1 Schnellkurs Lineare Algebra – was bisher geschah...

In diesem Kapitel ...

- Sich der Inhalte aus dem ersten Teil des Schnellkurses erinnern
- Lücken erkennen und im Vorfeld beseitigen
- Gestärkt mit Volldampf in diesen zweiten Teil hineingehen

Es freut mich, dass Sie *noch mehr* über lineare Algebra lernen möchten. Sie haben im Titel lesen können – und ich hoffe, ich erschrecke Sie jetzt dabei nicht –, dass es sich bei diesem Buch um einen zweiten Teil handelt. Es handelt sich um die inhaltliche Fortsetzung des ersten Teils:

Schnellkurs Lineare Algebra.

Das bedeutet zum einen, dass dieses Buch zwar erneut modular geschrieben wurde, so dass Sie hin- und herblättern können und ich Sie sogar dazu verstärkt ermutigen möchte. Das bedeutet aber auf der anderen Seite eben auch, dass ich inhaltlich das Wissen aus dem ersten Teil voraussetzen werde und auch nicht darum herum komme. Dafür ist dort bereits (thematisch) sehr viel passiert.

Wenn Sie das erste Buch gelesen haben, dann können Sie stolz sein, dass Sie nun einen Gesamtbogen schlagen können, um drei – scheinbar völlig unterschiedliche – Welten miteinander zu verbinden:

- lineare Gleichungssysteme,
- lineare Abbildungen und
- natürlich die Matrizen.

Folgen Sie mir noch einmal in die Vergangenheit und prüfen Sie, ob Sie die wesentlichen Punkte verstanden haben und blättern Sie mit mir etwas durch den ersten Teil des Buches ...

Im ersten Kapitel finden Sie einen Überblick über die Zahlbereiche. Ich führe Sie in die Konstruktionsideen der Zahlen ein: Startend von den natürlichen

Zahlen mit ihren grundlegenden Eigenschaften, entwickeln wir die ganzen Zahlen und können plötzlich subtrahieren, lernen die rationalen Zahlen mit der Bruchrechnung und dann noch die reellen Zahlen, die insbesondere die irrationalen Zahlen wie π oder $\sqrt{2}$ in sich tragen. Dies ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

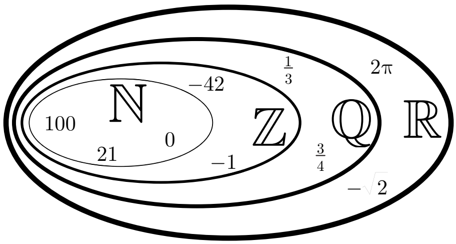

Abbildung 1.1 Die Zahlbereiche im Vergleich

Außerdem erlernen Sie im ersten Kapitel grundlegende Techniken, wie den Umgang mit Variablen, dem Summenzeichen oder mit Funktionen. Sie lernen zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu differenzieren – nehmen daher auch den Unterschied zwischen einer Implikation und einer Äquivalenz wahr.

Im zweiten Kapitel geht es um die logischen Grundlagen der Mathematik. Hier lernen Sie Mathematik als formale Sprache kennen. Ja genau, Sie lernen Mathematik lesen und schreiben – ein bisschen Grammatik, ein bisschen Rechtschreibung. Dieses Bewusstsein ist wichtig, um Mathematik in der Praxis korrekt anzuwenden. Beachten Sie, dass Sie kein Mathematik-Poet werden sollen, aber Sie müssen sich gewissermaßen ausdrücken und verständlich machen können. Und fast noch wichtiger: Sie müssen die Antwort verstehen, die man Ihnen mathematisch gibt.
So lernen Sie im zweiten Kapitel, mit Mengen umzugehen und diese darzustellen. Siehe dazu auch Abbildung 1.2. Sie lernen die Worte und Sätze in der mathematischen Sprache. Außerdem unterhalten wir uns kurz über unendliche Mengen und grundlegende Beweistechniken in der Mathematik. Ein bunter großer Werkzeugkasten für die große weite Welt der Mathematik steht Ihnen zur Verfügung.

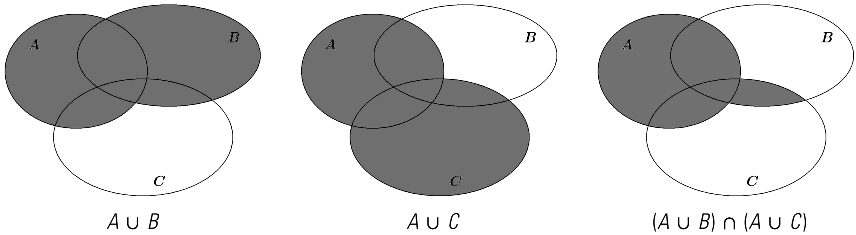

Abbildung 1.2 Darstellung von $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Im dritten Kapitel schauen wir uns Arbeitstechniken rund um das Thema lineare Gleichungssysteme an. Ich zeige Ihnen zunächst an einfachen Beispielen, wann Gleichungen der Form $ax = b$, aber auch $ax^2 + bx + c = 0$ allgemein lösbar sind und wie ihre Lösungsmengen aussehen: Ja, ich weiß, dass Sie solche Gleichungen schon längst lösen können. Hier geht es also darum, Lösungsmengen allgemein mathematisch korrekt herzuleiten.

