1 Grundbegriffe

In diesem Kapitel ...

- Summen- und Produktzeichen
- Mengenlehre
- Binomialkoeffizienten
- Vollständige Induktion

»Aller Anfang ist schwer« ...sagt man gewöhnlich, doch nicht in diesem Buch! Das aktuelle Kapitel dient dazu, Ihnen den Anfang so einfach wie möglich zu machen. Hier werden die grundlegenden Ideen vorgestellt, und Ihnen wird das Werkzeug an die Hand gegeben, das Sie im Verlauf des Buchs immer wieder benötigen. Als erstes geht es um häufig verwendete mathematische Symbole, anschließend werden Mengen und der binomische Lehrsatz vorgestellt. Den Abschluss bildet die vollständige Induktion, die als einfaches Beweisverfahren an zahlreichen Stellen im Schnellkurs benötigt wird.

1.1 Summen- und Produktzeichen

In diesem kurzen Abschnitt wird auf einige in der Mathematik übliche Symbole eingegangen, die sehr oft Verwendung finden. Es geht um die kompakte Darstellung von Summen und Produkten, deren Ursache zum Teil in der Faulheit von Mathematikern zu finden ist. Diese Grundlagen sind im Rahmen einer Einführung zentral, und Sie sollten den Abschnitt aufmerksam lesen, sofern Sie mit der erklärten Symbolik nicht vertraut sind. Wissen Sie bereits Bescheid, dann können Sie das Kapitel problemlos überspringen.
In der höheren Mathematik können sowohl Summen als auch Produkte auftreten, die aus sehr vielen oder sogar unendlich vielen Gliedern bestehen. Um einem das Leben leichter zu machen, dient zur kurzen Darstellung von Summen das **Summenzeichen**:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,. \tag{1.1}$$

Hierbei nennt man i den **Summationsindex**, über den die Summe läuft. Unterhalb des Summenzeichens wird dessen Startwert angegeben und oberhalb der Endwert. Wie Sie den Summationsindex nennen, ist nicht wichtig. Schauen Sie sich dazu die folgenden Beispiele an:

$$\sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6\,, \tag{1.2a}$$

$$\sum_{k=0}^{2} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5\,, \tag{1.2b}$$

$$\sum_{\alpha=10}^{100} x^\alpha = x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{100}\,. \tag{1.2c}$$

Summationsindizes lassen sich verschieben, wobei der Wert der Summe jedoch gleich bleibt. Für die Summe aus Gl. (1.1) kann man z.B. die Ersetzung $i = i' + 1$ vornehmen, wobei i' ein neuer Summationsindex ist. Für $i = 1$ bzw. $i = n$ gilt dann $i' = 0$ und $i' = n - 1$. Dem neuen Summationsindex gibt man oft wieder den Namen des alten Indexes:

$$\sum_{i'=0}^{n-1} a_{i'+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,. \tag{1.3}$$

Dabei wird der erste Schritt meistens weggelassen. Ebenso kann man Teile der Summe abspalten, womit sich der Startwert bzw. der Endwert des Summationsindex ändert, also

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i = -a_0 - a_{n+1} + \sum_{i=0}^{n+1} a_i = \ldots\,. \tag{1.4}$$

Zur Darstellung von Produkten dient das **Produktzeichen**, das ähnlich wie das Summenzeichen funktioniert:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\,. \tag{1.5}$$

Hier ist i der **Produktindex**. Unterhalb des Produktzeichens wird auch hier der Startwert angegeben und oberhalb der Endwert. Zum Verständnis dienen wieder einige Beispiele:

$$\prod_{i=1}^{4} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\,, \tag{1.6a}$$

$$\prod_{k=0}^{2} k = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0\,, \tag{1.6b}$$

$$\prod_{\beta=1}^{10} x^{\beta} = x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^{10} = x^{55}\,. \tag{1.6c}$$

Ebenso lässt sich bei Produkten der Index verschieben. Führt man einen neuen Index i' gemäß $i = i' - 1$ ein, so entsprechen $i = 1$ bzw. $i = n$ den neuen Indexgrenzen $i' = 2$ bzw. $i' = n + 1$. Dann geht das Produkt aus Gl. (1.5) in das folgende über, dessen Wert jedoch nach wie vor derselbe ist:

$$\prod_{i'=2}^{n+1} a_{i'-1} = \prod_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n\,. \tag{1.7}$$

Analog zu Summen kann man einzelne Faktoren abspalten oder hinzufügen. Für Gl. (1.5) gilt dann:

