Teil I
GRUNDLAGEN DES RISIKOMANAGEMENTS IN VERSICHERUNGSUNTERNEHMEN

1 Zur Historie des Versicherungsgedankens und des Risikobegriffs

Frank Romeike

Vom Glücksspiel zum modernen Risikobegriff

Die Ursprünge der modernen Risiko- und Wahrscheinlichkeitstheorie sind sehr eng verbunden mit dem seit Jahrtausenden bekannten Glücksspiel. Bereits seit Menschengedenken haben Menschen Glücksspiele gespielt, ohne von den Systemen der Chancenverteilung zu wissen oder von der Theorie des modernen Risikomanagements beeinflusst zu sein. Das Glücksspiel war und ist direkt mit dem Schicksal verknüpft. Das Glücksspiel ist quasi der Inbegriff eines bewusst eingegangenen Risikos. Bereits seit Jahrtausenden erfreut sich der Mensch daran. So kann man beispielsweise in dem 3000 Jahre alten hinduistischen Werk Mahabharata lesen, dass ein fanatischer Würfelspieler sich selbst aufs Spiel setzte, nachdem er schon seinen gesamten Besitz verloren hatte.

Parallel zur Entwicklung des Glücksspiels verliefen auch die Versuche, gegen das Glücksspiel anzukämpfen. Im antiken Sparta beispielsweise wurde das Würfelspiel verboten, und im Römischen Reich war der Einsatz von Geld bei Würfelspielen untersagt. 813 schloss das Mainzer Konzil all jene von der Kommunion aus, die dem Glücksspiel anhingen. Ludwig IX., der Heilige (König von Frankreich, 1226–1270), verbot 1254 sogar die Herstellung von Würfeln. Und seit damals hat sich auch nicht viel verändert: Auch heute noch reglementiert der Staat das Glücksspiel, verdient aber gleichzeitig kräftig am Glücksspiel mit.

Die ältesten uns bekannten Glücksspiele benutzten den so genannten Astragalus, den Vorfahren unseres heutigen sechsseitigen Würfels. Astragalus war der Urwürfel, der aus den harten Knöcheln von Schafen oder Ziegen gefertigt wurde. Damit war ein Astragalus praktisch unzerstörbar. Das Würfelspiel mit Astragali erfreute bereits die Ägypter, wie archäologische Grabungsfunde bestätigen. Vasen aus der griechischen Antike zeigen Jünglinge, die sich mit Würfelknochen ihre Zeit vertrieben. Auf Abbildung 1.1 sind zwei römische Mädchen beim Astragalspiel – bei den Römern Tali genannt – zu sehen.

Dem Ausgang des Spiels, d. h. dem Zufall, und der zukünftigen Ungewissheit des Lebens standen die antiken Menschen vollkommen hilflos und schicksalsergeben gegenüber. Wenn etwa in der Antike die Griechen eine Vorhersage über mögliche Ereignisse von Morgen suchten, berieten sie sich nicht mit ihrem Risikomanager, sondern wandten sich an ihre Orakel. Das Orakel von Delphi beispielsweise hatte seine Blütezeit im 6. und 5. Jahrhundert vor Christi Geburt. Apollon, einer der griechischen Hauptgötter, sprach durch seine Priesterin Pythia und erfüllte sie mit seiner Weisheit, so dass sie den richtigen Rat geben konnte. Analog zu den modernen Methoden des Risikomanagements waren jedoch sehr häufig die korrekte Interpretation der Weissagungen sowie die Umsetzung der Handlungsalternativen wichtiger als die

Abbildung 1.1: Fragment eines Kelches aus Terra Sigillata des Töpfers Xanthus, Vindonissa[1]

Weissagungen selbst. So fragte etwa der letzte König von Lydien, Kroisos (560–546 v. Chr.), das Orakel nach dem Ausgang des von ihm geplanten Krieges gegen Kyros. Die Pythia orakelte, ein großes Reich werde versinken, wenn er den Grenzfluss Halys überquere. Kroisos zog wohlgemut in den Krieg. Leider meinte Pythia jedoch des Kroisos' eigenes Reich, und dieses wurde dann auch zerstört.

Der Risikobegriff und die Methodik eines Risikomanagements konnten erst entstehen, als die Menschen erkannten, dass die Zukunft nicht bloß den Launen der Götter entsprang und nicht ein Spiegelbild der Vergangenheit ist. Erst als man sich bewusst war, dass man sein Schicksal auch selbst mitbestimmt, konnten die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und des Risikomanagements entstehen.

Der Begriff Risiko tauchte im 14. Jahrhundert das erste Mal in den norditalienischen Stadtstaaten auf. Der aufblühende Seehandel führte zur gleichen Zeit zur Entstehung des Seeversicherungswesens. Etymologisch können daher die Entstehung des Risikobegriffs und die Entwicklung der ersten Versicherungsverträge nicht voneinander getrennt werden. »Risiko« bezeichnet die damals wie heute existierende Gefahr, dass ein Schiff sinken könnte, etwa weil es an einer Klippe zerschellt oder von Piraten gekapert wird. Das Risiko quantifiziert das Ausmaß einer Unsicherheit und ermöglicht den kontrollierten Umgang damit. Ein Instrument zur Risikosteuerung war der Abschluss eines Versicherungsvertrags.

Etymologisch kann Risiko auf das griechische »*ριζα*« (»rhíza«) für »Wurzel« als auch auf das frühitalienische »riscio« für »Klippe« zurückverfolgt werden. Sowohl eine zu umschiffende Klippe als auch eine aus dem Boden herausragende Wurzel kann ein Risiko darstellen. Unter Etymologen umstritten ist die Rückführung auf das arabische Wort »risq« für »göttlich Gegebenes«, »Schicksal«, »Lebensunterhalt«. Risiko kann daher allgemein als ein mit einem Vorhaben, Unternehmen oder Ähnlichem verbundenes Wagnis definiert werden.

1 Quelle: Romeike, Frank/Hager, Peter (2013): Erfolgsfaktor Risikomanagement 3.0: Lessons learned, Methoden, Checklisten und Implementierung, 3. komplett überarbeitete Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden 2013, S. 4.

Historische Wurzeln des Versicherungsgedankens

Die ersten Ansätze einer rudimentären Versicherung konnte man bereits im Altertum, insbesondere in Griechenland, Kleinasien und Rom finden. So schlossen sich bereits etwa um 3000 v. Chr. phönizische Händler zu Schutzgemeinschaften zusammen und ersetzten ihren Mitgliedern verloren gegangene Schiffsladungen.

Ein Gesetzbuch des babylonischen Königs Hammurabi (1728–1686 v. Chr., nach anderer Chronologie 1792–1750 v. Chr.) enthielt Bestimmungen, wonach sich Eselstreiber bei Raubüberfällen auf Karawanen den Schaden untereinander ersetzen sollten.[2] Hammurabi kodifizierte das Straf-, Zivilund Handelsrecht und ist vor allem bekannt durch seine in altbabylonischer Sprache abgefasste und auf einer Dioritstele eingemeißelte Gesetzessammlung (den so genannten Codex Hammurabi, siehe Abbildung 1.2). So heißt es beispielsweise in dem Text: »Wenn ein Bürger das Auge eines anderen Bürgers zerstört, so soll man ihm ein Auge zerstören. Wenn er einen Knochen eines Bürgers bricht, so soll man ihm einen Knochen brechen. (…) Wenn ein Bürger einen ihm ebenbürtigen Bürger einen Zahn ausschlägt, so soll man ihm einen Zahn ausschlagen. Wenn er einem Palasthörigen einen Zahn ausschlägt, so soll er ein Drittel Mine Silber zahlen.« Unter gesellschaftlich gleichstehenden Personen galt in Babylonien ein Talionsrecht: Gleiches wird mit Gleichem vergolten, die Strafe entspricht der Tat. Bei gesellschaftlich tiefer stehenden Personen wird eine Kompensation durch Zahlung ermöglicht. Der Codex des Hammurabi enthielt außerdem 282 Paragraphen zum Thema »Bodmerei«. Bodmerei war ein Darlehensvertrag beziehungsweise eine Hypothek, die von dem Kapitän beziehungsweise Schiffseigentümer zur Finanzierung einer Seereise aufgenommen wurde. Ging das Schiff verloren, so musste das Darlehen nicht zurückgezahlt werden. Somit handelte es sich bei Bodmerei um eine Frühform der Seeversicherung.

Insbesondere in Griechenland und Ägypten halfen kultbezogene Vereine ihren Mitgliedern bei Krankheit und sorgten für ein würdiges Begräbnis. Dies war auch die Grundlage für die Gründung erster Sterbekassen. Die Mitglieder einer solchen Sterbekasse hatten Anspruch auf ein würdiges Begräbnis, auf das Schmücken des Grabes und kultische Mahlzeiten, die die überlebenden Mitglieder einnahmen. Deshalb wurden die Mitglieder auch »sodales ex symposio« (Mitglieder an der gemeinsamen Essenstafel) genannt. Andere Sterbekassen (etwa in Rom) versprachen ihren Mitgliedern einen Urnenplatz in unterirdischen Gewölben (Columbaria). Die Mitglieder zahlten eine Grundgebühr sowie einen regelmäßigen jährlichen Beitrag. Erst dann bekam man Anrecht auf einen Platz in der Gewölbeanlage, die durch die Beiträge finanziert, gepflegt und verwaltet wurde.

Im Mittelalter bildeten sich Vereinigungen von Kaufleuten (Gilden), Schiffsbesitzern und Handwerkern (Zünfte), deren Mitglieder sich unter Eid zu gegenseitiger Hilfe etwa bei Brand, Krankheit oder Schiffbruch verpflichteten.

2 Vgl. Romeike, F.: Hammurabi. In: *Risiko Manager,* Ausgabe 14/2007, S. 24.

Abbildung 1.2: Der Codex Hammurabi - die erste Gesetzessammlung

Die ersten Versicherungsverträge sind vor allem sehr eng mit der Seefahrt und der Entstehung des modernen Risikobegriffs verbunden und wurden Ende des 14. Jahrhunderts in Genua und an anderen Seeplätzen Italiens geschlossen. In Deutschland wurden die ersten vertraglichen Seeversicherungen gegen Ende des 16. Jahrhunderts abgeschlossen. Mit derartigen Versicherungsverträgen konnten Schiffseigentümer sich gegen den Verlust ihrer Schiffe durch Sturm und Piraten schützen. Auf Grund der Beobachtungen der Unfälle von Handelsschiffen über einen längeren Zeitraum hinweg wurde eine Prämie von beispielsweise zwölf bis 15 Prozent zur Abdeckung des Risikos verlangt. Aus dieser Zeit stammt auch das folgende Zitat: »Seit Menschengedenken ist es unter Kaufleuten üblich, einen Geldbetrag an andere Personen abzugeben, um von ihnen eine Versicherung für seine Waren, Schiffe und andere Sachen zu bekommen. Demzufolge bedeutet der Untergang eines Schiffes nicht den Ruin eines einzelnen, denn der Schaden wird von vielen leichter getragen als von einigen wenigen.« Zur gleichen Zeit entstand auch der Begriff der »Police«, der sich vom italienischen »polizza« für »Versprechen« oder »Zusage« herleiten lässt. Auch heute heißt die Versicherungspolice im Italienischen »polizza d'assicurazione«. Der englische Philosoph und Staatsmann Francis Bacon (1561–1626) brachte im Jahr 1601 einen Gesetzesantrag zu regulären Versicherungspolicen ein. In Deutschland hat die Seeversicherung jedoch bis Ende des 19. Jahrhunderts nie eine volkswirtschaftliche Bedeutung erlangt, da der Gütertransport über See und der internationale Warenaustausch noch zu gering waren.

Als Pionier im Bereich der Stichprobenauswahl und -verfahren sowie der Versicherungsmathematik gilt John Graunt (1620–1675), der im Jahr 1662 das Buch »Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality« veröffentlichte. Das Buch wird allgemein mit der Geburtsstunde der Statistik gleichgesetzt und enthielt eine Zusammenstellung der Geburts- und Todesfälle in London zwischen 1604 und 1661. Graunt wurde von dem Gedanken geleitet, »erfahren zu wollen, wie viele Menschen wohl existieren von jedem Geschlecht, Stand, Alter, Glauben, Gewerbe, Rang oder Grad und wie durch selbiges Wissen Handel und Regierung sicherer und regulierter geführt werden könnten; weil, wenn man die Bevölkerung in erwähnter Zusammensetzung kennt, so könnte man den Verbrauch in Erfahrung bringen, die sie benötigen würde; auf dass Handel dort erhofft würde, wo er unmöglich ist«. So fand Graunt etwa heraus, dass »etwa 36 Prozent aller Lebendgeborenen vor dem sechsten Lebensjahr starben«. An »äußeren Leiden wie Krebsgewächsen, Fisteln, Wunden, Geschwüren, Brüchen und Prellungen von Körperorganen, Eiterbeulen, Skrofulose, Aussatz, Kopfgrind, Schweinepocken, Zysten« starben weniger als 4000 Menschen.