BEISPIEL 1.1

Im ersten Teil des Schnellkurses haben wir lineare Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ über einem Körper $\mathbb{K}$ betrachtet und diese in die so genannte Zeilenstufenform mittels des Gaußschen Algorithmus überführt:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{1j(1)}x_{j(1)} + & \cdots & & + \ldots + a_{1m}x_m & = b_1 \\
& a_{2j(2)}x_{j(2)} + \cdots & & + \ldots + a_{2m}x_m & = b_2 \\
& & \ddots & \vdots & \\
& & a_{ij(i)}x_{j(i)} & + \ldots + a_{im}x_m & = b_i
\end{array}$$

Hierbei sei $i \leq n$ und $a_{1j(1)}, a_{2j(2)}, \ldots, a_{ij(i)}$ die Pivot-Koeffizienten, auch Pivot-Elemente genannt, die alle ungleich null sein sollen. Die Lösungsmenge sieht dann wie folgt aus:

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid \text{für } k = 1, \ldots, i \text{ gilt} \right.$$

$$\left. x_{j(k)} = \frac{1}{a_{kj(k)}} \cdot \left(b_k - \sum_{l=j(k)+1}^{m} a_{kl}x_l \right) \right\}.$$

Am Ende des dritten Kapitels gehe ich auf den legendären Gauß-Algorithmus zum Lösen von linearen Gleichungen ein, wie Ihnen das Beispiel schon suggeriert. Und natürlich üben wir das, denn dieser Algorithmus entschärft beliebig große lineare Gleichungssysteme.

Tipp

In meinen Vorlesungen bemerke ich nicht selten, dass eingefahrene Muster aus Ihrem früheren (Schul-)Leben teilweise nur noch sehr schwer zu ändern sind. Manchmal ist es selbst der Gauß-Algorithmus, der anfangs fast schon sabotiert wird, so dass auch bei großen Systemen mit fünf oder mehr Unbekannten doch wieder auf das Einsetzungsverfahren etc. zurückgegriffen wird. Warum? Keine Ahnung. Nehmen Sie Gauß! Das ist eine gute Antwort, die viel Rechenärger erspart.

Im vierten Kapitel lernen Sie mehr über Vektorräume. Siehe dazu Abbildung 1.3. Allerdings geht die Einführung über Ihr Schulwissen hinaus. Ich führe dort Vektorräume ganz abstrakt ein, so dass nicht nur der Pfeil im ebenen Koordinatensystem, sondern auch gleich ganze Funktionenräume als Vektorräume aufgefasst werden können. Das ist gewöhnungsbedürftig und braucht seine Zeit, um verdaut zu werden. Pfeile sind nicht immer nur die einzigen Vektoren, manchmal sind eben auch Polynome im Polynomraum selbst die Vektoren.

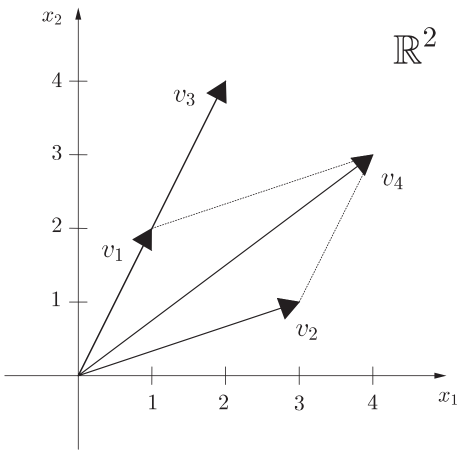

Abbildung 1.3 Vier Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Im letzten Teil des vierten Kapitels führe ich besonders praktische Teilmengen von Vektoren ein, so genannte Untervektorräume. Diese sind nicht leer und abgeschlossen unter den Vektorraumoperationen. Somit merken Vektoren in diesen (Teil-)Welten gar nicht, dass es vielleicht noch mehr da draußen gibt, denn Ihre Reichweite an Operationen reicht nicht aus, um über den Tellerrand zu schauen. Interessante Sichtweise, oder?

Im fünften Kapitel wiederholen und konkretisieren wir unser Wissen rund um Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen reellen Raum. Wir analysieren diese Objekte anhand von verschiedenen Gleichungsarten und Verfahren, damit wir sie für unsere Zwecke geeignet manipulieren können. Insbesondere werden Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untereinander diskutiert und praktisch berechnet. Siehe dazu exemplarisch Abbildung 1.4.

