1 Algebraische Grundlagen der Zahlensysteme

In diesem Kapitel …

- Natürliche Zahlen und die Grundrechenarten
- Konstruktion der ganzen Zahlen
- Erweiterung auf die rationalen Zahlen
- Mittels der Irrationalität zu den reellen Zahlen
- Keine Sorgen mit Variablen und Summenzeichen
- Hinreichende und notwendige Bedingungen unterscheiden
- Grundlegende Begriffe über Funktionen kennen

In diesem ersten Kapitel zeige ich Ihnen, woher die verschiedenen Zahlen kommen, was die Zahlenmengen unterscheidet und wie Sie mit ihnen rechnen können. Mit diesem Verständnis lernen Sie nebenbei noch einmal, wie Sie mit Brüchen zu arbeiten haben. Am Ende dieses ersten Einführungskapitels werden Sie mit den Grundbestandteilen der mathematischen Sprache vertraut gemacht: den Variablen. Das Rechnen mit diesen Unbekannten muss sitzen, wie Sie sehen werden. Außerdem sprechen wir über Begrifflichkeiten bei Funktionen, die im weiteren Verlauf des Buches wichtig sind.

Mathematik und die natürlichen Zahlen

Fangen wir langsam an. Wenn Sie in einem Korb Ihre Äpfel zählen wollen, dann starten Sie mit der Eins und zählen weiter: zwei, drei, vier und so weiter. Diese Zahlen benötigen Sie ständig im täglichen Leben – es handelt sich um die so genannten natürlichen Zahlen.

Definition

Die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ besteht aus den Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Diese Menge ist unendlich groß: Ist nämlich eine Zahl n in der Menge $\mathbb{N}$ enthalten, so auch ihr **Nachfolger** $n + 1$.

Die natürlichen Zahlen sind in Abbildung 1.1 auf dem Zahlenstrahl zu sehen, so wie Sie sie auch erwarten würden:

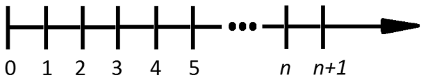

Abbildung 1.1 Die natürlichen Zahlen

Die Mathematiker sind sich oft nicht ganz einig, ob sie die Null zur Menge der natürlichen Zahlen hinzuzählen sollen. Das stellt aber auch kein Problem dar. Es handelt sich um eine typische Situation in der Mathematik: Mit beiden Varianten können Sie leben und rechnen, aber Sie müssen sich vorher festlegen – die Mathematiker nennen dies »definieren«.

In diesem Buch gehört die Null zur Menge der natürlichen Zahlen. Ich sage Ihnen auch, warum ich dies gut finde: Stellen Sie sich vor, Sie möchten die natürlichen Zahlen verwenden, um eine Anzahl von Gegenständen zu beschreiben: Wie viele Äpfel sind im Korb? Wie viele Birnen befinden sich im Regal oder wie viele Autos fahren auf der Straße vorbei? Dies können eben 1, 2, 3 oder 1000 sein. Der Korb, das Regal oder die Straße kann aber genauso gut auch leer sein. Diese Anzahl würden Sie dann mit Null beschreiben. Einleuchtend, oder?

BEISPIEL 1.1

Betrachten Sie eine Tüte mit drei Birnen. Nehmen Sie nun die drei Birnen heraus und packen Sie drei Äpfel hinein. Wenn Sie nur die Anzahl der Objekte beschreiben möchten, die sich in der Tüte befinden, dann kommt es nicht auf die Art des Objekts an, die Äpfel und Birnen, sondern nur auf die Anzahl: in beiden Fällen »3«. Daher beschreibt die Zahl »3« offenbar ganz viele Dinge, nämlich ganz viele Tüten mit jeweils drei Objekten oder auch eine kleine Herde von drei Pferden oder eine Familie mit der Mutter, dem Vater und dem Kind. Die Zahl »3« ist daher eine Abkürzung, ein Repräsentant der Mengen mit jeweils drei Objekten. Das ist Mathematik! Es wird aber noch besser: Der Null entspricht also die leere Tüte mit Äpfeln oder auch die leere Tüte mit Birnen. Achtung! Die leere Tüte ist nicht nichts! Es bleibt eine Tüte, in der einfach nur nichts enthalten ist. So wie die Zahl 0 eben immer noch eine Zahl ist. Auch das ist Mathematik.

Im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es Sie (mindestens) zwei Operationen, mit denen Sie rechnen können: die Addition »+« und die Multiplikation »·«. Diese Operationen sind beide zweistellig, das heißt Sie verknüpfen zwei natürliche Zahlen und erhalten eine neue, nämlich die so genannte Summe beziehungsweise das Produkt.

Definition

Folgende Begriffe sind sind in diesem Zusammenhang wichtig:

- Bei der **Addition** verknüpft man zwei Zahlen a und b zu einer neuen Zahl $a + b$. Dabei heißen a und b die beiden **Summanden** und $a + b$ ihre **Summe**.
- Bei der **Multiplikation** verknüpft man zwei Zahlen a und b zu einer neuen Zahl $a \cdot b$. Dabei heißen a und b die beiden **Faktoren** und $a \cdot b$ ihr **Produkt**.

Sie können die natürlichen Zahlen sehr schön addieren und multiplizieren. Das liegt an den Eigenschaften, die diese Zahlen mit ihren Operationen haben. So wissen Sie, dass $1 + 2 = 2 + 1$ ist, es kommt also bei der Addition nicht auf die Reihenfolge an. Mehr zu solchen Eigenschaften lesen Sie im weiteren Verlauf dieses Kapitels.
Wenn Sie diese angeben möchten, müssen Sie über alle natürlichen Zahlen gleichzeitig sprechen. Das ist gar nicht so einfach, denn es gibt unendlich viele von ihnen. Wenn Sie also nacheinander Aussagen für alle Zahlen machen wollten, dann werden Sie ja nicht fertig – soviel Zeit können Sie sich gar nicht nehmen (oder zumindest sollten Sie sich nichts *danach* vornehmen)!
Um dieses scheinbare Problem in den Griff zu bekommen, brauchen wir zunächst einmal eine Schreibweise hierfür. Sie verwenden die so genannten Quantoren »$\forall$« und »$\exists$« wie folgt:

Den Allquantor »$\forall$« lesen Sie als »für alle« und verwenden diesen, um über alle Zahlen gleichzeitig zu sprechen: So lesen Sie die Formel »$\forall x(x + 1 > x)$« als »für alle x ist $x + 1$ echt größer als x«. Das bedeutet, dass es egal ist, welche Zahl x Sie nehmen, ihr Nachfolger $x + 1$ wird stets echt größer sein. Dies gilt also für 0, 1, 2, aber auch für 22 oder 222 oder auch 222222 und alle anderen Zahlen.
Den Existenzquantor »$\exists$« lesen Sie als »es existiert ein« und verwenden diesen, um die Existenz einer Zahl zu postulieren: So lesen Sie die Formel »$\exists y(2 + y = 8)$« als »es existiert ein y, so dass 2 plus y gleich 8 ist«. Das bedeutet, dass es eine Zahl geben muss, die zur 2 addiert 8 ergibt. Diese Zahl gibt es natürlich auch, es ist die 6.

Mit Hilfe der Quantoren können Sie nun beliebig komplizierte Formeln aufstellen, die das Verhalten der Zahlen unter bestimmten Bedingungen beschreiben.

BEISPIEL 1.2

Für die natürlichen Zahlen gilt die Formel

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x < y \;\rightarrow\; x + z = y).$$

Das bedeutet, dass egal welche Zahlen Sie sich hernehmen, immer dann, wenn die erste kleiner als die zweite ist, können Sie eine Zahl finden, die zur ersten addiert die zweite ergibt. Verstanden? Sonst lesen Sie diesen Satz bitte noch einmal und überprüfen Sie sich selbst, ob Sie diesen Inhalt auch aus der Formel abgelesen hätten. Dabei geht es weniger um den Wortlaut, sondern nur um den beschriebenen Sachverhalt.

Mehr zur mathematischen Logik und der formalen Sprache der Mathematik lernen Sie später im zweiten Kapitel.

Tipp

Um Mathematik zu verstehen, müssen Sie Mathematik lesen, schreiben und sprechen lernen. Formeln sind dabei die Schriftsprache, die Sie wählen um zu kommunizieren.

Formeln sind in der Mathematik sehr wichtig, um kurz und knapp über Zusammenhänge zu sprechen. Wenn Sie alles mit Worten beschreiben würden, dann würden die Inhalte untergehen. In der Mathematik ist es sehr wichtig, den Überblick zu behalten, und dies erreichen Sie durch kurze, aber übersichtliche Darstellungen. Aber seien Sie beruhigt, ein Gefühl dafür bekommt nicht von heute auf morgen. Haben Sie Geduld. Sie erlernen eine neue Sprache – dies geht auch nicht von heute auf morgen.

Eigenschaften der Grundrechenarten

Lassen Sie uns endlich rechnen und trotzdem Mathematik betreiben. Ich zeige Ihnen nun mit Hilfe der Formeltheorie ein paar allgemeine Rechengesetze und Sie versuchen diese gemeinsam mit mir zu verstehen. Folgende grundlegende Eigenschaften der Operationen Addition und Multiplikation über den natürlichen Zahlen gelten, können Sie leicht verstehen:

- Assoziativgesetz der Addition: $\forall x \forall y \forall z ((x + y) + z = x + (y + z))$
- Kommutativgesetz der Addition: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
- Existenz des neutralen Elementes der Addition: $\forall x (x + 0 = x = 0 + x)$
- Assoziativgesetz der Multiplikation: $\forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
- Kommutativgesetz der Multiplikation: $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$
- Existenz des neutralen Elementes der Multiplikation: $\forall x (x \cdot 1 = x = 1 \cdot x)$
- Distributivgesetz: $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

Das ist Ihnen zu technisch beschrieben? Aber verständlich ist es dennoch, oder? Sie können also beliebig Klammern oder auch die Summanden oder Faktoren in ihrer Reihenfolge tauschen. Und schließlich gibt es jeweils ein Element pro Operation, welches verknüpft nichts am Ausgangswert ändert: Addieren Sie die Null, passiert genauso viel, als wenn Sie mit der Eins multiplizieren, nämlich nichts Neues.

BEISPIEL 1.3

Wenn Sie beispielsweise den Term $((x \cdot a) \cdot (a \cdot (1 \cdot x)) \cdot x) \cdot a$ betrachten, dann können Sie aufgrund der Assoziativität die Klammern sofort weglassen und erhalten den wesentlich vereinfachten Ausdruck: $x \cdot a \cdot a \cdot 1 \cdot x \cdot x \cdot a$. Hier können Sie aufgrund der Kommutativität auch noch ordnen: $x \cdot x \cdot x \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1$. Die neutrale Eins können Sie glücklicherweise auch noch weglassen, ohne etwas inhaltlich zu ändern und die Multiplikation mit sich selbst können Sie abkürzend als Potenzen schreiben, wenn Sie das möchten, und erhalten schließlich x^3a^3. Das ist doch viel einfacher!

Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen

In den natürlichen Zahlen können Sie also addieren und muliplizieren und das ohne jede Einschränkung. Allerdings kennen Sie auch noch andere Operationen, die Sie zumindest teilweise auch auf den natürlichen Zahlen ausführen können: Ich spreche von den Umkehroperationen, also Subtraktion und Division: $7 - 4 = 3$ und $8 : 4 = 2$. Allerdings können Sie nicht einfach $4 - 7$

oder 4 : 8 berechnen, da es keine natürliche Zahl gibt, die diesem Ergebnis entspricht. Dennoch haben Sie sofort ein Gefühl dafür, was $4 - 7$ sein sollte, nämlich -3. Und schon sind wir bei den ganzen Zahlen.

