

## A 1

### Aussagen, Mengen und Funktionen

#### A1.1 Aussagen

##### Aufgabe A1.1.1

Für folgende Aussagenverbindungen gebe man die Wahrheitstafeln an:

- a)  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ ,      b)  $(A \vee B) \wedge C$ ,  
 c)  $(A \wedge B) \vee \neg(B \wedge C)$ ,    d)  $(A \Rightarrow B) \wedge B$ .

Können c) und d) vereinfacht dargestellt werden?

##### Aufgabe A1.1.2

a) Man gebe für folgende Aussagen die Wahrheitstafeln an:

- i)  $((A \wedge B) \vee \neg A) \wedge ((A \wedge B) \vee \neg B)$ ,    ii)  $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee C)$ ,    iii)  $A \wedge \neg B$ .

b) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

- i)  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ ,    ii)  $\neg(A \wedge \neg A)$ ,  
 iii)  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ ,    iv)  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ ,  
 v)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ,      vi)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ .

##### Aufgabe A1.1.3

Man zeige mittels eines indirekten Beweises:

a) Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gilt

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

b)  $\log_{10} 2$  ist keine rationale Zahl.

c) Für reelle Zahlen  $a, b$  mit  $0 < a < b$  gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}.$$

2 | 1 Aussagen, Mengen und Funktionen

**Aufgabe A1.1.4**

- a) Man beweise indirekt, dass für ungerade Zahlen  $a, b$  und  $c$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

keine rationale Lösung  $x$  besitzt.

- b) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung beweise man für reelle Zahlen  $a$  und  $b$  direkt

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

**Aufgabe A1.1.5**

Man beweise direkt:

a)  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  für  $q \neq 1$ ,

b)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Aufgabe A1.1.6**

- a) Man bestimme die natürliche Zahl  $N$ , so dass für  $n \geq N$  gilt (direkter Beweis):  
 i)  $3^n > n^4$ , ii)  $n! \geq 4^n$ .  
 b) Gegeben seien die folgenden natürlichen Zahlen

$$n = 2j(j+1), \quad m = 2j+1 \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass auch die Summe  $n^2 + m^2$  der Quadratzahlen wieder das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

**Aufgabe A1.1.7**

- a) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a \leq b$  beweise man die Behauptung

B:  $a \leq \frac{2ab}{a+b}$  i) indirekt und ii) direkt.

- b) Man beweise indirekt die Behauptung

B:  $\sqrt{23}$  ist irrational.

- c) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen größer ist:

$$\sqrt{7} + \sqrt{11} \quad \text{oder} \quad \sqrt{8} + \sqrt{10}.$$

## A1.2 Mengen

**Aufgabe A1.2.1**

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 4\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}, \quad C := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\}.$$

Man bestimme

- a)  $A \cap C$ ,      b)  $A \cap B$ ,      c)  $A \cup B \cup C$ ,  
 d)  $A \cap (B \cup C)$ ,    e)  $\mathbb{R} \setminus B$ ,      f)  $A \setminus C$ ,  
 g)  $(\mathbb{R} \setminus C) \cup B$ ,    h)  $C \cup (\mathbb{R} \setminus B)$ ,    i)  $(\mathbb{R} \cap B) \cup A$ ,  
 j)  $(\mathbb{R} \cup A) \setminus B$ ,    k)  $((A \setminus B) \cap C) \cup A$ ,    l)  $((A \cup B) \cap C) \setminus A$ .

**Aufgabe A1.2.2**

Man berechne die Lösungsmengen von

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$ ,    b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$ ,  
 c)  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$ ,    d)  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq e^x \leq 27\}$   
 und bestimme  $A \cup D$ ,  $D \setminus C$  sowie  $B \cap D$ .

**Aufgabe A1.2.3**

a) Man gebe die reellen Zahlen  $x$  an, für die folgende Ungleichungen erfüllt sind:

i)  $\frac{3}{|x+2|} < 2 - 3x$ ,    ii)  $\sqrt{|x+2|} \leq |x+1|$ .

b) Man betrachte die Wheatstonesche Brückenschaltung (siehe Abb. 1.1). Durch Verschieben des Schleifkontaktes  $B$  wird die Spannung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  auf 0 gebracht. Der zu messende Widerstand  $x$  berechnet sich in Abhängigkeit von  $R$  und  $\ell$  folgendermaßen:

$$x = \frac{\ell}{50 \text{ cm} - \ell} R.$$

In welchem Bereich variiert  $x$ , wenn bekannt ist, dass  $28 \Omega \leq R \leq 29 \Omega$  und  $1,9 \text{ cm} \leq \ell \leq 2,1 \text{ cm}$  gilt?