Der englische Nationalökonom und Statistiker sowie Mitbegründer der Royal Society William Petty (1623–1687), ein Freund Graunts, griff die Erkenntnisse auf und prägte vor allem den Begriff der »Politischen Arithmetik«. Darunter verstand Petty die zur damaligen Zeit nicht gebräuchliche Anwendung von quantitativen Daten, das heißt Zahlen und Statistiken zur Analyse wirtschaftlicher Fragestellungen. Petty war ein Verfechter mathematisch-empirischer Vorgehensweise und wollte sich mittels Zahlen und statistischer Methoden von subjektiven Wertungen und Abschätzungen lösen, um so zu objektiveren Ergebnissen zu kommen.

Der englische Astronom und Mathematiker Edmond Halley (1656–1742) trieb rund drei Jahrzehnte nach der Veröffentlichung von »Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality« die Arbeiten Graunts weiter und analysierte basierend auf Informationen des Breslauer Wissenschaftlers und Pfarrers Caspar Neumann (1648–1715) Geburten- und Sterbeziffern aus Kirchenbüchern. Halley konnte mit seinen Tabellen »die Wahrscheinlichkeit« zeigen, dass ein »Anteil« jeder gegebenen Altersgruppe »nicht binnen eines Jahres stirbt«. Damit konnte die Tabelle dazu benutzt werden, die Kosten einer Lebensversicherung bei unterschiedlichem Alter zu berechnen, da die Tabelle die erforderlichen Daten zur Berechnung von Jahresrenten lieferte. Heute ist Halley weniger für seine revolutionären Arbeiten im Bereich der Versicherungsstatistik bekannt, sondern eher für den von ihm entdeckten periodischen Kometen mit einer Umlaufzeit von rund 76 Jahren (Halleyscher Komet), der in unserer Zeit unter anderem auch von der ESA-Raumsonde Giotto analysiert wurde.

Parallel entwickelten sich bereits Mitte des 16. Jahrhunderts in Schleswig-Holstein so genannte Brandgilden. Zur damaligen Zeit gab es keine staatliche Absicherung in Notfällen, so dass die Gilden zunächst als standesorientierte Schutzgilden, später auch als berufsständisch ausgerichtete Zunftgilden entstanden. Bei den Brandgilden wurde zunächst nur das Gebäude versichert. Einige Gilden versicherten später auch das Mobiliar, den Diebstahl von Pferden und Vieh von der Weide, Windbruch und die Begleichung der Begräbniskosten. Während ursprünglich der Schaden mit Naturalien (etwa Holz und Stroh für den Wiederaufbau des Hauses oder mit Weizen als Ersatz für die vernichtete Ernte) ersetzt wurde, führten die Gilden gegen Ende des 16. Jahrhunderts auch Geldleistungen ein. Damit war man dem modernen Versicherungsprinzip schon sehr nahe gekommen.

Am 30. November 1676 wurde der »Puncta der General Feur-Ordnungs-Cassa« durch Rat und Bürgerschaft der Stadt Hamburg verabschiedet. Die Hamburger Feuerkasse ist damit das älteste Versicherungsunternehmen der Welt. 1778 wurde mit der Gründung der Hamburgischen Allgemeinen Versorgungsanstalt die erste Lebensversicherungsgesellschaft in Deutschland gegründet, die jedoch zunächst nur für eine elitäre Oberschicht interessant war. In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts entstanden die ersten Feuerversicherungsunternehmen, die von den absolutistischen Landesherren eingeführt wurden.

Ein weiterer wichtiger Meilenstein bei der Entwicklung des modernen Versicherungswesens findet man in einem von Edward Lloyd (1688–1713) gegründeten Kaffeehaus in London. Lloyds Kaffeehaus entwickelte sich über die Jahre zum Treffpunkt für Kapitäne und Kaufleute. Dort schloss man zunächst humorig gemeinte Wetten darüber ab, welche Schiffe wohl den Hafen erreichen oder auch nicht erreichen würden. Schließlich wurden aus den Wetten echte Transaktionen, die über einen Makler abgewickelt wurden. Der Risikoträger bestätigte die Risikoübernahme, das heißt, den Verlust gegen eine genau definierte Versicherungsprämie zu übernehmen, durch seine Unterschrift (»Underwriter«). Das damalige »Versicherungsgeschäft« förderte jedoch eher den Wett- und Spielgeist, da Versicherungspolicen gegen quasi jedes nur denkbare Risiko abgeschlossen werden konnten, wie zum Beispiel Tod durch Gin-Konsum, Versicherung weiblicher Keuschheit, todbringende Pferdeunfälle.

Hieraus entstand später die »Corporation of Lloyd's«, eine Vereinigung von privaten Einzelversicherern (Underwriter). Dabei haftet jeder Underwriter unbegrenzt mit seinem gesamten Vermögen für den übernommenen Risikoanteil und muss bei dem einer Aufsichtsbehörde ähnlichen »Lloyd's Committee« Sicherheiten hinterlegen (Lloyd's Deposits) und sich regelmäßigen Audits unterwerfen.

In Deutschland gelang dem Versicherungsgedanken ein Durchbruch durch die Einführung der Sozialversicherung durch Bismarck, um vor allem den Fabrikarbeitern aus patriarchalischer Sorgepflicht und christlichem Verantwortungsbewusstsein in den klassischen Notlagen des Lebens, bei Krankheit, Invalidität und im Alter zu helfen. In Deutschland wurden daher früher als in anderen Ländern die ersten Netze der Krankenversicherung (1883), der Unfallversicherung (1884) und der Invaliden- und Altersversicherung (1889) aufgebaut.

In der folgenden Übersicht (Tabelle 1.1) sind die wesentlichen Entwicklungen im Bereich des Versicherungswesens, der Versicherungsmathematik und des Risikomanagements von 1300 bis 1900 zusammengefasst.[3]

1308	Ältester bekannter Leibrentenvertrag, geschlossen zwischen dem Erzbischof von Köln und dem Kloster St. Denis bei Paris.
1347	Der älteste Seeversicherungsvertrag wurde in Genua abgeschlossen.
1370	Erster Rückversicherungsvertrag im Bereich der Seeversicherung in Genua (wird gemeinhin angesehen als Ursprung der Rückversicherung).
1583	W. Gybbons unterzeichnet in London den ersten bekannten Lebensversicherungsvertrag der Welt (dieser war eher ein Wettvertrag): Auszahlung von 400 Pfund bei Tod binnen eines Jahres (bei einer Einmalprämie von 30 Pfund).
1585	S. Stevin stellt in der Schrift »Practique d'Arithmétique« eine Zinstafel sowie eine Tabelle von Endwerten von Zeitrenten in Abhängigkeit von der Laufzeit auf.
1590	Abschluss des so genannten Hamburgischen Seeversicherungsvertrags.
1591	Hamburger »Feuercontract« zur Versicherung der städtischen Brauhäuser.
1662	J. Graunt verfasst auf Anregung von W. Petty die Schrift »Natural and political observations made upon the bills of mortality« mit einer Sterbetafel, die auf dem Londoner Todesregister beruht.
1669	C. und L. Huygens tauschen sich in einem Briefwechsel über Erwartungswert und Median der zukünftigen Lebensdauer unter Zugrundelegung von Graunts Sterbetafel aus, auch für verbundene Leben und Personengruppen, die beim letzten Tod erlöschen.
1670	Kampener »Kommunaltontine«, entsprechend einer Idee von L. Tonti, gestaltet als Rentenanleihe.
1671	J. de Witt verfasst die Schrift »Waerdye van Lyf-Renten naer Proportie van Los-Renten« (Prämienberechnung für Leibrenten, »Rechnungsgrundlagen erster Ordnung«) zum Zweck der Armee-Finanzierung im Niederländisch-Französischen Krieg.
1674	Ludwig XIV. gründete zur Förderung der Kampfmoral das »Hôtel des Invalides«. Jeder Heeresangehörige hatte nach zehntägiger Dienstdauer Anspruch auf Aufnahme, d. h. auf medizinische Betreuung, Bekleidung und Verköstigung. Der Etat wurde aus einer zweiprozentigen Abgabe von allen Militärausgaben bestritten.
1676	Gründung der Hamburger Feuerkasse, des ersten öffentlich-rechtlichen Versicherungsunternehmens der Welt. Verabschiedung der »Puncta der General Feur-Ordnungs-Cassa« durch Rat und Bürgerschaft der Stadt Hamburg, Zusammenfassung der bestehenden Feuerkontrakte.

Tabelle 1.1: Zeittafel des Versicherungswesens von 1300 bis 1900

3 Basierend auf den Übersichten bei Pfeifer, D.: Grundzüge der Versicherungsmathematik, Skript vom 28. 6. 2004, sowie: Milbrodt, H./Helbig, M.: Mathematische Methoden der Personenversicherung. De Gruyter, Berlin 1999.

1680/83	Zahlreiche Schriften von G.W. Leibnitz zu verschiedenen Problemen der Versicherungs- und Finanzmathematik, u.a. mit den Themen Öffentliche Assekuranzen (mit Bezug auf die kurz zuvor gegründete Hamburger Feuerkasse), verschiedene Arten der Zinsrechnung, Leibrenten, Pensionen, Lebensversicherungen (auch auf mehrere Leben), Bevölkerungsentwicklung.
1693	Der Astronom E. Halley verfasst die Schrift »An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and the funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives.« Konstruktion einer Sterbetafel (Todesfälle von 1687 bis 1691 in Breslau) basierend auf Aufzeichnungen von C. Neumann, Darstellung von Leibrentenbarwerten.
1706	Gründung der Amicable Society, der ersten Lebensversicherungsgesellschaft der Welt, in London.
1725	A. de Moivre verfasst das erste Lehrbuch der Versicherungsmathematik mit dem Titel »Annuities upon Lives«. Sterbegesetz als Approximation von Halleys Sterbetafel, Rekursionsformeln für Leibrentenbarwerte.
1741	J.P. Süßmilch, Probst der Lutherisch-Brandenburgischen Kirche in Berlin, verfasst die Schrift »Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung derselben«. Wichtigster Klassiker der Demographie. Zusammen mit dem Mathematiker L. Euler führte er Berechnungen der Lebenserwartung durch, die noch bis ins 19. Jahrhundert von Versicherungsgesellschaften bei der Kalkulation von Lebensversicherungsprämien verwendet wurden.
1755	J. Dodson verfasst »The Mathematical Repository«. Lebensversicherung gegen laufende konstante Prämien, Einführung des Deckungskapitals.
1762	Deed of Settlement (Gründungsurkunde) der »Society for Equitable Assurances on Lives and Survivorships«. Erste Lebensversicherungsgesellschaft auf statistisch-mathematischer Basis. Wahl des auf Dodson zurückgehenden Begriffs des »Actuary« (Aktuar) als Berufsbezeichnung des Versicherungsmathematikers.
1765	D. Bernoulli verfasst die Schrift »Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité cuasée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.« Zusammengesetzte Ausscheideordnung mit den Ausscheideursachen »Tod ohne vorherige Pockenerkrankung« und »Ausscheiden durch Pockenerkrankung«.
1771	In Österreich entstand das erste Pensionsrecht: Jeder Offizier hatte ohne Rücksicht auf sein persönliches Vermögen Anspruch auf Invalidenversorgung.
1767/76	L. Euler verfasst die Schriften »Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain« sowie »Sur les rentes viagères et Eclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morta avec la déscription d'une nouvelle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile à l'état«. Erweiterung der Halleyschen Sterbetafelkonstruktion auf den Fall einer nichtstationären Bevölkerung. Jahresnettoprämien für Leibrenten (auch rekursiv), Bruttoprämien. Beschreibung einer »kontinuierlichen« (zugangsoffenen) Tontinenversicherung.
1785/86	N. Tetens verfasst die Schrift »Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben einer oder mehrerer Personen abhängen«. Erstes deutschsprachiges Lehrbuch der Lebensversicherungsmathematik (zweibändig); Einführung der Kommutationszahlen.
1792	Gründung der ersten Hagelversicherung in Neubrandenburg.
1820/25	B. Gompertz beschreibt das nach ihm benannte Sterbegesetz in den Texten »A sketch of an Analysis and Notation applicable to the Value of Life Contingencies« und »On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on a new Method of Determining the Values of Life Contingencies«.
1845/51	C.F. Gauß erstellt ein Gutachten zur Prüfung der Professoren-Witwen- und Waisenkasse zu Göttingen.
1846	Gründung der Kölnischen Rückversicherungsgesellschaft.
1860/66	W.M. Makeham erweitert das Gompertz'sche Sterbegesetz in den Schriften »On the Law of Mortality« und »On the Principles to be observed in the Construction of Mortality Tables«.
1863	A. Zillmer entwickelt in »Beiträge zur Theorie der Prämienreserve bei Lebensversicherungsanstalten« eine Darstellung des Deckungskapitals unter Einschluss von Abschlusskosten. Dieses Verrechnungsverfahren hat zur Folge, dass in der Anfangszeit eines Versicherungsvertrags kein Rückkaufswert und keine beitragsfreie Versicherungssumme vorhanden sind, da die ersten Jahresprämien ganz oder teilweise zur Deckung der Erwerbskosten dienen.