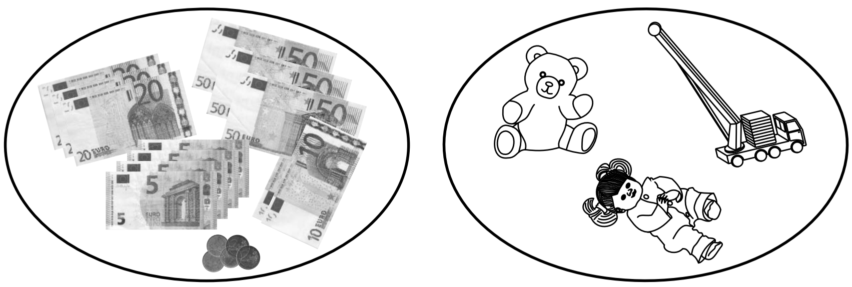
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_n \cdot \prod_{i=2}^{n-1} a_i = \frac{1}{a_0 \cdot a_{n+1}} \prod_{i=0}^{n+1} a_i = \ldots\,. \tag{1.8}$$

Diese Art, Summen und Produkte abkürzend zu schreiben, ist ungemein wichtig in der höheren Mathematik. Sowohl in Vorlesungen als auch in der einschlägigen Literatur wird davon ausgiebig Gebrauch gemacht. Deshalb ist es sehr wichtig, dass Sie mit den Symbolen umgehen können. Sie sollten sowohl ihre Definitionen verstehen als auch Indexverschiebungen beherrschen, die oft ohne weitere Erklärung durchgeführt werden.

1.2 Mengenlehre

Die **Mengenlehre** ist ein großer Teil des Fundaments, auf dem die Mathematik aufbaut. Sie beschäftigt sich mit den sogenannten **Mengen** an sich sowie dem Rechnen mit Mengen. Cantor leistete auf diesem Gebiet Bahnbrechendes, und seine Definition einer Menge wird auch heute noch verwendet. Laut Cantor ist eine Menge eine Zusammenfassung wohldefinierter, unterscheidbarer Dinge zu einem Ganzen. Das hört sich schon ziemlich abstrakt an, was für eine mathematische Definition nicht unüblich ist. Doch eigentlich ist eine Menge eines der normalsten Dinge der Welt.

In Ihrem Sprachgebrauch haben Sie diesen Begriff sicherlich schon oft verwendet, ohne darüber nachzudenken. Wenn Sie sagen, dass jemand eine Menge Geld hat oder die Kinder des Nachbarn eine Menge Spielzeug, dann sind das bereits geläufige Beispiele. In diesem Sinne steht *eine Menge* immer für *viel*, doch eine Menge in der Mathematik muss nicht notwendigerweise viele Dinge enthalten. Manchmal kann das nur eine einzige Sache sein oder es gibt auch Mengen, die leer sind! Schauen Sie sich die im folgenden Abschnitt aufgeführten Beispiele an, um sich mit dem mathematischen Begriff der *Menge* vertraut zu machen.



(a) eine Menge Geld

(b) eine Menge Spielzeug

Abbildung 1.1 Zwei Mengen, die verschiedene Dinge umfassen

Man kann Mengen anschaulich darstellen. Nehmen Sie ein Blatt Papier und zeichnen Sie darauf verschiedene Dinge. Um auf das Beispiel *eine Menge Geld* einzugehen, können Sie ein paar 20- und 50-Euro-Scheine zeichnen. Das ist dann sicherlich schon eine Menge Geld, wenn auch nur auf dem Papier. Umschließen Sie die Zeichnung danach mit einem Kreis oder einem Oval; dann haben Sie bereits die anschauliche Darstellung einer Menge (Abb. 1.1a). Geht es um *eine Menge Spielzeug*, können Sie ähnlich vorgehen. Malen Sie z.B. einen Teddybären, eine Spielzeugeisenbahn und eine Puppe, und umschließen Sie das alles wieder mit einem Oval (Abb. 1.1b). Im Allgemeinen nennt man die Dinge, die sich in einer Menge befinden, die **Elemente** dieser Menge.