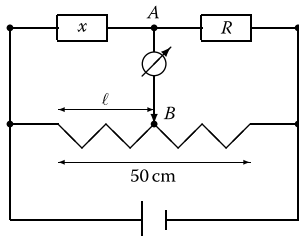


Abb. 1.1 Wheatstonesche Brückenschaltung.

**Aufgabe A1.2.4**

Man bestimme alle reellen Werte  $x$ , für die gilt:

- a)  $\frac{x}{x^2 - 1} + \frac{1}{1 + x} = 1$ ,      b)  $\frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} + \frac{1 + 1/(x+2)}{1 - 1/(x+2)} = 2$ ,  
 c)  $\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{x}$ ,      d)  $\frac{\sqrt{5-2x}}{5-4x} = \frac{1}{\sqrt{1-8x}}$ ,  
 e)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$ ,    f)  $\sqrt{x+2} = x$ ,  
 g)  $|2 - |1 - |x|| \leq 3$ ,      h)  $|x+2| - |x-3| = 3$ .

4 | 1 Aussagen, Mengen und Funktionen

**Aufgabe A1.2.5**

a) Ab welchem  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$50 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{1000} ?$$

b) Man bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$  mit

i)  $|4 - |x|| \leq x$ ,    ii)  $(x - 1)^2 - 1 \leq 2 - |x - 2|$ ,    iii)  $(x - 3)^2 < \frac{1}{x - 3}$ .

c) Man bestimme die Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  für die gilt:  $|y| \leq \sqrt{|4 - x^2|}$ .

**Aufgabe A1.2.6**

In der  $x$ - $y$ -Ebene skizziere man den Lösungsbereich von

a)  $|x - 2| + 2 \leq |y|$ ,    b)  $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$ ,    sowie die Mengen

c)  $\bigcup_{j=0}^3 [2j, 2j+1] \times \bigcup_{j=1}^4 [2(j-1), 2j-1]$ .

**Aufgabe A1.2.7**

Man skizziere in der  $x$ - $y$ -Ebene die folgenden Mengen:

a)  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - 2| \leq x \wedge |y - 2| < 1\}$ ,

b)  $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ ,

c)  $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > 1 \wedge (\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \leq 1 \vee \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \leq 1)\}$ .

**Klausuraufgabe A1.2.8**

Man skizziere die Mengen

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -1 \leq x \leq 0\} \quad \text{und}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \wedge 0 \leq y \leq 2\}.$$

## A1.3 Funktionen

**Aufgabe A1.3.1**

Man bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$  für die gilt:

a)  $\frac{1}{4} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ,    b)  $e^x \leq \frac{1}{e^{2x+1}}$ .

**Aufgabe A1.3.2**

Man zeige mittels der Additionstheoreme von  $\sin$  bzw.  $\cos$ , dass folgende Bezie-

hung gilt:

$$\text{a) } \tan \frac{x}{2} = \frac{\tan x}{1 + \sqrt{1 + \tan^2 x}} \quad \text{mit } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Von folgenden Funktionsvorschriften  $y = f(x)$  mit reellem  $x$  und  $y$  sind der größtmögliche Definitionsbereich  $D$  und der zugehörige Bildbereich  $f(D)$  anzugeben:

$$\text{b) } y = \frac{x-1}{x^2+x-2}, \quad \text{c) } y = \sqrt{1-|x|}, \quad \text{d) } y = \ln(x^2+3x+2).$$

### Aufgabe A1.3.3

Für reelles  $x$  seien die folgenden Funktionsvorschriften  $y = f(x)$  gegeben:

$$\text{a) } y = \ln(\sqrt{x+a}) \quad a \in \mathbb{R}, \quad \text{b) } y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}, \quad \text{c) } y = \frac{x-4}{-x^2+5x-4},$$

$$\text{d) } y = \sqrt{(x-3)(2-x)}, \quad \text{e) } y = n \quad \text{für } n < x \leq n+1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{f) } y = \sqrt{\frac{5x-1}{3x+1}} - 1.$$

Man gebe jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich  $D$  und den zugehörigen Bildbereich  $f(D)$  an.