Tabelle 1.1: Zeittafel des Versicherungswesens von 1300 bis 1900 – Fortsetzung

1871/80	Erste Allgemeine Deutsche Sterbetafel (ADSt) für das gesamte Deutsche Reichsgebiet.
1898	Erste internationale Standardisierung versicherungsmathematischer Bezeichnungsweisen. Die Grundprinzipien dieser Notation gehen zurück auf David Jones (1843): »On the Value of Annuities and Reversionary Payments«.
1900	L. Bachelier leitet in der Schrift »Théorie de la Spéculation« eine Optionspreisformel unter Zugrundelegung einer Brown'schen Bewegung für die Aktienkursentwicklung her. Beginn der sog. Stochastischen Finanzmathematik.

Tabelle 1.1: Zeittafel des Versicherungswesens von 1300 bis 1900 – Fortsetzung

Moderne Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik als Grundlage des modernen Versicherungswesens

Während anfängliche Gefahrengemeinschaften eher vergleichbar waren mit einem Wettspiel, ermöglichten erst die Entwicklungen im Bereich der modernen Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im 17. bis 19. Jahrhundert die Professionalisierung des Versicherungsgedankens. Bis dahin waren die Menschen der Ansicht, dass die Zukunft weitestgehend den Launen der Götter entsprang und mehr oder weniger ein Spiegelbild der Vergangenheit war. Bereits im Zeitalter der Renaissance (Zeit von etwa 1350 bis Mitte des 16. Jahrhunderts) wurde die mittelalterliche kirchliche und feudale Ordnung in Frage gestellt und damit eine gesellschaftliche Umstrukturierung initiiert, in deren Folge eine von Adel und Bürgertum getragene weltliche Kultur entstand. Dies hatte auch direkte Auswirkungen auf die Entwicklung des modernen Versicherungsgedankens und Risikomanagements.

Als Pioniere bei der Entdeckung der Wahrscheinlichkeitsgesetze gelten der italienische Philosoph, Arzt und Mathematiker Geronimo Cardano (1501–1576) und der italienische Mathematiker, Physiker und Philosoph Galileo Galilei (1564–1642). Cardano untersuchte in seinem Buch »Liber de ludo aleae« systematisch die Möglichkeiten des Würfelspiels mit mehreren Würfeln. Dort stellte er fest: »Im Fall von zwei Würfeln gibt es sechs Würfe mit gleicher Augenzahl und 15 Kombinationen mit ungleicher Augenzahl. Letztere Anzahl gibt bei Verdoppelung 30, also gibt es insgesamt 36 Würfe. (…) Würfe mit dreimal gleicher Augenzahl gibt es soviele wie Würfe mit zweimal gleicher Augenzahl im vorangegangenen Kapitel. Also gibt es sechs solche Würfe. Die Zahl der verschiedenen Würfe von drei Würfeln, mit zweimal gleicher Augenzahl und einer davon verschiedenen, ist 30, und jeder dieser Würfe entsteht auf drei Arten. Das ergibt 90. Wiederum ist die Anzahl der verschiedenen Würfe mit drei verschiedenen Augenzahlen 20, und jeder entsteht auf sechs Arten. Das macht 120. Also gibt es insgesamt 216 Möglichkeiten.« Cardano nähert sich bereits dem erst später entwickelten Begriff der Wahrscheinlichkeit. Galileo stellte demgegenüber fest, dass beim wiederholten Wurf von drei Würfeln die Augensumme 10 öfter auftritt als 9, obwohl beide Zahlen durch 6 verschiedene Kombinationen erreicht werden können.

Die Ursprünge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit deren Hilfe Voraussagen über die Häufigkeit von Zufallsereignissen möglich sind, können im Wesentlichen auf den französischen Mathematiker, Physiker und Religionsphilosophen Blaise Pascal (1623–1662) zurückgeführt werden. Der französische Edelmann Antoine Gombaud (Chevalier de Méré, 1607–1685) sowie Sieur des Baussay (1607–1685) schrieben einen Brief an Blaise Pascal, wo sie diesen um Hilfe bei der Analyse eines »uralten« Problems des Würfelspiels bitten. Es geht um die Anzahl der Würfe mit einem Würfel, die zu zwei hintereinander folgenden Sechsen führen. Man wusste schon damals, dass es beim Spiel mit einem Würfel günstig ist, darauf zu setzen, bei vier Würfen wenigstens eine Sechs zu werfen. De Méré dachte, es müsste dasselbe sein, wenn man bei 24 Würfen mit zwei Würfeln darauf setzt, wenigstens eine Doppelsechs zu erhalten. Während im ersten Fall sechs Möglichkeiten vier Würfe gegenüber stehen, stehen im zweiten 36 Möglichkeiten 24 Würfe gegenüber, das Verhältnis ist also in beiden Fällen 3 : 2. Entgegen seinen Erwartungen verlor aber Chevalier de Méré auf die Dauer beim zweiten Spiel.

Aus der Anfrage von Chevalier de Méré entstand ein reger Schriftwechsel zwischen Pascal und dem französischen Mathematiker Pierre Fermat (1601–1665). In diesem Schriftwechsel stellte Pascal unter anderem fest: »*Teilweises Wissen ist auch Wissen, und unvollständige Gewissheit hat ebenfalls einen gewissen Wert, besonders dann, wenn man sich des Grades der Gewissheit seines Wissens bewusst ist. ›Wieso‹ – könnte jemand hier einwenden – ›kann man den Grad des Wissens messen, durch eine Zahl ausdrücken?‹ – ›Jawohl‹ würde ich antworten ›man kann es, die Leute, die ein Glücksspiel spielen, tun doch genau das‹. Wenn ein Spieler einen Würfel wirft, kann er nicht im Voraus wissen, welche Augenzahl er werfen wird, doch etwas weiß er, dass nämlich alle sechs Zahlen die gleiche Aussicht haben. Wenn wir die volle Gewissheit zur Einheit wählen, dann kommt dem Ereignis, dass eine bestimmte der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 geworfen wird, offenbar der Gewissheitsgrad ein Sechstel zu. Falls für ein Ereignis die Aussichten auf Stattfinden oder Nicht-Stattfinden gleich sind (wie etwa beim Münzenwerfen die Aussichten auf Kopf bzw. Zahl), so kann man behaupten, dass der Gewissheitsgrad des Stattfindens dieses Ereignisses genau gleich einhalb ist. Genauso groß ist der Gewissheitsgrad dessen, dass dieses Ereignis nicht stattfindet. Natürlich ist es eigentlich willkürlich, der vollen Gewissheit den Gewissheitsgrad 1 zuzuordnen; man könnte etwa der vollen Gewissheit den Gewissheitsgrad 100 zuordnen; dann würde man den Gewissheitsgrad der vom Zufall abhängigen, d. h. nicht unbedingt stattfindenden Ereignisse in Prozent bekommen. Man könnte auch der vollen Gewissheit in jedem konkreten Fall eine andere passend gewählte Zahl zuordnen, z.B. beim Würfeln die Zahl 6; dann würde der Gewissheitsgrad jeder der sechs möglichen Zahlen gleich 1 sein. Doch am einfachsten und natürlichsten ist es, glaube ich, der vollen Gewissheit immer die Zahl 1 zuzuordnen und den Gewissheitsgrad eines zufälligen Ereignisses mit derjenigen Zahl zu messen, die angibt, welcher Teil der vollen Gewissheit diesem Ereignis zukommt. Der Gewissheitsgrad eines unmöglichen Ereignisses ist natürlich gleich null; wenn also der Gewissheitsgrad eines zufälligen Ereignisses eine positive Zahl ist, so soll dies heißen, dass dieses Ereignis jedenfalls möglich ist, wenn auch seine Chancen vielleicht nicht eben hoch sind. An dieser Stelle möchte ich bemerken, dass ich dem Grad der Gewissheit eines Ereignisses den Namen Wahrscheinlichkeit gegeben habe. (...) Ich habe aber als Grundannahme meiner Theorie gewählt, dass jedem Ereignis, dessen Stattfinden nicht sicher, aber auch nicht* *ausgeschlossen ist, also jedem Ereignis, dessen Stattfinden von Zufall abhängt, eine bestimmte Zahl zwischen null und eins als seine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.«*

Pascal und Fermat fanden gemeinsam die Lösung über ein Zahlenschema, welches wir heute als *Pascalsches Dreieck* kennen und das die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ des binomischen Lehrsatzes

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

angibt. Ein so genannter Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ liefert uns die Anzahl der Möglichkeiten, aus n wohl unterschiedenen Gegenständen k auszuwählen. Ein populäres Beispiel für die Benötigung eines Binomialkoeffizienten ist das Lottospiel, wo man sich die Frage stellen kann, wie viele Möglichkeiten es gibt, um aus 49 Kugeln sechs Kugeln auszuwählen. Die Antwort ist $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten. Das Pascalsche Dreieck stellt die Binomialkoeffizienten in Pyramidenform dar. Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass ein Eintrag die Summe der zwei darüber stehenden Einträge ist (siehe Abbildung 1.3).

Im Pascalschen Dreieck kann man auch die von dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci nach der Kurzform von filius Bonacci, 1170–1240) entdeckten Fibonacci-Zahlen ablesen. Ursprünglich waren Fibonacci-Zahlen zur Ermittlung der Anzahl von Kaninchenpaaren gedacht, von denen jedes nach einer Reifezeit von einer Generation in jeder folgenden Generation ein weiteres Kaninchenpaar hervorbringt. Daher folgen sie der folgenden Zahlenfolge: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…, wobei jede Zahl (ab der dritten) gleich der Summe der beiden vorangehenden ist. Auch in der Natur, etwa bei den nach rechts und nach links gebogenen Spiralen in einer Sonnenblume, treten zahlreiche Phänomene als Fibonacci-Folgen auf.

Schließlich verkündete Pascal am 24. August 1654 die richtige Lösung. Damit war auch gleichzeitig der mathematische Kern des Risikobegriffs definiert. Pascal erkannte vor allem, dass sich nicht voraussagen lässt, welche Zahl ein Würfel zeigt, wenn nur einmal gewürfelt wird. Wird dagegen mehrere Tausend oder Millionen Mal gewürfelt, kann davon ausgegangen werden, dass man jede Zahl des Würfels gleich oft treffen wird. Diese Erkenntnisse hatten insbesondere große Auswirkungen auf die Versicherungsmathematik, da erst so ein Risiko kalkulierbar wird und der Geldbedarf sich schätzen lässt.

Andere Gelehrte griffen die Wahrscheinlichkeitstheorie von Pascal auf und entwickelten sie weiter. So veröffentlichte beispielsweise 1657 der niederländische Mathematiker, Physiker, Astronom und Uhrenbauer Christiaan Huygens (1629–1695) ein Buch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Titel »Tractatus de ratiociniis in aleae ludo«.

Untrennbar verbunden mit der Geschichte des Risikomanagements ist die Familiengeschichte der Baseler Gelehrtendynastie Bernoulli. Jacob Bernoulli (1654–1705) entwickelte mit seinem Bruder Johann (1667–1748) die höhere Mathematik der Infinitesimalrechnung und begründete die für die moderne Physik fundamentale

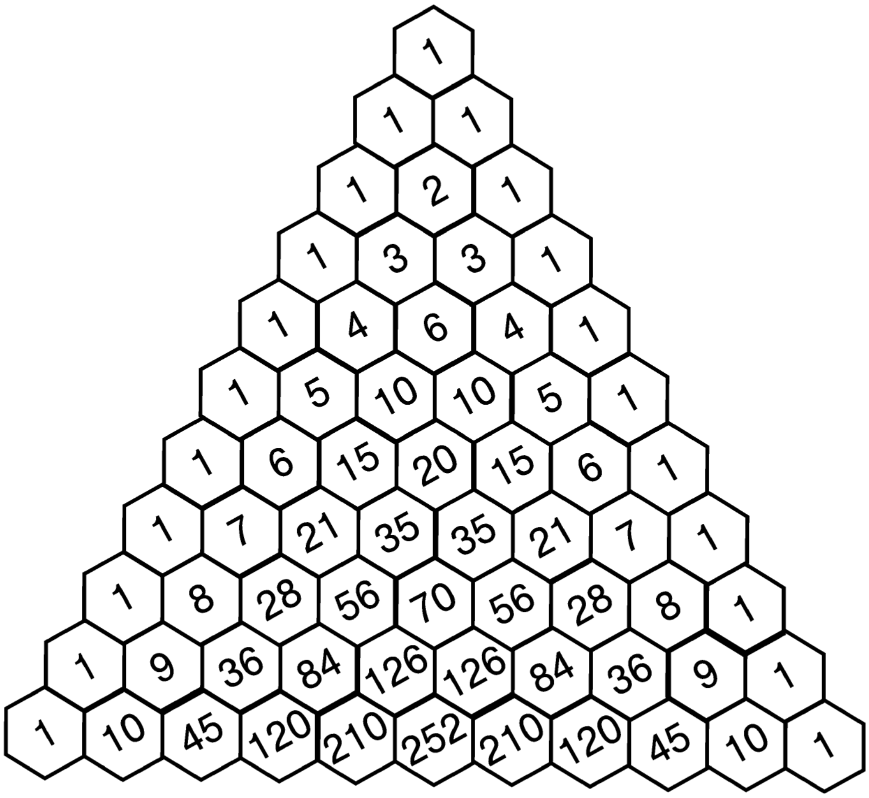

Abbildung 1.3: Das Pascalsche Dreieck

Variationsrechnung.[4] Im Jahr 1703 äußerte der deutsche Mathematiker und Philosoph Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716)[5] gegenüber Jacob Bernoulli, dass die »Natur Muster eingerichtet hat, die zur Wiederholung von Ereignissen führen, aber nur zum größten Teil«. Im Jahr 1713 erschien das Buch »Ars conjectandi« von Jacob Bernoulli zur Binomialverteilung und zum »Gesetz der großen Zahl« (Satz von Bernoulli).