Schreibweise

In der Mathematik an sich arbeitet man nicht mit Spielzeug oder Geld; als Mathematiker an der Universität wird man auch sicher nicht reich. Es geht dann eher darum, mit Zahlen oder anderen mathematischen Objekten umzugehen. Schreiben Sie auf ein Blatt Papier eine 2, 3, 5, 7, 13, und umschließen Sie das wieder mit einem Oval. Dann haben Sie eine Menge, die eben diese Zahlen als Elemente enthält. Mathematiker sind in der Regel faul und möchten das Ganze einfacher schreiben. Öffnen Sie eine geschweifte Klammer, und schreiben Sie die Elemente der Menge nacheinander auf. Dabei trennen Sie die einzelnen Elemente mit einem Komma voneinander und schließen die Klammer am Schluss wieder. Dann sollte $\{2, 3, 5, 7, 13\}$ auf Ihrem Blatt stehen, und genau auf diese Weise schreiben Mathematiker Mengen.
Hantiert man mit unterschiedlichen Mengen, gibt man diesen Bezeichnungen, z.B. $A = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ und $B = \{5, 7, 11\}$. Dabei kommt es übrigens nicht auf die Reihenfolge der einzelnen Elemente an. Also handelt es sich bei $A = \{3, 2, 5, 7, 13\} = \{13, 7, 5, 3, 2\} = \{5, 13, 2, 7, 3\}$ jeweils um dieselbe Menge. Wie Sie sehen, kommt auch jedes Element nur einmal vor, denn nach Cantor sollen die Elemente unterscheidbar sein. Von daher ist $\{2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 13, 13\} = \{2, 3, 5, 7, 13\} = A$. Es ist auch unnötig, gleiche Elemente mehrfach aufzuführen. Möchte man sagen, dass ein bestimmtes Element in einer Menge liegt oder nicht liegt, so tut man das durch die Schreibweise $7 \in A$ bzw. $13 \notin B$. Übrigens gibt es auch eine Menge, die keinerlei Elemente enthält. Man bezeichnet sie als **leere Menge** und schreibt sie in der Form $\{\}$ oder als $\emptyset$.

Mengendiagramme

Am Anfang des Kapitels haben Sie Mengen grafisch dargestellt, indem Sie deren Elemente aufgezeichnet und diese mit einem Oval umschlossen haben. Derartige Darstellungen sind nicht einfach nur dazu da, um Ihnen den Mengenbegriff näher zu bringen, sondern sie werden tatsächlich so auch von Mathematikern benutzt; man nennt sie **Mengendiagramme**. Wenn die Elemente einer Menge nicht näher bestimmt sein sollen, malt man einfach ein leeres Oval und schreibt den Namen der Menge hinein. Eine derartige Darstellung ist vor allem am Anfang überaus hilfreich und erleichtert den Umgang mit Mengen ungemein.

Mengenoperationen

Eine bestimmte Menge an sich kann für den Mathematiker bereits interessant sein. Oft ist man jedoch nicht einfach nur an einer einzigen Menge interessiert, sondern man möchte zwei oder mehrere Mengen – und damit auch deren Elemente – miteinander kombinieren. Gewöhnliche Zahlen lassen sich beispielsweise über die Grundrechenarten miteinander kombinieren. Man führt dazu die Operationen der Addition, Subtraktion usw. ein und legt für sie bestimmte Regeln fest. Auch für Mengen gibt es solche **Mengenoperationen**, und diese lernen Sie im Folgenden kennen. Außerdem wird jede Mengenoperation durch ein Symbol gekennzeichnet, so wie Sie das ja auch von den Grundrechenarten her kennen. Nehmen wir an, uns liegen zwei Mengen A und B vor, deren Elemente nicht näher bekannt sind; das ist auch zunächst nicht notwendig.

1. Teilmenge einer Menge:
   Eine Menge B ist eine **Teilmenge** einer Menge A, sofern alle Elemente von B auch in A liegen. Umgekehrt müssen sich jedoch nicht notwendigerweise alle Elemente von A in B befinden. In einem Mengendiagramm ist eine Teilmenge B von A dadurch charakterisiert, dass ihr Oval vollständig in dem Oval von A liegt (Abb. 1.2a). Man verwendet zur Darstellung die Symbolik $B \subset A$. Für die obigen beiden Mengen $A = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ und $B = \{5, 7, 11\}$ ist $\{5, 11\} \subset B$, jedoch $\{5, 11\} \not\subset A$. Da nicht alle Elemente von B auch in A liegen (die Zahl 11) ist $B \not\subset A$.
2. Schnittmenge von Mengen:
   Die **Schnittmenge** (**Durchschnitt**) zweier Mengen A und B ist eine Menge C, die alle Elemente umfasst, die *sowohl* in A *als auch* in B vorkommen. Die Elemente in C müssen also in beiden Mengen liegen (Abb. 1.2b). Befindet sich ein Element nur in A oder nur in B, dann gehört es nicht zur Schnittmenge von A und B. Das Bilden der Schnittmenge kürzt man mit dem Symbol $\cap$ ab, also ist $C = A \cap B$. Beispielsweise ist der Durchschnitt der beiden Mengen $A = \{2, 3, 5, 7, 13\}$ und $B = \{5, 7, 11\}$ gegeben durch $A \cap B = \{5, 7\}$.
3. Vereinigungsmenge (Vereinigung) von Mengen:
   Die **Vereinigungsmenge** zweier Mengen A und B ist eine Menge C, die alle Elemente enthält, die *entweder* in A *oder* in B liegen (Abb. 1.2c). Die Vereinigung ist nichts anderes als eine Zusammenführung beider Mengen. Hierbei ist es nicht wichtig, ob ein Element nur in einer oder in

beiden Mengen A, B vorkommt. Die Vereinigung wird durch das Symbol $\cup$ gekennzeichnet: $C = A \cup B$. Beispielsweise gilt für die beiden obigen Mengen $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