Definition

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnetgibt es die entsprechende Gegenzahl $-n$ (auch additives Inverses genannt), die die Eigenschaft $n + (-n) = (-n) + n = 0$ besitzt. Die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit all ihren Gegenzahlen bezeichnet man als Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, also:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen, so dass sich die folgende Abbildung ergibt:

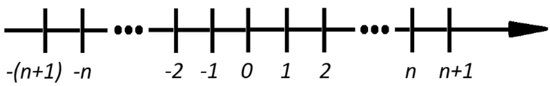

Abbildung 1.2 Die ganzen Zahlen

Schauen Sie sich folgende Eigenschaften der ganzen Zahlen an:

- Beachten Sie, dass per Definition »-0« offenbar gleich 0 sein muss. Überprüfen Sie dies bitte, indem Sie sich die Summeneigenschaft der Gegenzahl der 0 anschauen: Es gilt nämlich, dass die Gegenzahl der 0, also -0, offenbar die Zahl z ist, so dass $0 + z = z + 0 = 0$ gilt. Diese Eigenschaft erfüllt genau die Zahl 0 selbst.
- Des Weiteren erweitern die ganzen Zahlen die natürlichen Zahlen. Man sagt, dass die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen sind und schreibt: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$.

Der **Betrag** einer ganzen Zahl $z \in \mathbb{Z}$ ist wie folgt definiert:

$$|z| := \begin{cases} -z & \text{falls } z < 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \\ z & \text{falls } z > 0 \end{cases}$$

Beachten Sie, dass der Betrag einer ganzen Zahl nie negativ ist!
Es gilt: $|3| = 3$ und $|-3| = -(-3) = 3$.

Die Operationen »+« und »·« kann man auch auf die ganzen Zahlen anwenden. Das ist auch wichtig, denn $3 + 4$ soll nun einmal 7 sein, ob Sie nun die Zahlen 3 und 4 als natürliche oder ganze ansehen. Wir können auch die Subtraktion formal definieren; Sie schreiben $a - b$ für die ganzen Zahlen a, b und meinen damit den Term $a + (-b)$.

Definition

Bei der Subtraktion verknüpft man zwei Zahlen a und b zu einer neuen Zahl $a - b$. Dabei heißt a der **Minuend**, b der **Subtrahend** und $a - b$ die **Differenz**.

Mathematiker und ihre Konstruktion der ganzen Zahlen

Wenn Mathematiker die ganzen Zahlen definieren, dann schreiben Sie nicht einfach die natürlichen Zahlen und ihre Gegenzahlen auf. Die Gegenzahlen existieren in dieser Art auch gar nicht, denn wenn Sie ehrlich sind, dann nutzen Sie bei der Schreibweise -3 bereits Ihr Wissen darüber, dass diese Zahl irgendwo existieren muss. Sie müssen sich vorstellen –und das können Mathematiker sehr gut–, dass Sie nur Wissen über die natürlichen Zahlen haben und aus diesem Wissen über diese Zahlen neue kreieren möchten – (fast) unvorstellbar, oder?

Ich erläutere Ihnen Ihnen die Idee: Was Ihnen in der Welt der natürlichen Zahlen fehlt, sind Differenzen beliebiger natürlicher Zahlen. Mathematiker akzeptieren manchmal nicht, dass etwas nicht existiert – sie definieren sich diese Dinge einfach hinzu, falls möglich. So auch hier: Betrachten Sie einfach die Menge der folgenden Zahlenpaare $[a, b]$ für natürliche Zahlen a, b und interpretieren Sie dies (im Kopf) als $a - b$. Nun können Sie verschiedene solche Paare miteinander identifizieren, nämlich die, die in Ihrer Interpretation gleich sein sollen: Also etwa $[4, 2]$ und $[8, 6]$, denn beide würden Sie interpretieren als $4 - 2 = 8 - 6 = 2$. Mathematiker sprechen hier von der Bildung von Äquivalenzklassen.

Verstanden soweit? Gut! Dann sehen Sie auch, dass Sie auch Zahlenpaare haben, die Ihrer -2 entsprechen, beispielsweise $[2, 4]$ oder auch $[12, 14]$. Damit entspricht diese Menge von Zahlenpaaren, jeweils als gleich markierte Paare nur einmal gezählt, genau der Menge von ganzen Zahlen – diesmal aber nur mittels der natürlichen Zahlen definiert. Immer noch verstanden –

gut, dann weiter im Text. Auf dieser Menge von Zahlenpaaren können Sie nun auch Operationen, wie etwa die Addition definieren. Sie schreiben formal $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$. Dies entspricht auch Ihrer Interpretation, denn $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$. Für die Multiplikation würde man dann schreiben: $[a, b] \cdot [c, d] = [bc + ad, bd + ac]$. Dies ist schon viel komplizierter, aber es stimmt – schauen Sie selbst: $(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd = (bd + ac) - (bc + ad)$.

Aufgaben mit Klammern richtig lösen

Hier gibt es nicht viel zu erläutern, aber wenn ich es nicht erkläre, dann würde es fehlen. Da die Addition und die Multiplikation assoziativ sind, können Klammern meistens weggelassen werden. Sie müssen also nicht $((0 + (1 + 2) + (3 + 4)) + 5)$ schreiben, sondern können dies einfach als $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ notieren. Allerdings müssen Sie aufpassen, wenn Sie subtrahieren, denn steht ein Minuszeichen vor der Klammer, ändern sich alle Zeichen in der Klammer! Das bedeutet, aus einem Pluszeichen innerhalb der Klammer wird beim Weglassen ein Minuszeichen und umgekehrt, das heißt:

$$-(-1 + 2 + 3 - 4 - 5) \quad \text{ist das Gleiche wie} \quad 1 - 2 - 3 + 4 + 5.$$

Klammern werden dann interessant, wenn Sie damit eine Reihenfolge zwischen verschiedenen Operationen festlegen. So ist $1 + 2 \cdot 3 = 1 + (2 \cdot 3) = 7$, aber natürlich gilt $(1 + 2) \cdot 3 = 9$. Im ersten Fall habe ich eine weitere Regel verwendet, nämlich Punktrechnung geht vor Strichrechnung – erinnern Sie sich an Ihre Schulzeit?