Dieses »Grundgesetz« der privaten Versicherungswirtschaft ermöglicht eine ungefähre Vorhersage über den künftigen Schadensverlauf. Je größer die Zahl der versicherten Personen, Güter und Sachwerte, die von der gleichen Gefahr bedroht sind, desto geringer ist der Einfluss des Zufalls. Das »Gesetz der großen Zahl« kann aber nichts darüber aussagen, wer im Einzelnen von einem Schaden getroffen wird.

Bernoullis »Gesetz der großen Zahl« basierte auf der Vorstellung eines mit schwarzen und weißen Kieseln gefüllten Kruges, wobei das Verhältnis von schwarzen zu weißen Kieseln oder gleichbedeutend das Verhältnis der Anzahl der schwarzen zur Gesamtanzahl der Kiesel im Krug unbekannt sei. Prinzipiell wäre es möglich, die Kiesel schlichtweg abzuzählen. Bernoullis Ansatz war es jedoch, auf empirischem Wege das

4 Vgl. Romeike, F.: Jacob Bernoulli. In: *Risiko Manager*, Ausgabe 1/2007, S. 12–13.
5 Vgl. Romeike, F.: Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibnitz. In: *Risiko Manager*, Ausgabe 15/2007, S. 18.

tatsächliche Verhältnis von schwarzen und weißen Kieseln im Krug zu ergründen. Hierzu wird ein Kiesel aus dem Krug genommen, bei einem schwarzen die Zahl 1, bei einem weißen die Zahl 0 notiert, und der Kiesel wieder in den Krug zurückgelegt. Offenbar sind die Ziehungen X_k unabhängig voneinander, und wir können davon ausgehen, dass die A-priori-Wahrscheinlichkeit $P([X_k = 1])$, dass ein Kiesel bei einer beliebigen Ziehung schwarz ist, gerade p ist, also $P([X_k = 1])=p$. Bernoulli schließt nun, dass mit einer hohen Wahrscheinlichkeit das Verhältnis $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ der Anzahl der gezogenen schwarzen Kiesel zur Gesamtzahl der Ziehungen von dem tatsächlichen, aber unbekannten Verhältnis p nur geringfügig abweicht, sofern nur die Gesamtzahl der Ziehungen hoch genug ist. Die von Bernoulli entdeckte Gesetzmäßigkeit wird heute als das »schwache Gesetz der großen Zahlen« bezeichnet und lautet formal

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| > \varepsilon\right]\right) = 0$$

wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl sei.

Schließlich fasste Jacob Bernoulli seine Resultate zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der »Ars conjectansi« zusammen. In diesem Zusammenhang darf nicht unerwähnt bleiben, dass es nicht das Gesetz der großen Zahlen gibt. Stattdessen gibt es eine ganze Reihe von Grenzwertsätzen für Folgen von Zufallsvariablen, die Aussagen über das Verhalten dieser Zufallsvariablen machen, wenn immer mehr konkrete, beobachtete Realisationen betrachtet und berücksichtigt werden.

In diesem Zusammenhang sollte nicht unerwähnt bleiben, dass die zum Risikomanagementstandard avancierte, gleichzeitig aber auch nicht unumstrittene Methode des Value at Risk (VaR) Bernoullis Gesetz der großen Zahlen aufgreift. Der VaR bezeichnet dabei eine Methodik zur Quantifizierung von Risiken und wird unter anderem im Zusammenhang mit Marktpreisrisiken verwendet. Um aussagekräftig zu sein, muss zusätzlich immer die Haltedauer (etwa ein Tag) und das Konfidenzniveau (beispielsweise 98 Prozent) angegeben werden. Der VaR-Wert bezeichnet dann diejenige Verlustobergrenze, die innerhalb der Haltedauer mit einer Wahrscheinlichkeit entsprechend dem Konfidenzniveau nicht überschritten wird.

In den folgenden Jahrzehnten widmeten sich viele weitere Wissenschaftler wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen. So veröffentlichte der französische Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754) im Jahr 1718 »The Doctrine of Chances«. In dem Buch stellte er systematisch Methoden zur Lösung von Aufgaben vor, die mit Glücksspielen im Zusammenhang stehen. Außerdem untersuchte er die Beziehung zwischen Binomial- und Normalverteilung. Abraham de Moivre wies im Jahr 1730 als Erster auf die Struktur der Normalverteilung hin (auch als »Gaußsche Glockenkurve« bezeichnet). Die Normalverteilung ist die wichtigste aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen und unterstellt eine symmetrische Verteilungsform in Form einer Glocke, bei der sich die Werte der Zufallsvariablen in der Mitte der Verteilung konzentrieren und mit größerem Abstand zur Mitte immer seltener auftreten (siehe Abbildung 1.4).

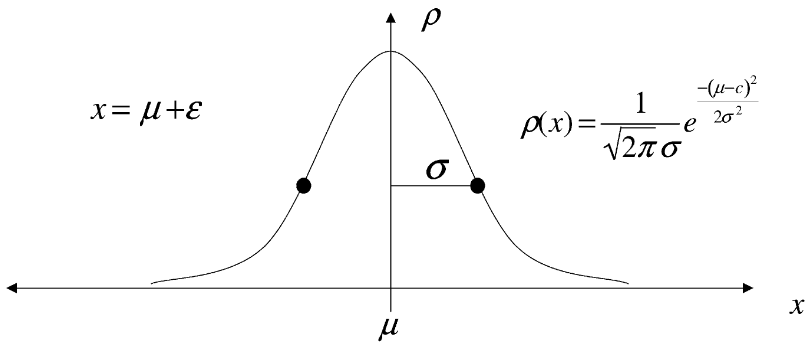

Abbildung 1.4: Die Gaußsche Normalverteilung

Ein einfaches Beispiel für normalverteilte Zufallsgrößen sind die kombinierten Ereignisse des Würfel- oder Münzwurfs (siehe Pascalsches Dreieck). Obwohl die Normalverteilung in der Natur recht selten vorkommt, ist sie für die Statistik von entscheidender Bedeutung, da die Summe von vielen unabhängigen, beliebig verteilten Zufallsvariablen annähernd normalverteilt ist. Je größer die Anzahl der Zufallsvariablen ist, desto besser ist die Annäherung an die Normalverteilung (Zentraler Grenzwertsatz). Sowohl die Normalverteilung als auch die von Abraham de Moivre entdeckte Standardabweichung sind wichtige Kernelemente der modernen Methoden zur Quantifizierung von Risiken und eine wesentliche Grundlage der modernen Risikotheorie und der Versicherungsmathematik.

Die Bedeutung der Normalverteilung in der Praxis der Versicherungswirtschaft basiert vor allem auf dem »Zentralen Grenzwertsatz«. Hierbei handelt es ich im Kern um eine »Familie« der Zentralen Grenzwertsätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Hierbei liegt die Aussage zugrunde, dass die Summe einer großen Zahl von unabhängigen Zufallsvariablen asymptotisch einer stabilen Verteilung folgt (»Portfolioprinzip« beispielsweise in der Versicherung). Bei endlicher und positiver Varianz der Zufallsvariablen ist die Summe annähernd normalverteilt. Oder anders formuliert: Die Verteilung des Mittelwerts von n unabhängigen Zufallszahlen aus einer beliebigen Verteilung mit endlichem Mittelwert μ und endlicher Standardabweichung σ nähert sich mit zunehmendem n immer mehr einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ an. Wenn beispielsweise eine Versicherung eine große Anzahl (von beispielsweise 100.000) unabhängigen (!) Risiken (etwas Kraftfahrzeug-Kaskorisiken) versichert, so erfolgt ein Ausgleich im Portfolio und in der Zeit. Das heißt, dass das gesamt Portfolio näherungsweise mit einer Normalverteilung (Mittelwert μ und Standardabweichung σ) beschrieben werden kann. Das einzelne Kaskorisiko eines Versicherungsnehmers hat keine Dominanz auf die Gesamtverteilung des Portfolios. Voraussetzung ist jedoch, dass gleichartige und unabhängige Risiken abgebildet werden. Dies ist häufig bei Bank- oder Versicherungsportfolien der Fall.

In diesem Kontext muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass »Risikomodelle«, die bei der Beschreibung von Risiken eine Normalverteilung unterstellen, (Extrem-)Risiken systematisch unterschätzen.

Auf praktisch allen Finanzmärkten kann empirisch beobachtet werden, dass die Wahrscheinlichkeit großer Verluste weitaus höher ist, als es die Gauß'sche Glockenkurve der Normalverteilung angibt. Deren Gestalt impliziert, dass bei einem Anstieg der Verlusthöhe die Eintrittswahrscheinlichkeit rapide sinkt. Emprisch kann jedoch nachgewiesen werden, dass die Wahrscheinlichkeit für hohe Verluste nur langsam abklingt - was als »fat tail«-Verteilung bezeichnet wird. Dieses Abklingen ist viel langsamer, als es durch eine Normalverteilung reflektiert wird. Die Normalverteilung wird daher auch als »thin-tailed« bezeichnet.

So konnte in Studien nachgewiesen werden, dass Modelle - die auf einer Normalverteilung beziehungsweise einer «geometrischen Brownschen Bewegung basieren - ein Börsencrash - wie etwa im Oktober 1987 - nur einmal in 10^{87} Jahren eintreten sollte. Die empirische Beobachtung zeigt uns jedoch, dass derartige Crashs etwa alle 38 Jahre vorkommen. Es kann außerdem gezeigt werden, dass aus einem 85-prozentigen Kapitalmarktcrash über einen Zeitraum von drei Jahren bei einer Normalverteilungsannahme (GBM-Modell) ein »1 in 100-Millionen-Jahre-Ereignis« wird.

Angeregt durch die publizierten Ergebnisse Abraham de Moivres hat der englische Mathematiker und presbyterianische Pfarrer Thomas Bayes (1702–1761) effektive Methoden im Umgang mit A posteriori-Wahrscheinlichkeiten (a posteriori: lateinisch, von dem, was nachher kommt) entwickelt. Der Satz von Bayes (auch als Bayes-Theorem bezeichnet) erlaubt in gewissem Sinn das Umkehren von Schlussfolgerungen. So wird beispielsweise von einem positiven medizinischen Testergebnis (Ereignis) auf das Vorhandensein einer Krankheit (Ursache) geschlossen oder von bestimmten charakteristischen Wörtern in einer E-Mail (Ereignis) auf die »Spam«-Eigenschaft (Ursache) geschlossen. In der Regel ist die Berechnung von $P(\text{Ereignis}|\text{Ursache})$ relativ einfach. Häufig wird jedoch $P(\text{Ursache}|\text{Ereignis})$ gesucht.

Der Satz von Bayes gibt an, wie man mit bedingten Wahrscheinlichkeiten rechnet, und lautet:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Hierbei ist $P(A)$ die A priori-Wahrscheinlichkeit (a priori: lateinisch, von dem, was vorher kommt) für ein Ereignis A und $P(B|A)$ die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis B unter der Bedingung, dass A auftritt. Thomas Bayes hat lediglich zwei mathematische Aufsätze hinterlassen, die erst nach seinem Tod von seinem Freund Richard Price im Jahr 1763 der Royal Society in London vorgelegt wurden und ihm zu einem späten Ruhm verhalfen.

Als Zar Peter I. im Jahr 1724 die Akademie der Wissenschaften (heute: Russische Akademie der Wissenschaften) ins Leben rief und die bedeutendsten ausländischen Fachgelehrten zu gewinnen suchte, waren die Brüder Niklaus II. und Daniel Bernoulli mit ihrem älteren Kollegen Jakob Hermann die Ersten am Platze (1725). Gewissermaßen in ihrem Kielwasser rückte der schweizerische Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) im Jahr 1727 nach. Euler war Schüler von Johann Bernoulli und hinterließ insgesamt fast 900 Arbeiten, die sowohl die reine und angewandte Mathematik als auch die Astronomie und die Physik betrafen.

Niklaus II. und sein Cousin Daniel beschäftigten sich unter anderem mit dem Petersburger Spiel, das die ökonomischen Wissenschaften und vor allem auch das Risikomanagement nachhaltig beeinflusst hat. Das Grundproblem und Prinzip soll an dem folgenden Beispiel skizziert werden:

Peter und Paul vereinbaren ein Münzwurfspiel nach folgenden Regeln. Fällt die Münze beim ersten Wurf so, dass die Seite A oben liegt, so wird Peter Paul einen Dukaten zahlen, und das Spiel ist beendet. Fällt dagegen die Münze so, dass die Seite B oben liegt, so wird die Münze ein zweites Mal geworfen. Sollte dann die Seite A erscheinen, dann zahlt Peter an Paul zwei Dukaten, und falls B erscheinen sollte, wird die Münze ein drittes Mal geworfen, wobei Paul dann vier Dukaten gewinnen kann. Bei jedem weiteren Wurf der Münze wird also die Zahl der Dukaten, die Peter an Paul zu zahlen hat, verdoppelt. Dieses Spiel wird so lange fortgesetzt, bis bei einem Wurf erstmals A erscheint. Dann ist das Spiel beendet. Endet das Spiel also nach n+1 Münzwürfen, so wird Peter an Paul $2^{(n-1)}$ Dukaten auszahlen.