4) Komplement von Mengen:
Von zwei Mengen A und B lässt sich das **Komplement** bilden; die zugehörige Verknüpfung wird mit einem umgekehrten Schrägstrich gekennzeichnet. Das Komplement $A \setminus B$ besteht aus allen Elementen von A, die nicht in B enthalten sind (Abb. 1.2d). Das Komplement der beiden bisher verwendeten Mengen A und B lautet $A \setminus B = \{2, 3, 13\}$.

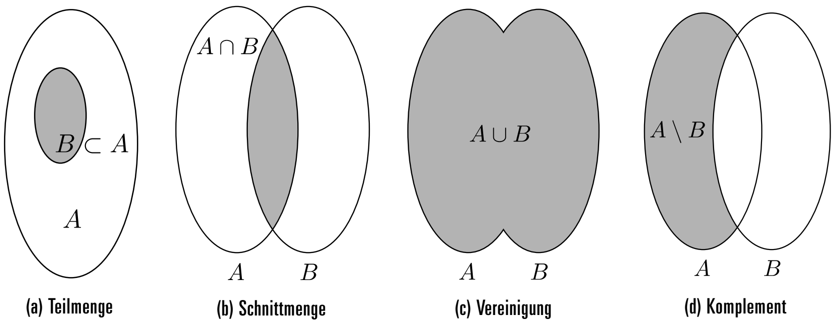


Abbildung 1.2 Kombinationen zweier Mengen A und B

Rechenregeln für Mengen

Wie beim Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen gibt es auch für Mengenoperationen gewisse Rechenregeln. Das schöne ist, dass man diese Regeln mit Hilfe der Mengendiagramme wunderbar veranschaulichen kann. Deshalb ist dieser Abschnitt auch eine Hilfe, um zu lernen, die Mengendiagramme besser zu verstehen.
Es werden drei Mengen A, B und C betrachtet. Dann gelten die **Regeln von de Morgan**:

$$(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C)\,, \tag{1.9a}$$

$$(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A)\,, \tag{1.9b}$$

$$C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)\,, \tag{1.9c}$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)\,, \tag{1.9d}$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)\,. \tag{1.9e}$$

Nun sollen die ersten beiden Zusammenhänge mit Mengendiagrammen nachvollzogen werden. Schauen Sie sich dazu Abb. 1.3 an. Die Mengen A und B sind so gezeichnet, dass sie eine nichtverschwindende Schnittmenge haben und ebenso nichtverschwindende Schnittmengen mit C.

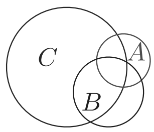


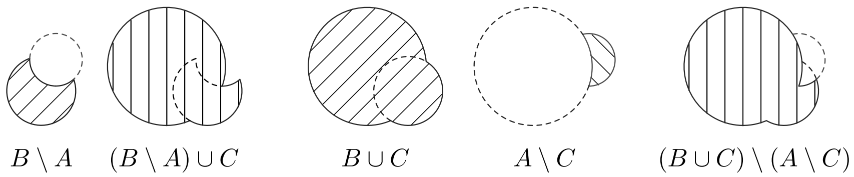
Abbildung 1.3 Drei Mengen A, B und C, die nichtleere Schnittmengen miteinander haben

Die linke Seite von Gl. (1.9a) ist so zu verstehen, dass man zunächst die Schnittmenge von A und B aus B entfernt. Das erhaltene Ergebnis wird mit C vereinigt. Auf der rechten Seite wird zunächst die Vereinigung von B und C gebildet und die Schnittmenge von A und C aus A entfernt. Die Schnittmenge der letzten Menge wird dann aus der ersten Vereinigung herausgenommen. Dargestellt ist das Ganze in Abb. 1.4a.
Auf der linken Seite von Gl. (1.9b) wird der Schnitt von A und B aus B entfernt und die sich ergebende Menge mit C geschnitten. In der Mitte wird B mit C geschnitten und daraus wird der zugehörige Schnitt mit A entfernt. Auf der rechten Seite wird der Schnitt von A und C aus C herausgenommen und die erhaltene Menge mit B vereinigt (Abb. 1.4b). Alle Operationen führen auf dasselbe Ergebnis.