Aus ganz wird rational – Bruchrechnung mal anders

In dem vorangegangen Abschnitt haben Sie gesehen, dass Sie mit den ganzen Zahlen zwar addieren, subtrahieren und multiplizieren, allerdings nicht dividieren können – zumindest nicht durch beliebige Zahlen. Um eine Zahlenmenge zu bekommen, die auch unter Division abgeschlossen ist, müssen wir die ganzen Zahlen erweitern. (Abgeschlossen unter einer Operation zu sein bedeutet, dass das Ergebnis der Operation von zwei beliebigen Elementen der Menge wieder in der Menge liegt.) Dies muss aber so geschehen, dass die größere Menge die positiven Eigenschaften der Addition, Subtraktion und Multiplikation nicht verliert. Das ist nämlich gar nicht so klar.

Die Zahlenklasse, die hier benötigt wird, ist die der rationalen Zahlen. Diese Zahlen werden durch Brüche $\frac{p}{q}$ von ganzen Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ (für $q \neq 0$) gebildet, so dass damit per Definition die Division möglich ist. Außerdem sind die ganzen Zahlen ebenfalls in dieser neuen Menge enthalten, denn durch Division durch Eins bleibt die Ausgangszahl erhalten: $\frac{p}{1} = p$.

Definition

Die Menge $\mathbb{Q}$ aller $\frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ bezeichnet man als **rationale Zahlen**. Die Elemente der Menge $\mathbb{Q}$ werden auch Brüche genannt. Sie lesen $\frac{p}{q}$ als »p durch q«. Dabei heißt p der **Zähler** und q der **Nenner** des Bruchs $\frac{p}{q}$. Der Kehrwert von $\frac{p}{q}$ ist $\frac{q}{p}$. Sie vertauschen also Zähler und Nenner.

Die rationalen Zahlen darzustellen, ist gar nicht so einfach, wenn man die übliche Zahlengerade betrachtet. Die fehlenden (irrationalen) Löcher im Vergleich zu den im nächsten Abschnitt eingeführten reellen Zahlen sind nicht darstellbar – bestenfalls erkennbar mit einer unendlich vergrößernden Lupe. Daher erscheint die Darstellung sehr stark verrauscht:

Abbildung 1.3 Die rationalen Zahlen

Sie können natürlich auch alle vier Grundoperationen ausführen, schauen Sie mal: Es ist offensichtlich, dass Sie nun ganze Zahlen teilen können und in der Menge $\mathbb{Q}$ bleiben. Die Frage ist aber, was passiert, wenn Sie nun rationale Zahlen miteinander verknüpfen. Aber auch das geht recht einfach:

- Beim Addieren $\frac{p}{q} + \frac{a}{b}$ müssen Sie beide Summanden zunächst auf den Hauptnenner bringen, also auf das kleinste gemeinsame Vielfache der Nennerzahlen q und b. Das Produkt qb ist immer eine Lösung, dies muss aber nicht das kleinste gemeinsame Vielfache sein. Wenn Sie nun beide Summanden erweitern, können Sie weiterrechnen:

  $$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb}{qb} + \frac{qa}{qb} = \frac{pb + qa}{qb}.$$

  Dabei ist $\frac{pb+qa}{qb}$ wieder eine rationale Zahl.

- Subtrahieren können Sie über die Addition: $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{p}{q} + \frac{-a}{b}$. Denken Sie aber auch hier an den gemeinsamen Hauptnenner.
- Multiplizieren ist ganz einfach. Es gilt: $\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} = \frac{p \cdot a}{q \cdot b}$.
- Beim Dividieren müssen Sie sich konzentrieren, denn dies wird leider ganz oft und ganz rasch wieder verlernt: Wenn Sie den Term $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{a}{b}}$ berechnen wollen, rechnen Sie $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{p}{q} \cdot \frac{b}{a}$. Eigentlich ganz einfach.

Tipp

Multiplizieren von Brüchen heißt: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. **Division durch einen Bruch** ist gleich Multiplikation mit seinem Kehrwert.

Denken Sie immer daran, dass Sie nichts aus Summen und Differenzen kürzen. So können Sie im Bruch $\frac{a^3+6b}{2a^2}$ **nichts** kürzen!

Definition

Bei der Division verknüpft man zwei Zahlen a und b zu einer neuen Zahl $a : b$. Dabei heißt a der **Dividend**, b der **Divisor** und $a : b = \frac{a}{b}$ der **Quotient**.

Mathematiker und ihre Definition der rationalen Zahlen

Ich möchte Ihnen – wie bei den ganzen Zahlen etwas weiter vorn in diesem Kapitel – nicht verheimlichen, wie Mathematiker sich aus den ganzen Zahlen die rationalen Zahlen herleiten. Dazu definieren Sie sich geeignete Äquivalenzklassen, wie auch schon bei den ganzen Zahlen. In diesem Fall sind auch wieder Zahlenpaare $[a, b]$ im Spiel, diesmal bestehen sie aus einer ganzen Zahl a und einer positiven natürlichen Zahl b. Sie können dies im Kopf als den Quotienten $\frac{a}{b}$ interpretieren. Die Äquivalenzklassenbildung erfolgt nun wie folgt: Sie sagen, dass zwei Zahlenpaare $[a, b]$ und $[c, d]$ äquivalent sein sollen, wenn $ad = bc$. Sehen Sie warum? Es muss nämlich entsprechend Ihrer Interpretation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelten, wenn $ad = bc$. Wie schon bei den ganzen Zahlen definieren Sie nun die fehlenden Operationen. Sie schreiben $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$, da $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ gelten soll. Diesmal ist die Multiplikation einfacher: $[a, b] \cdot [c, d] = [a \cdot c, b \cdot d]$.

Rationale Zahlen und Dezimalbrüche

In den letzten Abschnitten haben Sie sich Gedanken über natürliche, ganze und rationale Zahlen gemacht. Beim Übergang von den natürlichen zu den ganzen Zahlen wollten Sie neben dem Addieren auch noch beliebig subtrahieren können. Dies war mit den ganzen Zahlen möglich. Allerdings war trotz der Multiplikation immer noch keine beliebige Division möglich; hierfür generierten Sie die rationalen Zahlen. Sind dies nun alle Zahlen, die Sie zum Rechnen brauchen? Sie können addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Fehlt etwas? Das kommt darauf an, was Sie machen möchten. Sie können schon sehr viele Fragestellungen in der Mathematik Welt beantworten. Mit vielen Gleichungen und Ungleichungen, die ein Plus, Minus, Mal und Geteilt enthalten, können Sie schon umgehen.