- So erhält er nach einem Wurf $2^{(1-1)}$ = eine Dukate;
- nach zwei Würfen $2^{(2-1)}$ = zwei Dukaten;
- nach drei Würfen $2^{(3-1)}$ = vier Dukaten;
- nach vier Würfen $2^{(4-1)}$ = acht Dukaten;
- nach fünf Würfen $2^{(5-1)}$ = sechzehn Dukaten und so weiter.

Man gewinnt also $2^{(k-1)}$ Euro, wenn die Münze k-mal geworfen wurde.

Die Frage lautet nun: Wie viel soll ein Dritter an Paul für das Recht zahlen, seine Rolle in diesem Spiel zu übernehmen?

Wie viel kann man im Durchschnitt erwarten zu gewinnen? Mit Wahrscheinlichkeit 1/2 ist der Gewinn 1 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 1/4 ist er 2 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 1/8 ist er 4 Euro etc. Der Erwartungswert ist daher

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Diese Summe divergiert gegen unendlich, das heißt, im Mittel erwartet man daher einen unendlichen hohen Gewinn. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit, beispielsweise 512 Euro oder mehr zu gewinnen, sehr klein, nämlich gerade 1:512.

Die Konsequenz daraus erscheint paradox und Bernoulli weist auf dieses Problem auch hin: *»Die allgemein akzeptierte Berechnungsmethode [der Erwartungswert des Gewinns] schätzt Pauls Aussichten in der Tat unendlich hoch ein, [aber] keiner wäre bereit, [diese Gewinnchancen] zu einem gemäßigt hohen Preis zu erwerben (…). Jeder einigermaßen vernünftige Mensch würde seine Gewinnchancen mit großem Vergnügen für zwanzig Dukaten verkaufen.«*

Bernoulli widmet sich diesem Problem sehr intensiv und führt sehr ausführliche Analysen durch. Das skizzierte Phänomen war Gegenstand der im Jahr 1738 in Latein gehaltenen Abhandlung »Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis« – die Darlegung einer neuen Theorie zum Messen von Risiko, die er der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften vorlegte. Die Arbeit gilt unbestritten als die erste Publikation, die sich bewusst mit dem Messen und damit mit dem Management von Risiko auseinandersetzt. Vor allem geht es aber um die Analyse des Petersburger Spiels:

Offenbar sind die einzelnen Münzwürfe unabhängig voneinander. Das Ereignis A tritt dabei mit der Wahrscheinlichkeit $P(A)=1-p$ ein, das Ereignis B entsprechend mit der Wahrscheinlichkeit $P(B)=p$, wobei $0<p<1$ sei. Betrachten wir nun die Zufallsvariable X, die angibt, bei welchem Wurf erstmals das Ereignis A auftritt, so wissen wir, dass das Ereignis $[X=n]$ – welches nichts anderes besagt, als dass die Seite A beim n-ten Wurf erstmals oben liegen möge – die Wahrscheinlichkeit

$$P([X=n]) = p^{n-1}(1-p)$$

besitzt. Die Zufallsvariable X ist dabei auf die Menge N der natürlichen Zahlen konzentriert, das heißt

$$P([X \in \mathbf{N}]) = \sum_{n \in \mathbf{N}} P([X=n]) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k(1-p) = 1$$

Dies bedeutet, dass das Spiel fast sicher nach endlich vielen Würfen abbrechen wird, ganz gleich, wie wir die Wahrscheinlichkeit p ansetzen werden. Wann dies der Fall sein wird, liegt dadurch aber nicht fest. Die Auszahlung bei diesem Spiel wird durch die Zufallsvariable 2^{X-1} beschrieben, deren Erwartungswert sich als

$$E2^{X-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k p^k (1-p)$$

berechnen lässt.

1730 erhielt Leonhard Euler eine Professur für Physik an der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften, wurde 1733 schließlich Nachfolger von Daniel Bernoulli und übernahm die Professur für Mathematik. Euler verband unter anderem theoretische Probleme der Völkerkunde und des Versicherungswesens mit Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auch ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (beispielsweise e, π, Summenzeichen Σ, $f(x)$ als Darstellung für eine Funktion).

Außerdem führte er zusammen mit dem Probst der Lutherisch-Brandenburgischen Kirche, Johann Peter Süßmilch (1707–1767), Berechnungen der Lebenserwartung durch, die noch bis ins 19. Jahrhundert von Versicherungsgesellschaften bei der Kalkulation von Lebensversicherungsprämien verwendet wurden. Bekannt wurde Süßmilch vor allem durch einen im Jahr 1741 veröffentlichten Klassiker der Demographie. »Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod und Fortpflanzung desselben erwiesen« war das erste systematische Werk der Bevölkerungswissenschaft. Süßmilch prägte den Begriff der »Tragfähigkeit der Erde« und kam basierend auf seinen Untersuchungen zu der Prognose, dass die Erde ein Vielfaches der damals lebenden Menschenzahl »tragen« (im Sinne von ernähren) könne, nämlich sieben Milliarden. Dieses Ergebnis erhöhte er nach einer Überprüfung seiner Berechnungen in der zweiten Ausgabe seines Werkes von 1765 auf vierzehn Milliarden Menschen.

Die Erkenntnis, dass man die Gegenwart systematisch an eine unbekannte und riskante Zukunft koppeln kann, hat sich erst langsam in den vergangenen 500 Jahren durchgesetzt. Ohne diese Erkenntnis und die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie anderer mathematischer Werkzeuge wären weder das moderne Versicherungswesen noch das Risikomanagement entstanden. Alle modernen mathematischen Methoden im Risikomanagement (von der Spieltheorie über Dynamic Financial Analysis bis zur Chaostheorie) basieren im Wesentlichen auf den Erkenntnissen, die zwischen 1654 und 1760 gemacht wurden. Ohne die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gäbe es die moderne Physik, Biologie, Astronomie beziehungsweise Wirtschafts- und Sozialwissenschaften nicht. Setzten wir heute noch auf die Prophezeiungen des Orakels, so gäbe es weder moderne Kapitalmärkte noch entwickelte Volkswirtschaften.

Ein Wunderkind revolutioniert die Methoden der Risikoquantifizierung

Der Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker Johann Carl Friedrich Gauß (siehe Abbildung 1.5, 1777-1855) setzte auf den Ergebnissen von Jakob Bernoulli, de Moivre und Bayes auf und beschäftigte sich unter anderem mit Forschungen über die Wahrscheinlichkeit, dem Gesetz der großen Zahl und der Stichprobennahme. Obwohl er sich nicht für das praktische Risikomanagement oder das Versicherungswesen interessierte, so sind seine wissenschaftlichen Erkenntnisse für die modernen Methoden der Risikoquantifizierung und -steuerung von elementarer Bedeutung.

Abbildung 1.5: 1856 ließ der König von Hannover Gedenkmünzen mit dem Bild von Gauß und der Inschrift »Mathematicorum Principi« (lat.: »dem Fürsten der Mathematiker«) prägen.[6]

6 Quelle: Romeike, Frank/Hager, Peter (2013): Erfolgsfaktor Risikomanagement 3.0: Lessons learned, Methoden, Checklisten und Implementierung, 3. komplett überarbeitete Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden 2013, S. 37.

Gauß galt als Wunderkind. Später sagte er von sich selbst, er habe das Rechnen vor dem Sprechen gelernt. Sein Leben lang behielt er die Gabe, selbst komplexeste Rechnungen im Kopf durchzuführen. In der Volksschule stellte sein Lehrer den Schülern als Beschäftigung die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu summieren. Gauß hatte sie allerdings nach kürzester Zeit gelöst, indem er 50 Paare mit der Summe 101 bildete ($1 + 100$, $2 + 99$, …, $50 + 51$) und 5050 als Ergebnis erhielt. Die daraus resultierende Formel wird gelegentlich auch als »der kleine Gauß« bezeichnet. Er soll so ein fantastisches Zahlengedächtnis gehabt haben, dass er die Logarithmentafeln auswendig kannte.

Gauß misstraute bereits mit zwölf Jahren der Beweisführung in der elementaren Geometrie und ahnte mit sechzehn Jahren, dass es neben der euklidischen noch eine andere, nicht-euklidische Geometrie geben muss.

Im Alter von achtzehn Jahren entdeckte er einige Eigenschaften der Primzahlverteilung und fand die Methode der kleinsten Quadrate, bei der es darum geht, die Summe der Quadrate von Abweichungen zu minimieren. Nach ihr lässt sich etwa das wahrscheinlichste Ergebnis für eine neue Messung aus einer genügend großen Zahl vorheriger Messungen ermitteln. Auf dieser Basis untersuchte er später Theorien zur Berechnung von Flächeninhalten unter Kurven (numerische Integration), die ihn zur Gaußschen Glockenkurve gelangen ließen (siehe Abbildung 1.4). Die zugehörige Funktion ist bekannt als die Standardnormalverteilung[7] und wird bei vielen Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und im Risikomanagement von Versicherungsunternehmen (etwa bei der Berechnung des Value at Risk basierend auf dem Varianz-Kovarianz-Ansatz) angewandt, wo sie die (asymptotische, das heißt für genügend große Datenmengen) Verteilungsfunktion von zufällig um einen Mittelwert streuenden Daten ist. Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz[8], der besagt, dass eine Summe von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen im Grenzwert $n \to \infty$ normalverteilt ist. Das bedeutet, dass man Zufallsvariablen dann als normalverteilt ansehen kann, wenn sie durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, wobei jede einzelne Einflussgröße einen im Verhältnis zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert.

Mit 18 Jahren – am 29. März 1796, wenige Tage vor seinem neunzehnten Geburtstag – entdeckte er bestimmte Eigenschaften in der Geometrie des regelmäßigen 17-Ecks und lieferte damit die erste nennenswerte Ergänzung euklidischer Konstruktionen seit 2000 Jahren.[9] So konnte er nachweisen, dass ein regelmäßiges Siebzehneck konstruierbar ist,

7 Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch Gauß-Funktion, Gauß-Kurve, Gauß-Glocke oder Glockenkurve genannt.

8 Bei den Zentralen Grenzwertsätzen handelt es sich um eine Familie schwacher Konvergenzaussagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Allen gemeinsam ist die Aussage, dass die (normierte und zentrierte) Summe einer großen Zahl von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen annähernd (standard-) normalverteilt ist. Dies erklärt auch die Sonderstellung der Normalverteilung.

9 Das Siebzehneck (Heptadekagon) ist eine geometrische Figur, die zur Gruppe der Vielecke (Polygone) gehört. Es ist definiert durch siebzehn Punkte, welche durch siebzehn Strecken zu einem geschlossenen Linienzug verbunden sind. Hier geht es um das regelmäßige Siebzehneck, welches siebzehn gleichlange Seiten hat und dessen Ecken auf einem gemeinsamen Umkreis liegen.

das heißt, es kann unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal (den Euklidischen Werkzeugen) gezeichnet werden.

Außerdem führte er 1796 mit den lemniskatischen Sinusfunktionen die historisch ersten, heute so genannten elliptischen Funktionen ein. Diese Arbeiten stehen in Zusammenhang mit seiner Untersuchung des arithmetisch-geometrischen Mittels.

Gauß erfasste früher als andere Wissenschaftler den besonderen Nutzen komplexer Zahlen. So enthält seine Doktorarbeit aus dem Jahr 1799 einen strengeren Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dieser Satz besagt, dass jede algebraische Gleichung mit Grad größer als Null mindestens eine reelle oder komplexe Lösung besitzt. Den älteren Beweis d'Alemberts (eigentlich Jean-Baptiste le Rond, genannt d'Alembert, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, * 16. November 1717 in Paris; † 29. Oktober 1783) kritisierte Gauß als ungenügend, aber auch sein eigener Beweis erfüllt noch nicht die späteren Ansprüche an topologische Strenge.

Die 1801 erschienenen Disquisitiones wurden grundlegend für die weitere Entwicklung der Zahlentheorie, zu der einer seiner Hauptbeiträge der Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes war, das die Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen »mod p« beschreibt und für das er im Laufe seines Lebens fast ein Dutzend verschiedene Beweise fand. Neben dem Aufbau der elementaren Zahlentheorie auf modularer Arithmetik findet sich in seinem Werk auch eine Diskussion von Kettenbrüchen und der Kreisteilung, mit einer berühmten Andeutung über ähnliche Sätze bei der Lemniskate und anderen elliptischen Funktionen.