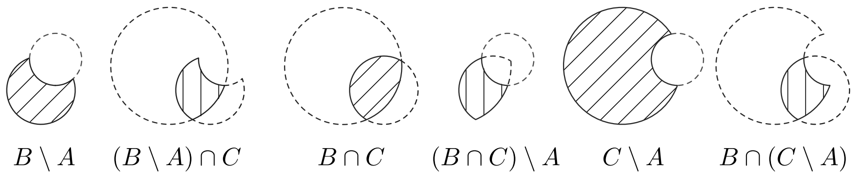
Zahlenmengen

Der Mengenbegriff erlaubt es, Zahlen mit bestimmten Eigenschaften in Gruppen einzuteilen. Diese **Zahlenmengen** bilden eine der Grundfesten der Mathematik.

- Die Menge der **natürlichen Zahlen** ist $\mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$. Ob man die Null dazunimmt, hängt davon ab, welche Quelle man benutzt. Definiert



(a) Gl. (1.9a)



(b) Gl. (1.9b)

Abbildung 1.4 Graphische Darstellungen der Formeln von de Morgan

man $\mathbb{N}$ wie angegeben, also ohne die Null, dann gibt es zusätzlich die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. Letztere ist die Vereinigung von $\mathbb{N}$ und der Menge mit der Null als einziges Element: $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- Die Menge der **negativen ganzen Zahlen** ist $\mathbb{Z}^- \equiv \{-1, -2, -3, \dots\}$. Ihre Elemente entsprechen den Elementen von $\mathbb{N}$, wobei jedes einzelne ein Minuszeichen erhält.
- Die Menge der **ganzen Zahlen** ist $\mathbb{Z} \equiv \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es handelt sich dabei um eine Vereinigung der Menge der negativen ganzen Zahlen, der Null und der Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}_0$.
- Die Menge der **rationalen Zahlen** enthält als Elemente alle Zahlen, die sich als Bruch mit ganzen Zahlen darstellen lassen: $\mathbb{Q} \equiv \{m/n; m, n \in \mathbb{Z}; n \neq 0\}$. Beispielsweise sind $-11/3$ und $17/191$ rationale Zahlen.
- Zusammen mit den rationalen Zahlen werden alle Zahlen, die nicht als Bruch mit ganzen Zahlen dargestellt werden können, in der Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ zusammengefasst. Dazu gehören Wurzeln, also z.B. $\sqrt{2}$, der berühmte **goldene Schnitt** $\Phi \equiv (1 + \sqrt{5})/2$ und verschachtelte Wurzeln wie $\sqrt{\sqrt[5]{3} + 1}$. Das Komplement $\mathbb{I} \equiv \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man die **irrationalen Zahlen**. Dabei handelt es sich um alle reelle Zahlen, die übrig bleiben, wenn man die durch Brüche darstellbaren Zahlen entfernt.

- Die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ ist eine Erweiterung der reellen Zahlen, die die Angabe der Lösungen von Gleichungen erlaubt, die mit den reellen Zahlen allein nicht bestimmt werden können. Das umfasst z.B. Lösungen von Gleichungen der Form $x^2 = -a$ mit $a > 0$. Auf die komplexen Zahlen wird in Kapitel 6 des Buchs näher eingegangen.

Letztendlich sind alle in der Reihenfolge angegebenen Zahlenmengen Teilmengen voneinander: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Intervalle und ihre Darstellung durch Mengen

Zahlenmengen werden oft an Zahlenstrahlen dargestellt. Ein bestimmter Abschnitt eines solchen Zahlenstrahls nennt man **Intervall**. Auf der Grundlage von $\mathbb{R}$ beschreibt z.B. $[a, b]$ alle reellen Zahlen x, für die $a \leq x \leq b$ gilt. Hierbei sind a und b die **Intervallgrenzen**, und sie gehören in diesem Fall zum Intervall selbst dazu. Derartige Intervalle bezeichnet man deshalb als **geschlossen**. Im Gegensatz dazu sind $[a, b)$ und $(a, b]$ **halboffen**. Das erste umfasst alle reellen Zahlen mit $a \leq x < b$ und das zweite mit $a < x \leq b$. Letztendlich sind **offene** Intervalle solche, bei denen keine der Intervallgrenzen selbst dazugehört, also (a, b). Letzteres steht stellvertretend für $a < x < b$.
Man kann jedes Intervall auch als Menge betrachten. Die Schreibweise für die oben genannten Intervalle als Mengen lautet wie folgt:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}\,, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}\,, \tag{1.10a}$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}\,, \quad M_4 = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}\,. \tag{1.10b}$$