BEISPIEL 1.4

Lösen Sie die Gleichung $\frac{2x+2}{4} = 8$. Das ist einfach, oder? Sie multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 4 und erhalten $2x + 2 = 32$. Ziehen Sie auf beiden Seiten 2 ab und die neue Gleichung $2x = 30$ teilen Sie auf beiden Seiten durch 2 und erhalten schließlich das gewünschte Ergebnis: $x = 15$.

Dennoch sind die praktisch rechnenden Leute oftmals nicht zufrieden, denn es gibt immer wieder Fragestellungen, die so nicht zu beantworten sind. Wenn Sie versuchen wollen, auf den rationalen Zahlen die Gleichung $x^2 = 2$ zu lösen, dann versagen Sie glorreich. Es gibt eben kein rationales x, so dass $x^2 = 2$ gilt. Das liegt daran, dass **$\sqrt{2}$ keine rationale Zahl** ist. Sie ist, so sagt man, **irrational**. Das ist auch leicht zu sehen:

1. Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational, dann könnten Sie sie als Quotient $\frac{p}{q}$ für ganze Zahlen p und q darstellen. Nehmen Sie weiterhin an, dass diese ganzen Zahlen maximal gekürzt sind, das heißt, dass p und q teilerfremd sind. Es würde also gelten: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.
2. Quadrieren Sie beide Seiten der Gleichung, dann folgte: $\frac{p^2}{q^2} = 2$.
3. Bringen Sie anschließend durch Multiplikation mit q^2 diese Gleichung auf die Form $p^2 = 2 \cdot q^2$. Und nun?

4. Schauen Sie genau hin: Auf der rechten Seite der Gleichung steht das Doppelte einer natürlichen Zahl, diese muss also eine gerade Zahl sein und damit auch die linke Seite der Gleichung.
5. Im Abschnitt *Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik* des zweiten Kapitels zeige ich Ihnen, dass, wenn p^2 gerade ist, dann auch p gerade ist. Daher finden Sie eine (andere) natürliche Zahl a, so dass $p = 2a$, denn $2a$ ist die typische Gestalt einer geraden Zahl (im Gegensatz zu einer ungeraden Zahl der Gestalt $2a + 1$).
6. Nun holen Sie zum Gegenschlag aus: Dann gilt nämlich auch $p^2 = 4a^2$. Zusammen mit der Gleichung $p^2 = 2 \cdot q^2$ gilt insgesamt $4a^2 = 2q^2$.
7. Durch Teilen erhalten Sie $2a^2 = q^2$. Aber dann wiederum ist auch q^2 mit dem gleichen Argument eine gerade Zahl. Das gilt somit auch für q.
8. Insgesamt wären dann p und q durch 2 teilbar und dies widerspräche der angenommenen Teilerfremdheit.

Man muss sich schon konzentrieren um das richtig zu verstehen.

Nun gut, nach dem gerade geführten Beweis wissen Sie, dass die Wurzel aus 2 nicht rational sein kann, aber was macht diese Zahl denn nun so irrational? Wie sehen denn irrationale Zahlen aus? Am Wurzelzeichen kann es nicht liegen, denn $\sqrt{4}$ ist auf jeden Fall rational, sogar ganz (mit den Lösungen -2 und 2).

Definition

Rationale Zahlen können Sie als **Dezimalbrüche** schreiben. Dezimalbrüche haben die Gestalt einer Kommazahl, wobei vor dem Komma der ganze Anteil der Zahl zu finden ist und nach dem Komma verschiedene Nachkommastellen. Rationale Zahlen in Dezimalbruchschreibweise haben die Eigenschaft, dass sie entweder nur endlich viele Nachkommastellen haben oder es im Falle einer unendlichen Anzahl von Nachkommastellen eine **Periode** gibt, in der es zu einer Wiederholung von Ziffernfolgen kommt.

So haben die folgenden rationalen Zahlen eine endliche Dezimalbruchschreibweise:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375 \qquad \frac{167}{16} = 10{,}4375$$

Betrachten Sie nun folgende rationale Zahlen in unendlicher, aber periodischer Dezimalbruchschreibweise. Dabei deute ich die Periode mit einem

Strich über den entsprechenden Stellen an, die sich unendlich oft wiederholen – schauen Sie selbst:

- $\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$
- $\frac{7}{1111} = 0{,}006300630063 = 0{,}\overline{0063}$
- $\frac{24691111}{199998000} = 0{,}1234\overline{56789}$

Und plötzlich wird's irrational … und doch real!

Im vorangegangenen Abschnitt haben Sie bereits gesehen, dass die Wurzel aus 2 nicht rational sein kann. Sie ist irrational. Nach der Theorie über die Dezimalbruchdarstellung wissen Sie auch, dass die Darstellung von $\sqrt{2}$ als Dezimalbruch unendlich viele Nachkommastellen besitzen muss, die keine Periode in sich tragen, also kein Schema, welches unendlich oft wiederholt wird. Im Folgenden wird dies näher erläutert.

Wenn Sie auf dem Taschenrechner die Wurzel von 2 berechnen, dann zeigt dieser Ihnen eine Approximation des echten Ergebnisses an. Etwas anderes kann er auch nicht, denn wie gesagt, das Ergebnis hat unendlich viele Nachkommastellen und der Taschenrechner, so genau er auch sein mag, kann nur endlich viele von diesen berechnen. Ein typisches Ergebnis vom Taschenrechner ist 1,41421356. Wie genau ist dies nun, wenn es nicht das echte Ergebnis ist? Nähern wir uns schrittweise an; es gilt $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$. Daher muss die Wurzel aus 2 irgendwo zwischen 1,4 und 1,5 liegen. Klar, oder? Und so können Sie sich dem Wert $\sqrt{2}$ immer weiter nähern:

$$\begin{aligned}
1{,}4^2 = 1{,}96 &< 2 < 2{,}25 < 1{,}5^2\\
1{,}41^2 = 1{,}9881 &< 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2\\
1{,}414^2 = 1{,}999396 &< 2 < 2{,}002225 = 1{,}415^2\\
1{,}4142^2 = 1{,}99996164 &< 2 < 2{,}00024449 = 1{,}4143^2
\end{aligned}$$

Sehen Sie, dass Sie sich immer näher an die Zahl 2 annähern, diese aber nicht erreichen können? Und diese Kette könnten wir unendlich lang fortsetzen, ohne einen Rhythmus (Periode!) in der Ausgangszahl zu bekommen.

