$

b) Man beweise indirekt die Behauptung

$$\text{B:} \quad \sqrt{23} \text{ ist irrational.}$$

c) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen größer ist:

$$\sqrt{7} + \sqrt{11} \quad \text{oder} \quad \sqrt{8} + \sqrt{10} \,.$$

A1.2 Mengen

Aufgabe A1.2.1

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 4\} \,, \quad B := \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\} \,, \quad C := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\} \,.$$

Man bestimme

a) $A \cap C$,	b) $A \cap B$,	c) $A \cup B \cup C$,
d) $A \cap (B \cup C)$,	e) $\mathbb{R} \backslash B$,	f) $A \backslash C$,
g) $(\mathbb{R} \backslash C) \cup B$,	h) $C \cup (\mathbb{R} \backslash B)$,	i) $(\mathbb{R} \cap B) \cup A$,
j) $(\mathbb{R} \cup A) \backslash B$,	k) $((A \backslash B) \cap C) \cup A$,	l) $((A \cup B) \cap C) \backslash A$.

Aufgabe A1.2.2
Man berechne die Lösungsmengen von

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$, d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq e^x \leq 27\}$

und bestimme $A \cup D$, $D \backslash C$ sowie $B \cap D$.

Aufgabe A1.2.3

a) Man gebe die reellen Zahlen x an, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

i) $\dfrac{3}{|x+2|} < 2 - 3x$, ii) $\sqrt{|x+2|} \leq |x+1|$.

b) Man betrachte die Wheatstonesche Brückenschaltung (siehe Abb. 1.1). Durch Verschieben des Schleifkontaktes B wird die Spannung zwischen den Punkten A und B auf 0 gebracht. Der zu messende Widerstand x berechnet sich in Abhängigkeit von R und ℓ folgendermaßen:

$$x = \frac{\ell}{50\,\mathrm{cm} - \ell} R .$$

In welchem Bereich variiert x, wenn bekannt ist, dass $28\,\Omega \leq R \leq 29\,\Omega$ und $1{,}9\,\mathrm{cm} \leq \ell \leq 2{,}1\,\mathrm{cm}$ gilt?

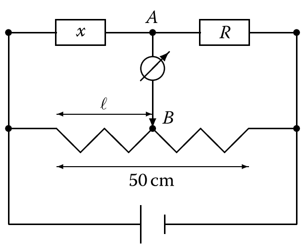

Abb. 1.1 Wheatstonesche Brückenschaltung.

Aufgabe A1.2.4
Man bestimme alle reellen Werte x, für die gilt:

a) $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{1+x} = 1$, b) $\dfrac{1-1/x}{1+1/x} + \dfrac{1+1/(x+2)}{1-1/(x+2)} = 2$,

c) $\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{x}$, d) $\dfrac{\sqrt{5-2x}}{5-4x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-8x}}$,

e) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$, f) $\sqrt{x+2} = x$,

g) $|2 - |1 - |x||| \leq 3$, h) $|x+2| - |x-3| = 3$.

Aufgabe A1.2.5

a) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$50 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} \le \frac{1}{1000} \; ?$$

b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit

i) $|4-|x|| \le x$, ii) $(x-1)^2 - 1 \le 2 - |x-2|$, iii) $(x-3)^2 < \dfrac{1}{x-3}$.

c) Man bestimme die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ für die gilt: $|y| \le \sqrt{|4-x^2|}$.

Aufgabe A1.2.6

In der x-y-Ebene skizziere man den Lösungsbereich von

a) $|x-2| + 2 \le |y|$, b) $\max\{|x|, |y|\} \le 1$, sowie die Mengen

c) $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{3} \left[\, 2j, 2j+1 \,\right[\times \bigcup_{j=1}^{4} \left]\, 2(j-1), 2j-1 \,\right]$.

Aufgabe A1.2.7

Man skizziere in der x-y-Ebene die folgenden Mengen:

a) $M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y-2| \le x \;\wedge\; |y-2| < 1 \right\}$,

b) $M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 1 \right\}$,

c) $M_3 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$
$|y| > 1 \;\wedge\; \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \le 1 \;\vee\; \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \le 1\right)\Big\}$.

Klausuraufgabe A1.2.8

Man skizziere die Mengen

$$M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\!: x^2 + y^2 \le 4 \wedge -1 \le x \le 0\right\} \quad \text{und}$$
$$M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\!: x^2 + y^2 \le 9 \wedge 0 \le y \le 2\right\} .$$

A1.3 Funktionen

Aufgabe A1.3.1

Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt:

a) $\dfrac{1}{4} \le \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, b) $e^x \le \dfrac{1}{e^{2x+1}}$.