Den wertvollsten Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie erarbeitete Gauß bei geodätischen Messungen.[10] Im Kern ging es um die Fragestellung, wie sich unter Berücksichtigung der Erdkrümmung genauere geografische Messungen erzielen lassen. Erste Erfahrungen bei der Landvermessung sammelte er zwischen den Jahren 1797 und 1801, als er dem französischen Generalquartiermeister Lecoq bei dessen Landesvermessung des Herzogtums Westfalens als Berater zur Seite stand. Im Jahr 1816 beauftragte ihn der König von Dänemark mit der Durchführung einer Breitengrad- und Längengradmessung. Schließlich leitete Gauß zwischen 1818 und 1826 die Landesvermessung des Königreichs Hannover. Da es unrealistisch ist, jeden einzelnen Quadratzentimeter der Erdoberfläche zu vermessen, nimmt die Geodäsie auf der Grundlage von Stichproben (bzw. Probemessungen) innerhalb des Untersuchungsgebiets Schätzungen vor. Als Gauß die Verteilung dieser Schätzungen untersuchte, fiel ihm auf, dass sie stark variierten, sich mit zunehmender Anzahl jedoch anscheinend um einen zentralen Punkt gruppierten. Dieser zentrale Punkt war der Mittelwert. Außerdem erkannte Gauß, dass sich die Messgrößen mit größerer Anzahl der Normalverteilungskurve annäherten, die Moivre 83 Jahre zuvor bereits entdeckt hatte. Die Normalverteilung wiederum steht im Zentrum vieler moderner Methoden des Risikomanagements.

10 Vgl. Worbs, E.: Carl Friedrich Gauss: ein Lebensbild, Koehler&Amelang, Leipzig 1955 sowie Kehlmann, D.: Die Vermessung der Welt, Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg 2005.

Durch die von ihm erfundene Methode der kleinsten Quadrate und die systematische Lösung umfangreicher linearer Gleichungssysteme (Gaußsches Eliminationsverfahren) gelang ihm eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit.

So berichtet etwa der Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (* 13. Februar 1805 in Düren, † 5. Mai 1859 in Göttingen), er hätte die Disquisitiones sein Leben lang bei der Arbeit stets griffbereit gehabt. Das Gleiche gilt für seine beiden Arbeiten über biquadratische Reziprozitätsgesetze von 1825 und 1831, in denen er auch die Gaußschen Zahlen[11] einführt. Kurzum: Gauß war zur damaligen Zeit ein weltberühmter Mathematiker. So wird etwa berichtet, dass Napoleon die französische Armee, die im Jahr 1807 Göttingen näher rückte, anwies, die Stadt zu schonen, »weil dort der größte Mathematiker alle Zeiten wohnt«.[12]

Gauß hielt eine große Anzahl an wissenschaftlichen Forschungen und mathematischen Entdeckungen zurück, so dass Mathematiker nach ihm diese Erkenntnisse neu entdecken mussten, die er bereits erarbeitet hatte. Außerdem legte Gauß in seinen Publikationen das Schwergewicht auf die Ergebnisse und weniger auf die Methodologie, so dass Forschungskollegen oft gezwungen waren, nach dem Weg zu fahnden, auf dem Gauß zu seinen Schlussfolgerungen gelangt war.

Die Theorie des Zufalls von Laplace

Ähnlich wie Demokrit schrieb mehr als 2000 Jahre später der französische Mathematiker und Astronom Pierre Simon de Laplace (1749-1827, siehe Abbildung 1.6), dass die Menschen »in Unkenntnis ihres Zusammenhanges mit dem Weltganzen« Ereignisse, die ohne sichtbare Ordnung eintreten, stets vom Zufall abhängen lassen.[13] Laplace studierte zunächst ab dem Jahr 1766 Theologie und Philosophie am Jesuiten-Kolleg von Caen. Dort wurden die Professoren Christoph Gadblet und Pierre Le Canu auf ihn aufmerksam und öffneten seine Augen für die bunte und spannende Welt der Mathematik. Zwei Jahre später, im Jahr 1768, verließ Laplace das Jesuiten-Kolleg ohne Abschluss und ging mit einem Empfehlungsschreiben zu Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) nach Paris. D'Alembert war zur damaligen Zeit der berühmteste Mathematiker Frankreichs und – gemeinsam mit Diderot (1713-1784) – Herausgeber des mathematischen Teils der Encyclopédie[14].

11 Die Gaußschen Zahlen sind eine Verallgemeinerung der ganzen Zahlen auf die komplexen Zahlen.

12 Vgl. Bernstein, P. L.: Wider die Götter – Die Geschichte von Risiko und Riskmanagement von der Antike bis heute, München 1997, S. 173-174.

13 Vgl. Romeike, F.: Pierre-Simon (Marquis de) Laplace, in: Risiko Manager, Ausgabe 3/2007, S. 20.

14 Die »Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers« war als Sammlung des gesamten Wissens der Zeit konzipiert; der Titel umschreibt Enzyklopädie mit »dictionnaire raisonné«, »vernünftig aufgebautes (kritisch durchdachtes) Wörterbuch«. So schreibt Diderot: »Tatsächlich zielt eine Enzyklopädie darauf ab, die auf der Erdoberfläche verstreuten Kenntnisse zu sammeln, das allgemeine System dieser Kenntnisse den Menschen darzulegen, mit denen wir zusammenleben, und es den nach uns kommenden Menschen zu überliefern, damit die Arbeit der vergangenen Jahrhunderte nicht nutzlos für die kommenden Jahrhunderte gewesen sei; damit unsere Enkel nicht nur gebildeter, sondern gleichzeitig auch tugendhafter und glücklicher werden, und damit wir nicht sterben, ohne uns um die Menschheit verdient gemacht zu haben.«

Als Bewerbungstest gab d'Alembert dem jungen Laplace eine komplexe mathematische Aufgabe mit, die dieser innerhalb einer Woche lösen sollte. Laplace klopfte jedoch bereits am nächsten Tag wieder an d'Alemberts Tür. Auch die neuen und schwierigeren Aufgaben, die d'Alembert ihm mit auf den Weg gab, löste er schnell und ohne Probleme. Tief beeindruckt von Laplace, verschaffte d'Alembert im Jahr 1771 dem jungen Laplace eine Stelle als Lehrer für Geometrie, Trigonometrie, elementare Analysis und Statistik an der Pariser Militärakademie. In dieser Zeit verfasste Laplace Schriften rund um die Themen Extremwertprobleme, Astromechanik, Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeits- und Spieltheorie sowie zur Integralrechnung.

Abbildung 1.6: In seinem zweibändigen Buch Théorie Analytique des Probabilités (1812) gab Laplace eine Definition der Wahrscheinlichkeit und befasste sich mit abhängigen und unabhängigen Ereignissen, vor allem in Verbindung mit Glücksspielen.[15]

Laplace trug insbesondere auch zur Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei und lieferte wichtige analytische »Werkzeuge«, wie beispielsweise die Theorie der erzeugenden Funktionen und die Methode der rekursiven Reihen. In seiner im Jahr 1812 erschienenen zweibändigen Publikation *Théorie Analytique des Probabilités* fasste er die neuen Erkenntnisse zusammen. In den Bänden behandelte er u. a. den Erwartungswert sowie die Sterblichkeit und die Lebenserwartung und widerlegte vor allem die von vielen Mathematikern vertretene These, dass eine strenge mathematische Behandlung der Wahrscheinlichkeit nicht möglich sei.[16]

»Die Theorie des Zufalls (des hasards) besteht darin, alle Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle zurückzuführen, d. h. auf solche, über deren

15 Quelle: Romeike, Frank/Hager, Peter (2013): Erfolgsfaktor Risikomanagement 3.0: Lessons learned, Methoden, Checklisten und Implementierung, 3. komplett überarbeitete Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden 2013, S. 40.

16 Vgl. Romeike, F.: Pierre-Simon (Marquise de) Laplace, in: Risiko Manager, Ausgabe 3/2007, S. 20.

Existenz wir in gleicher Weise im Unklaren sind, und dann die Zahl der Fälle zu bestimmen, die dem Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit man sucht, günstig sind. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit, die also nur ein Bruch ist, dessen Zähler die Zahl der günstigen Fälle, und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist.«, so Laplace in seinem im Jahr 1814 erschienenen Werk *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten.*

»Der hier gegebene Begriff der Wahrscheinlichkeit setzt voraus, dass, wenn man die Zahl der günstigen Fälle und die aller möglichen Fälle in gleichem Verhältnis wachsen lässt, die Wahrscheinlichkeit dieselbe bleibt. Um sich davon zu überzeugen, stelle man sich zwei Urnen A und B vor, von denen die erste vier weiße und zwei schwarze Kugeln enthält, und die zweite nur zwei weiße und eine schwarze Kugel einschließt. Nun denke man sich, dass die zwei schwarzen Kugeln der ersten Urne an einen Faden gebunden sind, der in dem Momente reißt, wo man die eine von ihnen ergreift, um sie herauszuziehen, und dass die vier weißen Kugeln zwei ähnliche Systeme bilden. Alle Chancen, welche bewirken, dass eine der Kugeln des schwarzen Systems ergriffen wird, werden eine schwarze Kugel herausbringen. Wenn man sich jetzt vorstellt, dass die Fäden, welche die Kugeln verbinden, nicht reißen, so ist klar, dass die Zahl aller möglichen Chancen sich ebenso wenig ändern wird als die dem Herausziehen schwarzer Kugeln günstigen Chancen; nur wird man aus der Urne zwei Kugeln auf einmal herausziehen; die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus der Urne herauszuziehen, wird also dieselbe sein wie früher. Aber dann hat man augenscheinlich den Fall der Urne B mit dem einzigen Unterschiede, dass die drei Kugeln dieser letzteren Urne ersetzt sind durch drei Systeme von je zwei Kugeln, die unveränderlich miteinander verbunden sind.«

Wie ein Virtuose beherrschte Laplace den Kalkül der Infinitesimalrechnung. So untersuchte er partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung auf ihre Lösungsmöglichkeit, ersann die Kaskadenmethode – ein Lösungsverfahren für hyperbolische Differentialgleichungen – und befasste sich mit partiellen Differenzengleichungen. Laplace füllte den Werkzeugkasten des modernen Risikomanagements mit äußerst wertvollen Werkzeugen.

Der unterschätzte Wegbereiter in der Theorie der stochastischen Prozesse

Als Geburtsstunde der modernen Finanzmathematik gilt heute das Jahr 1900, da in diesem Jahr Louis Bachelier (1870-1946) seine Dissertation *Théorie de la spéculation* veröffentlichte.

Im Jahr 1900 stand Louis Bachelier vor seinem Doktorvater Henri Poincaré (1854-1912) – dem zur damaligen Zeit wohl berühmtesten Mathematiker, Physiker und Philosophen – und musste seine letzten Prüfungen absolvieren. Die Ausbildung des jungen Mathematikers Bachelier war zuvor bestenfalls mittelmäßig gewesen, was vor allem damit zusammenhing, dass er im Alter von 19 Jahren Vater und Mutter verlor und im Geschäft seiner Familie arbeiten musste. Die erste Prüfung war ein mündliches Examen zu einem vorher gewählten Standardthema. Bachelier hatte sich für Fragen rund um die Mechanik von Flüssigkeiten entschieden. Geprüft wurden sowohl rhetorische als auch fachliche Fähigkeiten. Dem Abschlussbericht des Prüfungsgremiums zufolge hatte Bachelier das Thema »tiefgreifend erfasst«. Der zweite und wesentliche Teil seines Examens beschäftigte sich mit seinem eigenen Forschungsgebiet, der »Théorie de la spéculation«, einer Untersuchung des Handels von Regierungsanleihen an der Pariser Börse. Zur damaligen Zeit hatte der Handel bzw. das Glücksspiel mit Wertpapieren in Frankreich einen eher fragwürdigen Ruf. Erst 15 Jahre zuvor waren dort Termingeschäfte mit Währungen legalisiert worden. Leerverkäufe, also der Verkauf geliehener Wertpapiere in der Hoffnung, von fallenden Preisen zu profitieren, war absolut tabu. Und insgesamt wurde zur damaligen Zeit die akademische Welt Frankreichs von einer elitären Institution beherrscht, in der Außenseiter und Querdenker – als der auch Louis Bachelier galt – kaum geduldet wurden.

Dementsprechend waren Poincaré und die Kollegen des Prüfungsausschusses nicht gerade begeistert von den Ausführungen Bacheliers. Wie Poincaré in einem Bericht über die Doktorarbeit anmerkte, lag »der von Louis Bachelier gewählte Gegenstand ein wenig abseits von jenen, die unsere Kandidaten gewöhnlich behandeln«. Jedoch lobte er einige der »originellen« Einsichten der Arbeit und schlug vor, dass die ungewöhnlichste von diesen noch weiter ausgebaut werden sollte. Schlussendlich wurde die Arbeit mit »mention honorable« (d. h. mit Auszeichnung) bewertet, erreichte jedoch nicht die bessere »mention très honorable«, die Bachelier den Eintritt in die illustren akademischen Kreise gesichert hätte. Seine Dissertation kam erst fünfzig Jahre später – mehr durch einen Zufall – wieder ans Tageslicht und beeinflusste die moderne Finanz- und Risikotheorie maßgeblich.