Definition

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bildet zusammen mit den irrationalen die Klasse der **reellen Zahlen**. Diese erweitern die Menge der rationalen Zahlen. Die Addition und Multiplikation werden entsprechend von den rationalen auf die reellen Zahlen fortgesetzt.

Die reellen Zahlen stellen nun das Bild dar, wie Sie es erwarten (Abbildung 1.4):

Abbildung 1.4 Die reellen Zahlen

Andere berühmte Vertreter der irrationalen Zahlen sind die **Kreiszahl**

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510...$$

sowie die **Eulersche Zahl**

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

Beide Zahlen können nicht als rationale Zahl dargestellt werden. Sie haben unendlich viele Nachkommastellen und es ist keine sich wiederholende Periode vorhanden. Sie sind sogar **transzendent**. Das bedeutet, dass Sie nicht als Nullstellen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden können – im Gegensatz zu $\sqrt{2}$, welche Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ ist.

Die Kreiszahl π ist beispielsweise in der Geometrie sehr wichtig, denn sie entspricht dem Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser Eins und dem Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius Eins. Die Eulerzahl e spielt in der Diffential- und Integralrechnung der Analysis eine wesentliche Rolle; so gilt beispielsweise: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Mathematiker und die Konstruktion der reellen Zahlen

Sie haben bereits gesehen, dass die irrationalen Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung unendlich viele Nachkommastellen besitzen, ohne dass eine Periode zu finden ist. Dies klingt nicht nach der idealen Beschreibung, um solche Zahlen wirklich zu finden. Die im Text gezeigte Annäherungsmethode an die Wurzel von 2 zeigt dabei einen möglichen Weg, den Mathematiker

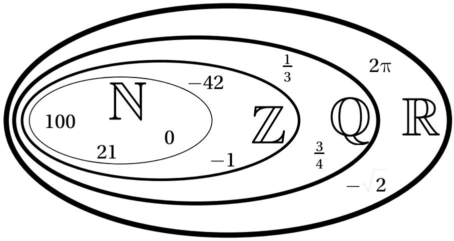

Abbildung 1.5 Die Zahlbereiche im Vergleich

gehen, um solche irrationalen Zahlen zu beschreiben. Diese Methode wird **Intervallschachtelung** genannt.

Entsprechend der im Text verwendeten Rechnung könnten Sie auch die immer kleiner werdenden Intervalle wie folgt angeben:

$$[1{,}4; 1{,}5], \quad [1{,}41; 142], \quad [1{,}414; 1415], \quad [1{,}4142; 1{,}4143], \quad \ldots .$$

Sie erkennen, dass das jeweils nachfolgende Intervall immer im Vorhergehenden enthalten ist und somit stets eine zwar positive aber stets kleiner werdende Länge besitzt. Wenn Sie dies bis ins Unendliche betreiben, dann beschreiben Sie genau einen Punkt, sozusagen das Grenzintervall der Länge null. Dieser eine Punkt, der vollständig mit rationalen Zahlen beschrieben wurde (in Form dieser Schachtelung der Intervalle), ist die gewünschte irrationale Zahl – in unserem Fall $\sqrt{2}$.

Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen

Glücklichweise gehören Sie nicht zu der Spezies, die Angst vor Variablen hat, oder doch? Lassen Sie mich Ihnen zeigen, warum Ihre Nicht-Angst auch wirklich berechtigt ist, denn wenn Variablen vorkommen, dann behandeln Sie diese mit Respekt, aber ansonsten wie jede andere Zahl auch. Das Prinzip der Rechnungen bleibt nämlich das gleiche.

Sie möchten $a \cdot \frac{a}{b^2}$ vereinfachen. Tun Sie es! Wie würden Sie $2 \cdot \frac{2}{3^2}$ vereinfachen? Sie würden die 2 auf den Bruchstrich ziehen und mit der anderen 2 multiplizieren? Gut! Dann machen Sie es genau so mit den Buchstaben: $a \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{a\dot{a}}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$. Fertig.

Sie bleiben tapfer und vereinfachen diesen Term $\frac{a}{b^2} : \frac{c}{a}$. Ich rechne einfach mal vor und Sie prüfen es nach und überdenken jeden einzelnen Schritt. $\frac{a}{b^2} : \frac{c}{a} = \frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2 c}$.

Jetzt wird es spannend. Vereinfachen Sie bitte $\frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{1}{x^2}$. Sie können nun den Standardweg gehen und einen gemeinsamen Nenner finden: $x^2 \cdot (x^3 - x^2)$. Sie rechnen weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 \cdot (x+1)}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} + \frac{1 \cdot (x^3-x^2)}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} \\
&= \frac{x^2 \cdot (x+1) + (x^3-x^2)}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} = \frac{x^3+x^2+x^3-x^2}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} \\
&= \frac{2x^3}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} = \frac{2x^3}{x^3 \cdot (x^2-x)} = \frac{2}{x(x-1)}
\end{aligned}$$

Das war nicht so schwer, oder? Aber konzentrieren muss man sich eben dennoch.

Das Summenzeichen

In der Mathematik geht es oft darum, komplizierte Zusammenhänge geschickt kompakt darzustellen. Dieses Prinzip werden Sie immer wieder erkennen, aber nicht immer wird es Ihnen im ersten Moment verständlich sein, da Sie erst die Symbole lesen lernen müssen, aber auf den zweiten oder dritten Blick werden Sie mir recht geben. Man schreibt: $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

BEISPIEL 1.5

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{3}(2i+1) &= (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) \\
&= 1 + 3 + 5 + 7 = 16.
\end{aligned}$$

Natürlich müssen Sie nicht immer bei 0 starten. So ist $\sum_{i=4}^{6} i = 4 + 5 + 6 = 15$. Erste Anwendungen zum Summenzeichen finden Sie im zweiten Kapitel in den Beispielen bei den Beweistechniken.