Sie sehen, dass in dieser Art der Formulierung *eine Menge* an Information steckt. Zunächst wird die vollständige Zahlenmenge angegeben und anschließend alle Eigenschaften, die die betrachteten Elemente der Menge erfüllen. Beide Informationen werden durch einen senkrechten Strich voneinander abgetrennt.
Für die obigen Mengen ist b die **kleinste obere Schranke** (das **Supremum**), weil alle Elemente kleiner oder gleich b sind und b zudem kleiner ist als alle anderen oberen Schranken, die man angeben könnte. Dementsprechend handelt es sich bei a um die **größte untere Schranke** (das **Infimum**), denn alle Elemente dieser Mengen sind größer als a und a ist größer als alle möglichen unteren Schranken, von denen es unendlich viele gibt. Beachten Sie, dass Supremum und Infimum nicht notwendigerweise Teil der jeweiligen Menge sein müssen. Beispielsweise gehört b nicht mehr zu den Mengen M_2, M_4 und

a nicht zu M_3, M_4. Gehört ein Supremum noch zu einer Menge selbst, so heißt es **Maximum**. Ein Infimum nennt man in diesem Falle auch **Minimum**. Für die gegebenen Mengen ist b ein Maximum von M_1, M_3 und a ein Minimum von M_1, M_2.

1.3 Binomialkoeffizienten

Aus der Schule kennen Sie sicherlich noch das **Pascal'sche Dreieck**, das in Abb. 1.5a gezeigt ist. Erinnern Sie sich auch daran, wo die auftretenden Zahlen eine Rolle spielen? Wenn Sie eine Summe aus zwei Variablen – also z.B. $x + y$ – potenzieren, handelt es sich bei den Zahlen im Pascal'schen Dreieck um die Koeffizienten des sich ergebenden Ausdrucks. Beispielsweise kann man die folgenden Gleichungen aus der dritten, vierten bzw. fünften Spalte des Dreiecks ablesen:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \,, \tag{1.11a}$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \,, \tag{1.11b}$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \,. \tag{1.11c}$$

Es gibt eine zweite Möglichkeit, das Pascal'sche Dreieck aufzuschreiben, die Sie möglicherweise in der Schule nicht kennengelernt haben; gezeigt ist sie in Abb. 1.5b. Hier entspricht jede einzelne Zahl einem Ausdruck der Form $\binom{n}{k}$ mit $n, k \in \mathbb{N}_0$, den man **Binomialkoeffizient** nennt. Letztere sind wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \,. \tag{1.12}$$

Hier ist $k! \equiv k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ die **Fakultät**, wobei $0! \equiv 1$. Sofern $n \in \mathbb{N}_0 \geq k$ ist, kann man Gl. (1.12) auch in folgender Form schreiben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \,. \tag{1.13}$$

Der Faktor $(n - k)!$ im Nenner kürzt dabei die zusätzlichen Faktoren aus dem Zähler. Die Bedingung $n \in \mathbb{N}_0 \geq k$ muss jedoch gefordert werden, denn die Fakultät ist zunächst nur für nichtnegative, ganze Zahlen definiert. Für das

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

(a) geschrieben direkt mit Zahlen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

(b) geschrieben mit Binomialkoeffizienten

Abbildung 1.5 Die ersten sechs Zeilen des Pascal'schen Dreiecks.

Pascal'sche Dreieck ist diese Voraussetzung problemlos erfüllt. Probieren Sie es an einigen Beispielen aus:

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{(0!)^2} = 1\,, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(1!)^2} = 2\,, \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3\,, \quad \ldots\,. \tag{1.14}$$

Aus Gl. (1.12) sieht man sofort, dass $\binom{n}{k} = 0$, sofern $k > n$ ist. In dem Fall enthält das Produkt im Zähler immer eine Null, womit der Ausdruck verschwindet. Beachten Sie jedoch, dass dann Gl. (1.13) nicht angewendet werden darf. Des Weiteren gilt allgemein

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1\,, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1\,, \tag{1.15a}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n\,, \quad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n\,. \tag{1.15b}$$

Aus diesen Gründen stehen an den diagonal verlaufenden Seitenlängen des Pascal'schen Dreiecks lauter Einsen, und in den Diagonalen jeweils darunter befindet sich eine Aneinanderreihung der natürlichen Zahlen. Aus

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{1.16}$$

lässt sich außerdem die Symmetrie des Pascal'schen Dreiecks zur mittleren senkrechten Achse erklären. Schließlich geht durch Spiegeln an dieser Achse k im zweiten Eintrag des Binomialkoeffizienten in $n - k$ über. Zu guter Letzt bekommt man durch Addition zweier benachbarter Einträge im Pascal'schen

Dreieck die Zahl unter den beiden Einträgen. Die Aussage versteckt sich im folgenden wichtigen Zusammenhang:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{1.17}$$

Diese kurze Einführung zu den Binomialkoeffizienten soll genügen. Da sie für manche Themen in der höheren Mathematik ein grundlegendes Handwerkszeug sind und an gewissen Stellen des Buchs benötigt werden, ist es von Vorteil, sich mit ihnen und den genannten Eigenschaften vertraut zu machen.