Aufgabe A1.3.2

Man zeige mittels der Additionstheoreme von sin bzw. cos, dass folgende Beziehung gilt:

a) $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\tan x}{1+\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad \text{mit} \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\; .$

Von folgenden Funktionsvorschriften $y = f(x)$ mit reellem x und y sind der größtmögliche Definitionsbereich D und der zugehörige Bildbereich $f(D)$ anzugeben:

b) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$, c) $y = \sqrt{1-|x|}$, d) $y = \ln(x^2+3x+2)$.

Aufgabe A1.3.3

Für reelles x seien die folgenden Funktionsvorschriften $y = f(x)$ gegeben:

a) $y = \ln(\sqrt{x+a}) \quad a \in \mathbb{R}$, b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$, c) $y = \dfrac{x-4}{-x^2+5x-4}$,

d) $y = \sqrt{(x-3)(2-x)}$, e) $y = n$ für $n < x \le n+1$, $n \in \mathbb{Z}$,

f) $y = \sqrt{\dfrac{5x-1}{3x+1} - 1}$.

Man gebe jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich D und den zugehörigen Bildbereich $f(D)$ an.

Aufgabe A1.3.4

a) Man untersuche die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad f(x) = ax^2 + bx + c ,$$

in Abhängigkeit von a, b und c auf Injektivität und Surjektivität.

b) Für die folgende Funktion $f(x)$ ist eine Darstellung als Komposition aus „elementaren" Funktionen anzugeben (Tastenfolge bei der Auswertung auf einem Taschenrechner):

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{\sin x}}}{(1-\cos^2(\sqrt{x}))^5} \; .$$

Wie lauten die Definitionsbereiche?

Aufgabe A1.3.5

a) Man zeige ohne Benutzung eines Taschenrechners, dass $\sinh 1 > 1$ ist. Man verwende die Definitionen

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} , \quad \sinh y := \frac{1}{2}\,(e^y - e^{-y}) ,$$

und rechne mit Ungleichungen! Die Umformungen sind genau zu begründen!
Hinweis: Man zeige und verwende, dass $(e-1)^2 > 2$ gilt.

b) Eine Funktion heißt *gerade* Funktion, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, sie heißt *ungerade* Funktion, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \quad g(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}\,, \quad h(x) = x + \cos x\ ?$$

Aufgabe A1.3.6

a) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:
   i) $f_1\colon [-5, 5] \to [-2, 2]\,, \quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||\,,$
   ii) $f_2\colon [0, 1] \to [0, 2]\,, \quad f_2(x) = x^4\,,$
   iii) $f_3\colon [0, \pi/2] \to [0, 1/2]\,, \quad f_3(x) = \sin x \cos x\,,$
   iv) $f_4\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[\,, \quad f_4(x) = e^x\,.$
b) Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):
   a) $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}\,,$
   b) $f_6(x) = x^3 + \sin(2x)\,.$

Aufgabe A1.3.7

Für die Funktion

$$f: [a, \infty[\to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 - 6x + 11$$

bestimme man die kleinste Zahl a, so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

Aufgabe A1.3.8

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x + 2) + \ln(x)\,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11}$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Für das Polynom

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$$

bestimme man die Linearfaktorzerlegung unter Verwendung der Methode der Polynomdivision.

Aufgabe A1.3.9

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben (siehe Abb. 1.2).

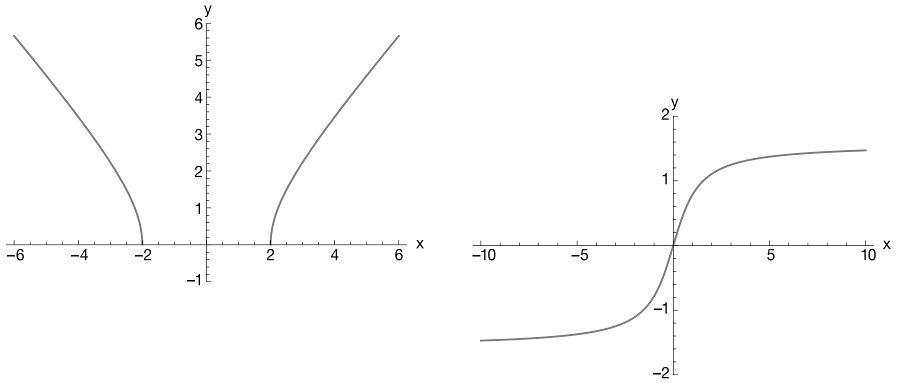

Abb. 1.2 $f(x) = ?$ $g(x) = ?$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \arctan(x)\,, \quad f_2(x) = \sqrt{|x| - 2}\,, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4}\,, \quad f_4(x) = \sqrt[3]{x}$$

mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.