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Zwei der wichtigsten Adjektive, die in der Mathematik ständig zur Beschreibung von Bedingungen benutzt werden, sind *hinreichend* und *notwendig*. Ihre Erklärung ist eigentlich ganz einfach.

- Wenn mit einem Zustand A stets auch ein Zustand B eintritt, so bedeutet dies, dass der Zustand A ausreicht, um den Zustand B mit sich zu ziehen. Man sagt, A ist **hinreichend** für B. Es gilt die Implikation $A \rightarrow B$.

Schauen Sie: Wenn es regnet, dann wird die Erde nass. Das bedeutet, dass sowie es regnet, auch die Regentropfen die Erde befeuchten. Also hinreichend für die Befeuchtung der Erde ist Regen. Bezeichnen Sie den Zustand »es regnet« mit A und »die Erde wird nass« mit B. Dann gilt die Implikation $A \rightarrow B$. Natürlich ist dies nicht die einzige Möglichkeit, um die Erde feucht zu bekommen – Sie bekommen Ihren Rasen auch mit dem Gartenschlauch nass, so dass die Umkehrung nicht gilt.

- Wenn für einen Zustand A eine Eigenschaft B **notwendig** ist, dann wissen Sie, dass wann immer A eintritt auch B eingetreten sein muss. Es gilt die Implikation $A \rightarrow B$. Andere Beziehungen folgen daraus erstmal nicht.

Verstanden? Lassen Sie es mich testen: Damit ein Flugzeug fliegen kann, benötigt man Treibstoff. (Bitte keine pathotologischen Gegenbeispiele zu dieser Aussage konstruieren und an Segelflieger denken; ich versuche nur ein einfaches Beispiel zu geben.) Bezeichnen Sie daher die Eigenschaft »Flugzeug kann fliegen« mit A und »Flugzeug hat Treibstoff« mit B, dann ist B für A notwendig und es gilt: $A \rightarrow B$. Die Treibstoff-Bedingung ist natürlich nicht hinreichend für das Fliegen eines Flugzeuges, denn Sie brauchen mindestens noch Flugpersonal und vieles andere mehr. Die Umkehrung gilt daher nicht automatisch.

- Bedingen sich zwei Zustände gegenseitig, ist jeweils eine Bedingung hinreichend und notwendig für die andere, dann liegt hier eine Äquivalenz vor. Beide Zustände sind dann **äquivalent**.

Das versteht man erfahrungsgemäß schnell: Die zwei Zustände »Sie befinden sich in Skandinavien.« und »Sie sind in Norwegen, Schweden oder Finnland.« bedingen sich gegenseitig. Aus dem einen folgt das andere. Egal welchen Zustand Sie betrachten, es folgt der andere. Beide sind hinreichend und notwendig zugleich für den jeweils anderen. Diese Zustände sind äquivalent.

Dagegen ist der Zustand »Sie sind in Schweden« hinreichend für die ersten beiden, nicht aber notwendig, denn Sie könnten auch in Norwegen oder Finnland sein.

Grundlegende Begriffe über allgemeine Funktionen

Starten Sie bei Ihrem Geburtstag. Obwohl ich diesen nicht kenne, weiß ich, dass Sie dabei nur genau ein Datum im Kopf haben. Jedem Menschen ist dieser Tag eindeutig zugeordnet. Sie können eine Geburtstagszuordnung aufstellen und so jedem Namen ein Datum zuordnen, beispielsweise Kattrin $\mapsto$ 16.05.1981 oder anders geschrieben $geb(\text{Kattrin}) = 16.05.1981$ oder kürzer $g(\text{Kattrin}) = 16051981$. Das ist eine Funktion.

Definition

Eine **Funktion** ist eine Vorschrift mit der Eindeutigkeitsbedingung, das heißt keinem Objekt werden zwei Dinge zugeordnet. Dabei gibt es die Menge der Objekte, von denen Sie starten – den **Urbildbereich** oder **Definitionsbereich**, und die Menge der Werte, in die Sie abbilden – den **Bildbereich** oder **Wertebereich**.

In obigen Beispiel ist der Definitionsbereich eine Menge von Menschen und der Wertebereich die Menge der Geburtsdaten (hier als achtstellige Zahl geschrieben). Sie kürzen eine solche Vorschrift (Funktion) f mit dem Definitionsbereich D und dem Wertebereich W wie folgt ab: $f\colon D \to W$ und lesen »f ist eine Funktion von D nach W«.

BEISPIEL 1.6

Betrachten Sie die beiden Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, f_1(x) = x^2$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$. Hierbei bezeichnet $\mathbb{R} + 0$ die Menge der nicht negativen reellen Zahlen, also alle reellen Zahlen, die größer gleich null sind. Unterscheiden sich die beiden Funktionen? Ja, denn die Wertebereiche stimmen nicht überein: Bei der ersten Funktion betrachten Sie die nichtnegativen reellen Zahlen, bei der zweiten Funktion alle reellen Zahlen. Allerdings sind die Zuordnungsvorschriften und der Definitionsbereich gleich. Auch die Graphen beider Funktionen stimmen überein, wie Sie in Abbildung 1.6 sehen können.

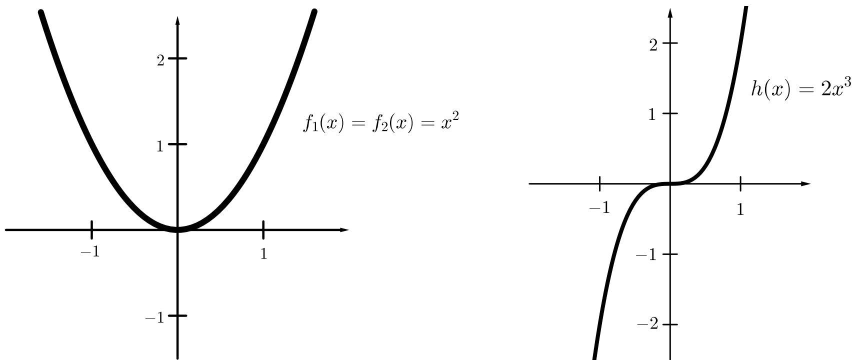

Abbildung 1.6 Zwei typische reelle Funktionen $f_1(x) = f_2(x) = x^2$ und $h(x) = 2x^3$

Tipp

Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie in Definitionsbereich, Wertebereich und Zuordnungsvorschrift übereinstimmen.