1.4 Vollständige Induktion

In diesem Buch geht es nicht darum, mathematische Beweise zu behandeln. Das finden Sie zuhauf in allen erdenklichen Mathematikbüchern. Das Verfahren der **vollständigen Induktion** ist jedoch so grundlegend und manchmal auch in der Anwendung wichtig, dass an dieser Stelle darauf eingegangen werden soll. Die vollständige Induktion ist ein Verfahren zum Beweis mathematischer Aussagen, die für die Menge der natürlichen Zahlen (oder eine Teilmenge davon) gültig sind. Angenommen, Sie werden damit konfrontiert, die Gültigkeit der folgenden Formel nachzuweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)\,. \tag{1.18}$$

Sie besagt, dass die Summe der ersten n natürlichen Zahlen dem Ausdruck auf der rechten Seite entspricht. Zum Beispiel gilt für $n = 5$:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6\,. \tag{1.19}$$

Wenn Sie die Formel nun für beliebiges n nachweisen möchten, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder Sie leiten die Formel her, so wie es Gauß bereits als Schüler gemacht hat, oder Sie nehmen die Formel als gegeben an und beweisen sie mittels der vollständigen Induktion.

Allgemeines Vorgehen

Angenommen, Sie haben eine mathematische Aussage $A(n)$, was z.B. eine Gleichung oder Ungleichung sein kann. Diese Aussage soll ab einer natürli-

chen Zahl $n = n_0$ gültig sein; meistens ist $n_0 = 1$. Bei der vollständigen Induktion weist man zunächst nach, dass die Aussage für n_0 wahr ist; man nennt dies den **Induktionsanfang**. Danach nimmt man ihre Gültigkeit für ein beliebiges n an, was die **Induktionsvoraussetzung** ist. Unter dieser Annahme wird dann durch Umformen die Aussage für $n + 1$, die **Induktionsbehauptung**, gezeigt. Der letzte Schritt heißt **Induktionsschluss**, und der stellt sich im Allgemeinen als der schwierigste dar.
Ist es möglich, den Induktionsschluss nachzuweisen, dann steht die Gültigkeit der Aussage ab n_0 fest. Schließlich haben Sie ja dann gezeigt, dass aus der Gültigkeit der Aussage für $n = n_0$ die Gültigkeit für $n = n_0 + 1$ folgt. Ist sie für $n = n_0 + 1$ war, dann auch für $n = (n_0 + 1) + 1 = n_0 + 2$, und so setzt sich das Spielchen fort.

Beweis von Gleichungen

Um die allgemeine Herangehensweise zu veranschaulichen, ist das anfangs genannte Beispiel nützlich. Es handelt sich dabei auch um eines der Standardbeispiele für die vollständige Induktion. Gezeigt werden soll also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n + 1) . \tag{1.20}$$

Auf der linken Seite steht die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Die erste natürliche Zahl ist die eins, also ist $n_0 = 1$. Am geschicktesten schreiben Sie sich den Verlauf eines Beweises mittels der vollständigen Induktion gemäß des folgenden Schemas auf:

- Induktionsanfang:

  $$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1 . \tag{1.21}$$

  Damit ergibt sich mit $1 = 1$ eine wahre Aussage. Die Gleichung stimmt also zumindest für die erste natürliche Zahl. Und weiter geht es.
- Induktionsvoraussetzung: Gleichung (1.20) sei gültig für ein beliebiges $n \in \mathbb{N} > 1$.
- Induktionsbehauptung: Gl. (1.20) soll auch dann gelten, wenn man n durch $n + 1$ ersetzt:

  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) . \tag{1.22}$$

- Induktionsschluss: Hier wird die Gültigkeit von Gl. (1.22) durch Umformungen und Argumentation gezeigt. Wie geht man hier am besten vor? Beim Induktionsschluss für eine Gleichung sucht man sich eine der beiden Seiten der Gleichung aus und formt diese so um, dass die Induktionsvoraussetzung zum Einsatz kommt. Sie wurde schließlich als gültig angenommen. Oft ist eine der beiden Seiten einer solchen Gleichung eine Summe oder ein Produkt. Es ist dann geschickt, diese Seite zu wählen und entsprechend umzuformen, um die Induktionsvoraussetzung einzubauen. Also tun wir das! Die Summe über die ersten $n + 1$ natürlichen Zahlen lässt sich auseinanderziehen in eine Summe über die ersten n natürlichen Zahlen, zu der man die $(n + 1)$-te natürliche Zahl addiert:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n + 1)\,. \tag{1.23}$$

  Und jetzt können Sie sofort die Induktionsvoraussetzung verwenden!