Im Jahr 1926 wurde in Dijon, wo Bachelier bereits früher einmal gearbeitet hatte, eine Stelle als Professor frei. Sein Rivale um den Lehrstuhl, George Cerf, war ein junger und ehrgeiziger Mathematiker, der aber vor allem über wichtige Kontakte nach Paris und zum amtierenden Mathematikprofessor in Dijon, Maurice Gevrey, verfügte. Da dieser wohl eine leidenschaftliche Abneigung gegen Bachelier hegte, prüfte er das Werk Bacheliers gründlich und fand auch einen – im Gesamtkontext – marginalen Fehler. Als schließlich das Berufungskommitee zusammentraf, konnte Gevrey einen Brief des herausragenden Wahrscheinlichkeitstheoretikers Paul Pierre Lévy (1886-1971) vorweisen, in dem dieser Fehler bestätigt wurde. Er hatte nur die von Gevrey hervorgehobene Stelle und nicht die gesamte Abhandlung gelesen. Im Jahr 1931 entschuldigte sich Lévy bei Bachelier für den (fälschlicherweise) attestierten Fehler, dass *»der von einem einzigen anfänglichen Fehler hervorgerufene Eindruck mich wirklich davon abgehalten hat, eine Arbeit weiterzulesen, die so viele interessante Ideen enthält«.*[17]

17 Vgl. Romeike, F.: Louis Bachelier, in: Risiko Manager, Ausgabe 21/2007, S. 24-26.

So arbeitete Bachelier bis zum Ausbruch des ersten Weltkriegs als Stipendiat und »freier Dozent« an der Sorbonne und nahm nach dem Krieg und 27 Jahre nach der Veröffentlichung seiner Doktorarbeit eine Professur an der kleinen Universität in Besançon an. Bachelier starb im Jahr 1946 eher unbekannt, obwohl seine Arbeit nicht nur den Grundstein für die deskriptive Theorie der Finanzmärkte lieferte, sondern auch Pionierarbeit zur systematischen Erforschung der mathematischen Theorie der Diffusionsprozesse leistete.

In seinen Arbeiten behauptete Bachelier, dass Aktienkurse rein zufällig verlaufen: Wie ein Betrunkener, dessen Schritte zufällig nach rechts oder nach links vom Weg abweichen, bewegen sich Aktienkurse in einem unvorhersagbaren Zick-Zack. Im Durchschnitt – genau wie beim Münzwurf – gelangt er nirgendwohin.[18] Wenn man also nur den Mittelwert betrachtet, bleibt sein zufallsbestimmter Spaziergang für immer auf den Ausgangspunkt beschränkt. Und das wäre auch die bestmögliche Vorhersage für seine künftige Position zu jedem beliebigen Zeitpunkt. Der eindimensionale Random Walk ist ein Bernoulli-Prozess, das heißt eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Versuchen; er führt zu einer Binomialverteilung.

Eine beliebte Veranschaulichung von Zufallsbewegungen bzw. Irrfahrten lautet etwa wie folgt: Ein desorientierter Fußgänger läuft in einer Gasse mit einer Wahrscheinlichkeit p einen Schritt nach vorne, mit einer Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ einen Schritt zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nach n Schritten eine Strecke X zurückgelegt hat? Die Antwort gibt die folgende Gleichung:

$$P(X = -n + 2k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Der von Bachelier beschriebene »Random Walk« der Aktienkurse schockierte zur damaligen Zeit die Welt der Ökonomen. Wie kann es sein, dass Aktienkurse, welche doch durch rationale Investitionsentscheidungen determiniert werden, rein zufällig sind?

Auch der Kurs einer Anleihe wird – sofern neue Marktinformationen fehlen, die den Kurs in die eine oder andere Richtung treiben – im Durchschnitt um seinen Ausgangspunkt schwanken. Kurzum: Der heutige Kurs ist die beste Vorhersage. Keine Kursänderung hängt mit der vorhergehenden zusammen. Die Kursänderungen bilden eine Reihe unabhängiger und gleichverteilter Zufallsvariablen. Bachelier zeichnete alle Änderungen der Anleihenkurse über einen Monat bzw. ein Jahr auf und kam zu dem Ergebnis, dass sie die Form der Gauß'schen Glockenkurve (siehe Abbildung 1.4) annahmen, d. h. kleine Änderungen häufen sich im Zentrum der Glocke, die wenigen großen Änderungen liegen an den Rändern. Und so kam es, dass die von Gauß

18 Vgl. Bachelier, L.: Théorie de la Spéculation, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3rd. Ser. 17/1900, 21-88. (Translated in: The Random Character of Stock Market Prices, edited by Paul Cootner (1964), Cambridge/Massachusetts) sowie Bachelier, L./Samuelson, P. A./Davis, M. et al.: Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance, Princeton NJ 2006 sowie De Bondt, W./Thaler, R.: Does the Stock Market Overreact?, in: Journal of Finance, 40/1985, S. 793-805.

entwickelte Normalverteilung – basierend auf den Untersuchungen von Bachelier – auch auf die Finanzmärkte angewendet wurde.

Bereits viele Jahre zuvor, im Jahr 1827, hatte der schottische Botaniker Robert Brown (1773-1858) die Beobachtung gemacht, dass sich Blütenstaubkörner oder andere kleine Teilchen, die in Wasser gelegt wurden, durch »Zittern« bewegen. Die Erklärung für diese Bewegungen liefern die Moleküle des Wassertropfens, die permanent von allen Seiten gegen die größeren, sichtbaren Pollenteilchen stoßen.[19] Im Bereich der Finanzwirtschaft werden Kursentwicklungen nicht durch physische, sondern durch informative Zusammenstöße induziert. Gute Nachrichten führen zu Kurssteigerungen und vice versa. Heute ist diese Erkenntnis unter dem Terminus »Brown'sche Bewegung« bekannt.

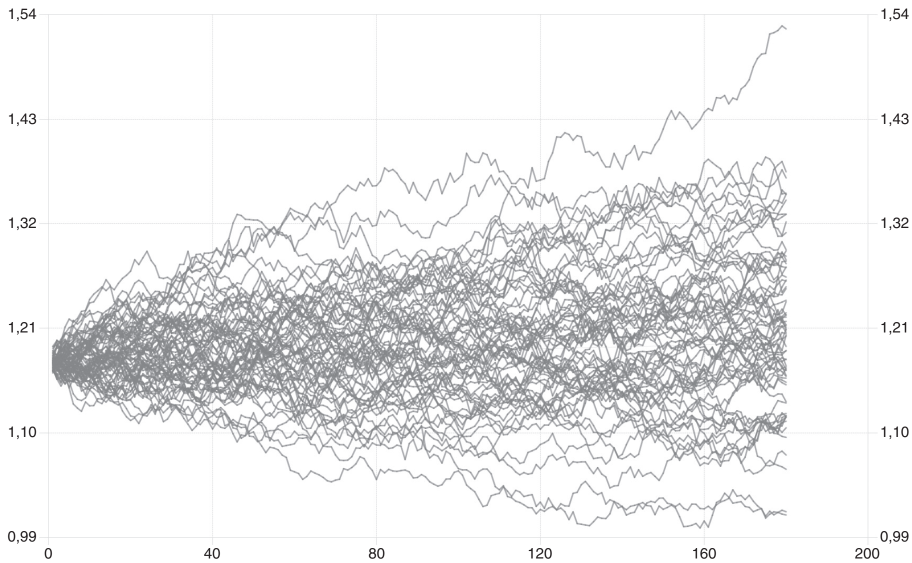

Abbildung 1.7: Simulation mehrerer Random Walks über einen Zeitraum von 180 Tagen am Beispiel EUR/USD basierend auf einer geometrischen Brownschen Bewegung[20]

Wie sich erst Jahrzehnte später herausstellte, war Louis Bachelier seiner Zeit weit voraus: In seiner Arbeit operierte er schon mit dem Wiener Prozess, fünf Jahre bevor Albert Einstein diesen – wohl zum zweiten Mal – entdeckte.[21] Auch gab Bachelier explizite Preisformeln für Standard- (Put- und Call-) Optionen und Barrier-Optionen an, 73 Jahre bevor dies den Wirtschaftswissenschaftlern Fischer Sheffey Black (1938-1995) und Myron Samuel Scholes (1941) gelang. Basierend auf seinen Arbeiten errichteten Wirtschaftswissenschaftler eine ausgefeilte und umfassende Theorie der Finanzmärkte und des Risikomanagements, das heißt wie Kurse sich ändern, wie Investoren denken und wie man Risiko als die ruhelose Seele des Marktes versteht.

19 Im Jahr 1860 konnte dies durch die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung mathematisch exakt beschrieben werden.
20 Quelle: Eigene Abbildung
21 Vgl. Romeike, F.: Louis Bachelier, in: Risiko Manager, Ausgabe 21/2007, S. 24-26.

Bacheliers Lehren fanden an der Wall Street bereitwillig Schüler und wurden »zum Katechismus für das, was man heute als ›moderne‹ Finanztheorie bezeichnet«, so der Mathematiker und Erfinder der fraktalen Geometrie, Benoît B. Mandelbrot (1924-2010).[22] Ihre breiter gefassten Grundsätze definieren immer noch den Rahmen, in dem ein großer Teil der Geldströme auf der Welt dargestellt wird. Der Wirtschaftswissenschaftler Paul H. Cootner merkt in diesem Kontext an, das Bacheliers Werk so herausragend war, »dass wir sagen können, die Untersuchung spekulativer Kurse habe ihren größten Moment in dem Augenblick erlebt, als sie konzipiert wurde.«

So geht auch der Ansatz des CAPM (Capital Asset Pricing Model), der in den frühen sechziger Jahren von William F. Sharpe (1934) entwickelt wurde, auf die Ansätze von Bachelier zurück. Ebenfalls zu den von Bachelier angeregten Werkzeugen gehört die Moderne Portfoliotheorie, die in den fünfziger Jahren von Harry M. Markowitz (1927) entwickelt wurde.

Der Ansatz von Bachelier wurde im Jahr 1956, zehn Jahre nach seinem Tod, von Paul Anthony Samuelson (1915-2009), dem Träger des Wirtschaftsnobelpreises des Jahres 1970, aufgegriffen und in exponentieller Form als geometrische Brownsche Bewegung zur Beschreibung von Aktienkursen etabliert.[23] Auch das in der Finanzwirtschaft benutzte Optionsbewertungsmodell von Black und Scholes geht davon aus, dass die Aktienpreisprozesse mit dem Bachelier-Modell modellierbar sind. Robert C. Merton[24] (1944) revolutionierte Anfang der siebziger Jahre die Finanzmarkttheorie durch Einführung zeitstetiger stochastischer Prozesse – basierend auf den Erkenntnissen Bacheliers. Dies führte zu einem Durchbruch in diversen Bereichen der Finanzmärkte, unter anderem bei der Portfolioselektion, beim Design dynamischer Hedging-Strategien sowie der Arbitragebewertung von Optionen.

Viele der heute üblichen und »modernen« Techniken im Bereich der modernen Finanztheorie wurden von Bachelier zum ersten Mal beschrieben. Seine Ideen wurden zum Leitprinzip für viele der Standardwerkzeuge im modernen Finanzwesen. Dieses Potenzial wurde im Jahr 1900 bei Abgabe seiner Dissertation *Théorie de la Spéculation* weder von seinem Doktorvater Henri Poincaré noch von anderen »Experten« erkannt.

Ein neues Verständnis der Ungewissheit durch die Spieltheorie

Bei den bisher skizzierten Theorien und Werkzeugen trifft der Einzelne seine Entscheidungen isoliert, ohne das Verhalten anderer Personen zu berücksichtigen. In der

22 Vgl. Mandelbrot, B. B./Hudson, R. L.: The (mis)Behavior of Markets – A Fractal View of Risk, Ruin and Reward, New York 2004 sowie Romeike, F.: Beautiful, Colourful Risk: Benoît B. Mandelbrot - Remembering the Father of Fractals, in: Union Investment Institutional [Hrsg.]: The Measurement of Risk, Frankfurt am Main 2015, S. 197-207.

23 Vgl. Romeike, F.: Louis Bachelier, in: Risiko Manager, Ausgabe 21/2007, S. 24-26.

24 Merton erhielt im Jahr 1997 gemeinsam mit Myron S. Scholes den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. In der Begründung hieß es: »Für ihre Ausarbeitung einer mathematischen Formel zur Bestimmung von Optionswerten an der Börse«.

Spieltheorie[25] hingegen versuchen zwei oder mehr Personen, gleichzeitig ihren Nutzen zu maximieren. Die Spieltheorie ist daher eine Entscheidungstheorie, die Situationen untersucht, in denen das Ergebnis nicht von einem Entscheider allein bestimmt werden kann, sondern nur von mehreren Entscheidern gemeinsam. Dieses strategische Denken kann auch als Kunst aufgefasst werden, einen Gegner zu überlisten, der das Gleiche mit seinem Gegenüber versucht. Kurzum: Die Wissenschaft vom Strategischen Denken heißt Spieltheorie.

János von Neumann zu Margitta (besser bekannt als John von Neumann, 1903-1957) erbrachte auf vielen Gebieten der Mathematik herausragende Beiträge, unter anderem war von Neumann in Berlin entscheidend an der Entdeckung der Quantenmechanik beteiligt. Außerdem hat er bei der Entwicklung der ersten US-amerikanischen Atombombe und der Wasserstoffbombe eine maßgebliche Rolle gespielt. Gemeinsam mit dem Wirtschaftswissenschaftler Oskar Morgenstern (1902–1977) schrieb er im Jahr 1944 das zum Klassiker gewordene Buch *The Theory of Games and Economic Behavior*, in dem auch die für die Ökonomie wichtige Verallgemeinerung auf n-Personen-Spiele behandelt wird. Er wurde damit zum Begründer der Spieltheorie.