Umgekehrt gilt diese Eindeutigkeitseigenschaft bei Funktionen nicht immer. Sehen Sie sich noch einmal das Ausgangsbeispiel an. Es gibt durchaus Menschen, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Zwillinge beispielsweise! Oder betrachten Sie die Funktion f_1. Es gilt $f_1(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f_1(1)$. Dagegen erfüllt die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2x^3$ neben der Eindeutigkeitsbedingung auch die umgekehrte Eineindeutigkeitsbedingung: Wenn nämlich $2x^3 = 2y^3$ gilt, so auch $x^3 = y^3$ und sogar $x = y$. Eine solche Funktion heißt injektiv.

Definition

Eine Funktion $f\colon D \to W$ heißt **injektiv**, wenn aus $f(x) = f(y)$ immer auch $x = y$ folgt.

Aber es gibt noch eine andere Grundeigenschaft, auf die ich Ihre Aufmerksamkeit lenken möchte: Schauen Sie sich noch einmal die beiden Funktionen f_1 und f_2 aus Beispiel 1.6 an. Sie unterscheiden sich in den Wertebereichen. Die erste Funktion f_1 hat die Eigenschaft, dass jede Zahl in ihrem Wertebereich auch erreicht oder angenommen wird. Solche Funktionen nennt man surjektiv. Die zweite Funktion f_2 dagegen wird beispielsweise die Zahl -1 aus ihrem Wertebereich nie annehmen, das heißt es gibt keine reelle Zahl x, so dass $f_2(x) = -1$ gilt.

Definition

Eine Funktion $f\colon D \to W$ heißt **surjektiv**, wenn für jedes $w \in W$ ein $d \in D$ existiert, so dass $f(d) = w$ gilt. Eine Funktion heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

So ist die obige Funktion h bijektiv, wie Sie sich anhand des Graphen (siehe Abbildung 1.6) leicht überlegen können.

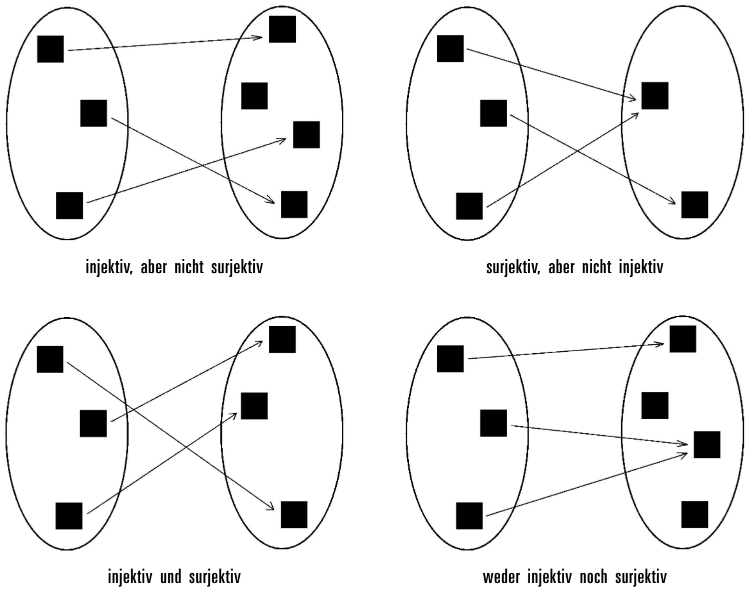

Abbildung 1.7 Injektivität vs. Surjektivität – schematische Darstellung der vier Fälle

Aufgabe 1.1

Man sagt, dass eine Relation $\sim$ eine so genannte Äquivalenzrelation ist, wenn folgende drei Bedingungen gelten:

- **Reflexivität:** Es gilt stets $A \sim A$.
- **Symmetrie:** Es gilt stets mit $A \sim B$ auch $B \sim A$.
- **Transitivität:** Es gilt stets mit $A \sim B$ und $B \sim C$ auch $A \sim C$.

Zeigen Sie, dass die bei der Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen eingehende Relation $\sim$, definiert auf den Paaren von ganzen Zahlen $[a, b]$, eine Äquivalenzrelation darstellt, wobei gilt:

$$[a, b] \sim [c, d] \quad :\Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

Aufgabe 1.2

Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf Paaren von natürlichen Zahlen an, die in die Konstruktion der ganzen Zahlen eingeht.

Aufgabe 1.3

Geben Sie die Dezimalbruchschreibweise von $\frac{1371742}{11111111}$ an.

Geben Sie den Dezimalbruch $0{,}\overline{142857}$ als gemeinen Bruch an.

Aufgabe 1.4

Geben Sie die Summe der zweistelligen geraden Zahlen mittels der Schreibweise mit Summenzeichnen an. Wieviele Summanden hat diese Summe?

Aufgabe 1.5

Geben Sie eine injektive aber nicht surjektive, eine surjektive aber nicht injektive und eine bijektive Funktion über den reellen Zahlen an.

Auf einen Blick ...

- Natürliche Zahlen sind durch den Startpunkt null und jeweilige Nachfolgerzahlen charakterisiert.
- Durch den Abschluss der natürlichen Zahlen unter der Subtraktion erreicht man die ganzen Zahlen.
- Durch den Abschluss der ganzen Zahlen unter der Division erreicht man die rationalen Zahlen.
- Die reellen Zahlen füllen die Lücken der rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl.
- Formal erhält man jeweils die nächste Stufe von Zahlen durch die Betrachtung geeigneter Äquivalenzklassen.
- Notwendige und hinreichende Bedingungen müssen wohl unterschieden werden.
- Bijektive Funktionen sind sowohl injektiv als auch surjektiv.