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n + 1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)\,. \tag{1.24}$$

  Bitte beachten Sie, dass der Gebrauch der Induktionsvoraussetzung mit der Abkürzung »IV« über dem jeweiligen Gleichheitszeichen angedeutet wurde. Das ist eine sinnvolle Schreibweise, denn so lässt sich schön nachvollziehen (auch für Sie selbst), an welcher Stelle Sie die Induktionsvoraussetzung verwendet haben.
  Das Ergebnis entspricht nun Gl. (1.22), deren Gültigkeit nachgewiesen werden sollte. Damit wurde Gl. (1.20) mittels vollständiger Induktion bewiesen.

Beweis von Ungleichungen

Eine schöne Eigenschaft der vollständigen Induktion ist, dass sie nicht ausschließlich auf Gleichungen anwendbar ist, sondern ganz allgemein auf mathematische Aussagen, die auf der Menge der natürlichen Zahlen beruhen. Solche Aussagen können auch Ungleichungen sein, worum es in diesem Abschnitt geht. Angenommen, ein Knobler behauptet, er habe »durch Probieren« die folgende Ungleichung gefunden:

$$2^n > n^2\,, \quad n \geq 5\,. \tag{1.25}$$

Sie stellen ihn also auf die Probe, indem Sie die Ungleichung einer sorgfältigen Prüfung unterziehen und zwar durch vollständige Induktion. Zunächst ist das besondere hier, dass die Ungleichung scheinbar erst ab $n = 5$ gültig ist. Nachrechnen der Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ führt auf die Aussagen

$$2 > 1\,, \quad 4 > 4\,, \quad 8 > 9\,, \quad 16 > 16\,, \tag{1.26}$$

die alle falsch sind. Sie sehen also, dass der Induktionsanfang nicht notwendigerweise bei $n = 1$ liegen muss.

- Induktionsanfang: Für $n = 5$ führt die Ungleichung auf $32 > 25$, was eine wahre Aussage ist.
- Induktionsvoraussetzung: Es wird angenommen, dass $2^n > n^2$ für ein beliebiges $n > 5$ gilt.
- Induktionsbehauptung: $2^{n+1} > (n+1)^2$
- Induktionsschluss: Zu überprüfen ist die Induktionsbehauptung mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung.

  $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\mathrm{IV}}{>} 2n^2\,. \tag{1.27}$$

  Wie geht es hier nun weiter? Beachten Sie, dass $n - 1 > 2$ für $n \geq 5$ gilt. Dann ist ebenso $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 > 4$ und daher $n^2 > 2n + 3 > 2n + 1$. Dafür benötigt man keine vollständige Induktion; es ist sofort nachvollziehbar. Man kann dieses Zwischenergebnis jedoch jetzt geschickt verwenden:

  $$2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\,. \tag{1.28}$$

  Die Gültigkeit der Induktionsbehauptung ist damit für $n \geq 5$ nachgewiesen, womit (1.25) richtig ist.

Auf einen Blick ...

- Summen- und Produktzeichen sind wie folgt definiert:

  $$\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n\,, \quad \prod_{i=0}^{n} a_i \equiv a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n\,. \tag{1.29}$$

- In Mengen sind wohldefinierte Elemente zu einem Ganzen zusammengefasst.
- Man kann verschiedene Mengen miteinander kombinieren. In diesem Zusammenhang gibt es die Teilmenge, Schnittmenge, Vereinigungsmenge und das Komplement. Die Regeln von de Morgan geben Gesetzmäßigkeiten für die Kombination von Mengen an.

- Die Binomialkoeffizienten
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0 \geq k \tag{1.30}$$
entsprechen den Einträgen im Pascal'schen Dreieck.
- Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann man Aussagen $A(n)$ nachweisen, die auf der Menge der natürlichen Zahlen beruhen. Dabei weist man $A(n)$ für $n = n_0 \in \mathbb{N}$ nach und folgert aus der Annahme ihrer Gültigkeit für ein bestimmtes n die Gültigkeit für $n + 1$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1

Weisen Sie Gln. (1.9c) – (1.9e) graphisch nach, so wie es in Abschnitt 1.2 für die Gln. (1.9a), (1.9b) gemacht wurde:

$$C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)\,, \tag{1.31a}$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)\,, \tag{1.31b}$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)\,. \tag{1.31c}$$

Aufgabe 1.2

Beweisen Sie den Zusammenhang aus Gl. (1.17) für die Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,. \tag{1.32}$$

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,, \tag{1.33a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} = 1 - \frac{1}{n+1}\,. \tag{1.33b}$$

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.34}$$