### Aufgabe A1.3.4

a) Man untersuche die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c,$$

in Abhängigkeit von  $a$ ,  $b$  und  $c$  auf Injektivität und Surjektivität.

b) Für die folgende Funktion  $f(x)$  ist eine Darstellung als Komposition aus „elementaren“ Funktionen anzugeben (Tastensequenz bei der Auswertung auf einem Taschenrechner):

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\sin x}}}{(1 - \cos^2(\sqrt{x}))^5}.$$

Wie lauten die Definitionsbereiche?

### Aufgabe A1.3.5

a) Man zeige ohne Benutzung eines Taschenrechners, dass  $\sinh 1 > 1$  ist. Man verwende die Definitionen

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sinh y := \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}),$$

und rechne mit Ungleichungen! Die Umformungen sind genau zu begründen!

*Hinweis:* Man zeige und verwende, dass  $(e-1)^2 > 2$  gilt.

6 | 1 Aussagen, Mengen und Funktionen

- b) Eine Funktion heißt *gerade* Funktion, wenn  $f(x) = f(-x)$  gilt, sie heißt *ungerade* Funktion, wenn  $f(-x) = -f(x)$  gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}, \quad h(x) = x + \cos x ?$$

**Aufgabe A1.3.6**

- a) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

i)  $f_1: [-5, 5] \rightarrow [-2, 2], \quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||,$

ii)  $f_2: [0, 1] \rightarrow [0, 2], \quad f_2(x) = x^4,$

iii)  $f_3: [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1/2], \quad f_3(x) = \sin x \cos x,$

iv)  $f_4: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[, \quad f_4(x) = e^x.$

- b) Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

a)  $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x},$

b)  $f_6(x) = x^3 + \sin(2x).$

**Aufgabe A1.3.7**

Für die Funktion

$$f: [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 - 6x + 11$$

bestimme man die kleinste Zahl  $a$ , so dass  $f$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von  $f^{-1}$ .

**Aufgabe A1.3.8**

- a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x + 2) + \ln(x).$$

- b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11}$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

- c) Für das Polynom

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$$

bestimme man die Linearfaktorzerlegung unter Verwendung der Methode der Polynomdivision.

**Aufgabe A1.3.9**

Zu den Abbildungsvorschriften  $f(x)$  und  $g(x)$  seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben (siehe Abb. 1.2).

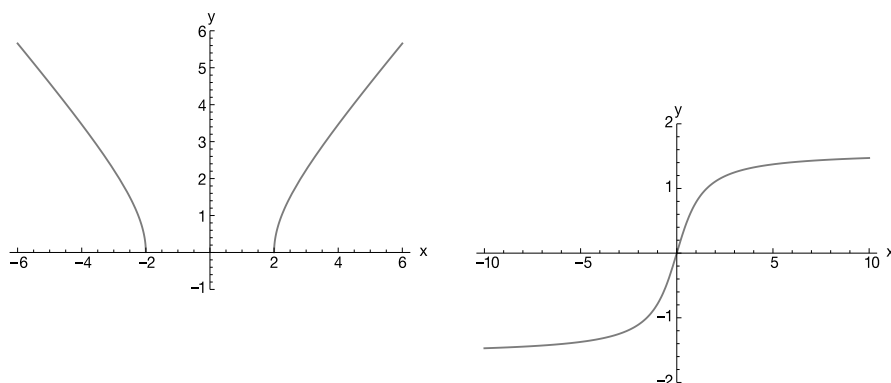


Abb. 1.2  $f(x) = ?$        $g(x) = ?$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \arctan(x), \quad f_2(x) = \sqrt{|x| - 2}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \quad f_4(x) = \sqrt[3]{x}$$

mit  $f(x)$  und welche mit  $g(x)$  übereinstimmt.

- b) Man untersuche, ob es sich bei  $f$  und  $g$  um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.
- c) Anhand der Funktionsgraphen von  $f$  und  $g$  gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