Was anfänglich in den Wirtschaftswissenschaften als »exotisches« Denkbild galt, entwickelte sich schließlich zu einem so wichtigen Ansatz zur Erforschung strategischen Verhaltens, dass im Jahr 1994 John F. Nash (1928-2015) von der Universität Princeton (New Jersey), John C. Harsanyi (1920-2000) von der Universität von Kalifornien in Berkeley und Reinhard Selten (1930-2016) von der Universität Bonn für ihre wissenschaftlichen Leistungen mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet wurden.

Bereits im Jahr 1951 bewies der Nobelpreisträger und Mathematiker John Forbes Nash Jr.[26], dass Spiele unter allgemeinen Annahmen mindestens ein Gleichgewicht haben.[27] Er untersuchte, welche Lösung resultiert, wenn alle Spieler unabhängig voneinander (ohne die Strategien der anderen Spieler zu beobachten), allein aus der Kenntnis des Spiels eine rationale Prognose über das Spielergebnis anstellen. Eine Situation, bei der kein Spieler davon profitieren kann, seine Strategie zu ändern, wenn die anderen Spieler ihre Strategien unverändert lassen, ist ein Nash-Gleichgewicht (Nash-Equilibrium).

Wie das Gefangenendilemma[28] (prisoner‘s dilemma) zeigt, sind im Nash-Gleichgewicht die Erwartungen aller Spieler erfüllt: Ihre Strategiewahl ist optimal.

25 Der Begriff Spieltheorie beruht darauf, dass am Anfang der mathematischen Spieltheorie den Gesellschaftsspielen wie Schach, Mühle, Dame etc. große Aufmerksamkeit gewidmet wurde.

26 Nashs Leben ist von großer Tragik geprägt: Nach einem vielversprechenden Start seiner mathematischen Karriere erkrankte er mit dreißig Jahren an Schizophrenie und erholte sich erst wieder in den 1990er Jahren davon. Nashs Geschichte ist Ende 2001 einem breiteren Publikum durch den preisgekrönten Hollywood-Film »A Beautiful Mind« bekanntgeworden.

27 Vgl. Bieta, V.: Was ist die Spieltheorie?, in: RISKNEWS 04/2005, S. 50-51.

28 Bei dem Dilemma handelt es sich um ein klassisches symmetrisches »Zwei-Personen-Nicht-Nullsummen-Spiel«, das in den 1950er Jahren von zwei Mitarbeitern der RAND Corporation formuliert wurde.

So werden in dem bekannten Paradoxon zwei Gefangene verdächtigt, gemeinsam eine Straftat begangen zu haben. Die Höchststrafe für das Verbrechen beträgt fünf Jahre. Beiden Gefangenen wird nun ein Handel angeboten, worüber auch beide informiert sind. Wenn einer gesteht und somit seinen Partner mitbelastet, kommt er ohne Strafe davon – der andere muss die vollen fünf Jahre absitzen. Entscheiden sich beide zu schweigen, bleiben nur Indizienbeweise, die aber ausreichen, um beide für zwei Jahre einzusperren. Gestehen aber beide die Tat, erwartet jeden eine Gefängnisstrafe von vier Jahren.

Nun werden die Gefangenen unabhängig voneinander befragt. Weder vor noch während der Befragung haben die beiden die Möglichkeit, sich untereinander abzusprechen.

In einer Auszahlungsmatrix eingetragen, resultiert die in Tabelle 1.2 zusammengefasste Situation.

	B schweigt (kooperiert mit A)	B gesteht (verrät A)
A schweigt (kooperiert mit B)	A: −2 / B: −2	A: −5 / B: 0
A gesteht (verrät B)	A: 0 / B: −5	A: −4 / B: −4

Tabelle 1.2: Gefangenendilemma

Daraus resultieren die in Tabelle 1.3 skizzierten Ergebnisse.

0	*»Versuchung«* (temptation T) – Belohnung für einseitigen Verrat (Freiheit)
-2	*»Belohnung«* (reward R) – Belohnung für Kooperation von A und B (nur zwei Jahre Strafe)
-4	*»Bestrafung«* (punishment P) – Bestrafung für gegenseitigen Verrat (vier Jahre Strafe)
-5	*»Des Gutgläubigen Belohnung«* (sucker's payoff S) – Bestrafung für Vertrauen, das Vertrauen wurde einseitig durch den Partner gebrochen (fünf Jahre Strafe)

Tabelle 1.3: Ergebnisse T, R, P, S

Hieraus wiederum lässt sich direkt die in Tabelle 1.4 skizzierte Auszahlungsmatrix ableiten.

	B kooperiert	B verrät
A kooperiert	R / R	S / T
A verrät	T / S	P / P
mit $T > R > P > S$.		

Tabelle 1.4: Auszahlungsmatrix

Das Gefangenendilemma zeigt sehr deutlich, dass die Auszahlung eines Spielers nicht nur von der eigenen, sondern auch von der Entscheidung des Komplizen abhängt (Interdependenz des Verhaltens). Aus Einzelsicht scheint es für beide vorteilhafter zu sein, auszusagen. Der Gefangene denkt sich: Falls der andere gesteht, reduziere ich mit meiner Aussage meine Strafe von fünf auf vier Jahre; falls er aber schweigt, dann kann ich mit meiner Aussage meine Strafe von zwei Jahren auf null reduzieren. Also sollte ich auf jeden Fall gestehen. Diese Entscheidung zur Aussage hängt nicht vom Verhalten des anderen ab, und es ist anscheinend immer vorteilhafter zu gestehen. Eine solche Strategie, die ungeachtet der gegnerischen gewählt wird, wird in der Spieltheorie als dominante Strategie bezeichnet.[29]

Würden beide Gefangenen schweigen, dann müsste jeder nur zwei Jahre ins Gefängnis. Der Verlust für beide zusammen beträgt so vier Jahre und jede andere Kombination aus Gestehen und Schweigen führt zu einem höheren Verlust.

Die Spielanlage verhindert aber die Verständigung zwischen den Gefangenen und provoziert so einen einseitigen Verrat, durch den der Verräter das für ihn individuell bessere Resultat »Freispruch« (falls der Mitgefangene schweigt) oder vier statt fünf Jahre (falls der Mitgefangene gesteht) zu erreichen hofft. Versuchen diese Strategie aber beide Gefangenen, so verschlimmern sie – auch individuell – ihre Lage, da sie nun je vier Jahre statt der zwei Jahre Gefängnis erhalten.

In diesem Auseinanderfallen der möglichen Strategien besteht das Dilemma der Gefangenen. Die vermeintlich rationale, schrittweise Analyse der Situation verleitet beide Gefangenen zum Geständnis, was zu einem schlechten Resultat führt (suboptimale Allokation). Das bessere Resultat wäre durch Kooperation erreichbar, die aber anfällig für einen Vertrauensbruch ist. Die rationalen Spieler treffen sich in einem Punkt, der in diesem Fall als pareto-ineffizientes Nash-Gleichgewicht bezeichnet wird.

Das Dilemma besteht primär in der Tatsache, dass kein Teilnehmer weiß, wie sich der andere Teilnehmer verhalten wird. Die optimale Strategie für beide zusammen wäre, wenn beide Mitspieler einander vertrauen und miteinander kooperieren. Das Vertrauen kann auf zweierlei Art erzielt werden: Zum einen durch – nach den ursprünglichen Spielregeln nicht erlaubte – Kommunikation und entsprechende Vertrauensbeweise, zum anderen durch Strafe im Falle des Vertrauensbruches.

Das Gefangenendilemma lässt sich auf viele Sachverhalte in der Praxis übertragen. So geht der Ökonom und Spieltheoretiker Thomas Schelling[30] (1921-2016) in seinem Werk *The Strategy of Conflict* auf solche Probleme unter den Bedingungen des Kalten Krieges ein (Gleichgewicht des Schreckens). Die Bestrafung für einseitigen Vertrauensbruch wäre so groß gewesen, dass er sich nicht lohnte. Beim wiederholten Spiel des Gefangenendilemmas beruhen die meisten Strategien darauf, dass man Informationen aus vorhergehenden Schritten verwendet. Wenn der andere in einem Schritt kooperiert, vertraut die erfolgreiche Strategie Tit for Tat (»Wie du mir, so ich dir«) darauf, dass er es weiterhin tut, und gibt ihrerseits einen Vertrauensbeweis. Im entgegengesetzten Fall bestraft sie, um zu verhindern, dass sie ausgenutzt wird.

29 Vgl. Rieck, Chr.: Spieltheorie – Eine Einführung, Eschborn 2007, S. 44 f. sowie Dixit, K. D./Nalebuff, B. J.: Spieltheorie für Einsteiger, Strategisches Know-how für Gewinner, Stuttgart 1997.

30 Im Jahr 2005 wurden Thomas Schelling und Robert J. Aumann mit dem Preis der schwedischen Reichsbank für Wirtschaftswissenschaften in Gedenken an Alfred Nobel ausgezeichnet: »Sie haben durch spieltheoretische Analysen unser Verständnis von Konflikt und Kooperation vorangebracht.«

Literatur

Alten, H.W. (2003): 4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen, Springer Verlag, Berlin 2003.

Bachelier, L. (1964): Théorie de la Spéculation, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3rd. Ser. 17/1900, 21–88. (Translated in: The Random Character of Stock Market Prices, edited by Paul Cootner (1964), Cambridge/Massachusetts).

Bachelier, L./Samuelson, P. A./Davis, M. et al. (2006): Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance, Princeton NJ 2006.

Bayes, T. (1763): An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chance, London 1763.

Bernoulli, J. (1999): Wahrscheinlichkeitsrechnung: I., II., III. und IV. Theil = Ars conjectandi / von Jakob Bernoulli. Uebersetzt und herausgegeben von R. Haussner, Nachdruck der Ausgabe 1713. – Thun, Frankfurt am Main 1999.

Bernstein, P.L. (1996): Against the Gods: Remarkable Story of Risk. John Wiley & Sons Inc, New York 1996.

Bernstein, P.L. (1997): Wider die Götter – Die Geschichte von Risiko und Riskmanagement von der Antike bis heute. Gerling Akademie Verlag, München 1997.

Bieta, V. (2005): Was ist die Spieltheorie?, in: RISKNEWS 04/2005, S. 50-51.

Cardano, G. (1663): Liber de Ludo Aleae, Lyon 1663.

De Bondt, W./Thaler, R. (1985): Does the Stock Market Overreact?, in: Journal of Finance, 40/1985, S. 793–805.

Dixit, K. D./Nalebuff, B. J. (1997): Spieltheorie für Einsteiger, Strategisches Know-how für Gewinner, Stuttgart 1997.

Erben, R.F./Romeike, F. (2016): Allein auf stürmischer See – Risikomanagement für Einsteiger, 3. komplett überarbeitete Auflage, Wiley Verlag, Weinheim 2016.

Ineichen, R. (1996): Würfel und Wahrscheinlichkeit – Stochastisches Denken in der Antike, Spektrum Verlag, Heidelberg 1996.

Kehlmann, D. (2005): Die Vermessung der Welt, Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg 2005.

Keller, E. (2004): Auf sein Auventura und Risigo handeln. Zur Sprach- und Kulturgeschichte des Risikobegriffs. In: RISKNEWS, Heft 1/2004, S. 60-65.

Kolmogorow, A. (1933): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer Verlag, Berlin 1933.

Mandelbrot, B. B./Hudson, R. L. (2004): The (mis)Behavior of Markets – A Fractal View of Risk, Ruin and Reward, New York 2004.

Milbrodt, H./Helbig, M. (1999): Mathematische Methoden der Personenversicherung. DeGruyter, Berlin 1999.

Nguyen, T./Romeike, F. (2012): Versicherungswirtschaftslehre, Springer/Gabler Verlag, Wiesbaden 2012.

Pfeifer, D. (2004): Grundzüge der Versicherungsmathematik. Vorlesungsskript vom 28.6.2004.

Rieck, Chr. (2007): Spieltheorie – Eine Einführung, Eschborn 2007.

Romeike, F. (2010): Bankenkrise - Ursachen und Folgen im Risikomanagement, Bank-Verlag Medien, Köln 2010.

Romeike, F. (2015): Beautiful, Colourful Risk: Benoît B. Mandelbrot - Remembering the Father of Fractals, in: Union Investment Institutional [Hrsg.]: The Measurement of Risk, Frankfurt am Main 2015, S. 197-207.

Romeike, F. (2007): Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibnitz. In: Risiko Manager, Ausgabe 15/2007, S. 18.

Romeike, F. (2007): Hammurabi. In: Risiko Manager, Ausgabe 14/2007, S. 24.

Romeike, F. (2007): Jacob Bernoulli. In: Risiko Manager, Ausgabe 1/2007, S. 12-13.

Romeike, F. (2007): Louis Bachelier, in: Risiko Manager, Ausgabe 21/2007, S. 24-26.

Romeike, F. (2007): Pierre-Simon (Marquise de) Laplace. In: Risiko Manager, Ausgabe 3/2007, S. 20.

Romeike, F. (2018): Risikomanagement, Springer Verlag, Wiesbaden 2018.

Romeike, F./Hager, P. (2013): Erfolgsfaktor Risikomanagement 3.0: Lessons learned, Methoden, Checklisten und Implementierung, 3. komplett überarbeitete Auflage, Springer Verlag, Wiesbaden 2013.

Worbs, E. (1955): Carl Friedrich Gauss: ein Lebensbild, Koehler&Amelang, Leipzig 1955.