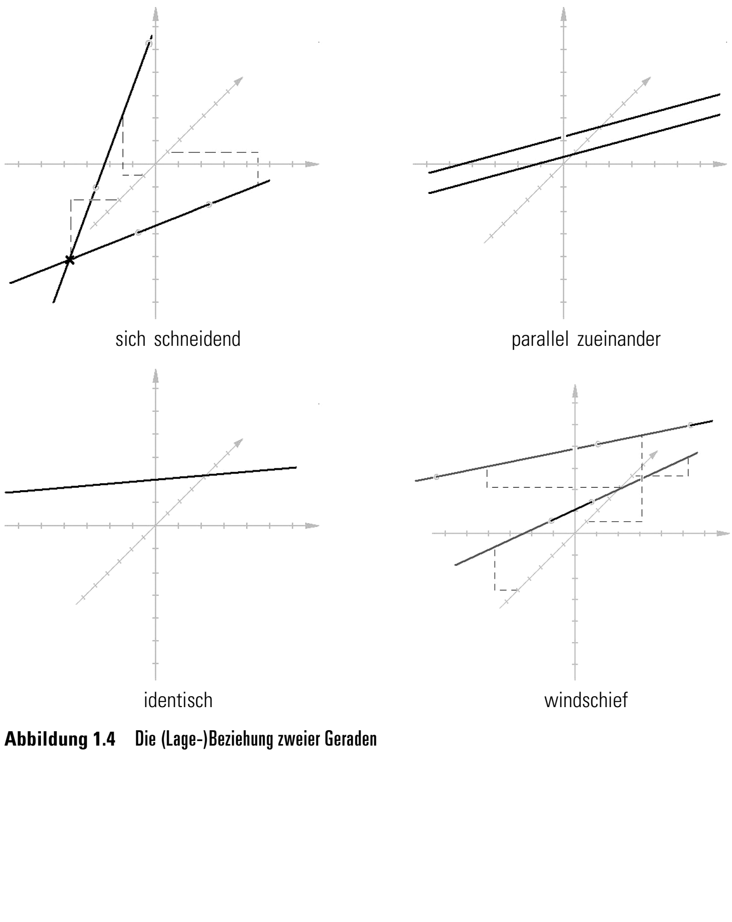

Abbildung 1.4 Die (Lage-)Beziehung zweier Geraden

Im sechsten Kapitel fängt man leicht an zu Schwitzen, weil ich etwas an Ihrem (mathematischen) Boden wackle. Wir sprechen über Gruppen, Ringe und Körper. Falls es nun nicht bei Ihnen Klick macht, sollten Sie auf jeden Fall noch einmal hineinschauen. Ich zeige Ihnen, unter welchen Umständen $0 = 1$ gelten kann und was diese Gleichung überhaupt bedeuten kann. Hier lernen Sie relativ zu denken, das heißt zu überlegen, was in welchen Strukturen möglich ist und was eben auch nicht.

BEISPIEL 1.2

Mein Lieblingssatz in einem (kommutativen) Ring mit Eins ist übrigens der, dass *das additiv Inverse des Einselements mit sich selbst multipliziert gerade das Einselement selbst ist*, also nichts anderes als: $(-1) \cdot (-1) = 1$. Oder Sie überlegen sich, weshalb eigentlich in einem solchen Ring gilt: $0 \cdot \lambda = 0$. Diese Gleichung lässt sich allgemein wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned}
0 \cdot \lambda &= \lambda \cdot 0 && \text{(Kommutativität der Multiplikation)}\\
&= \lambda \cdot 0 + 0 && \text{(Neutrales Element der Addition)}\\
&= \lambda \cdot 0 + (\lambda \cdot 0 + (-(\lambda \cdot 0))) && \text{(Inverses Element der Addition)}\\
&= (\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0) + (-(\lambda \cdot 0)) && \text{(Assoziativität der Addition)}\\
&= \lambda \cdot (0 + 0) + (-(\lambda \cdot 0)) && \text{(Distributivität)}\\
&= \lambda \cdot 0 + (-(\lambda \cdot 0)) && \text{(Neutrales Element der Addition)}\\
&= 0 && \text{(Inverses Element der Addition)}
\end{aligned}$$

Am Ende des Kapitels zeige ich Ihnen eine praktische Rechenanwendung mit den Resten der Division von ganzen Zahlen. Die so genannte Modulo-Rechnung taucht im täglichen Leben öfter auf, als Sie vielleicht glauben mögen: Wie selbstverständlich stehen Sie nach acht Stunden Schlaf morgens um sechs Uhr auf, wenn Sie abends um 22 Uhr ins Bett gegangen sind – Sie rechnen modulo der Zahl 24. Dann ist nämlich $22 + 8 = 6$. Dies sind gleichzeitig auch echte Anwendungen von *endlichen* Körpern. (Beachten Sie: Die typischen Körper, die Ihnen so vor die Nase kommen, wie die reellen oder komplexen Zahlen, sind unendlich groß.)

Im siebten Kapitel führe ich den Körper der komplexen Zahlen ein. Wir lernen jenseits der reellen Zahlen zu rechnen, indem wir auch Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen können. Das ist neu und führt zu interessanten Eigenschaften: So haben alle nicht-konstanten Polynome plötzlich immer Nullstellen – diese sind allerdings womöglich imaginär.

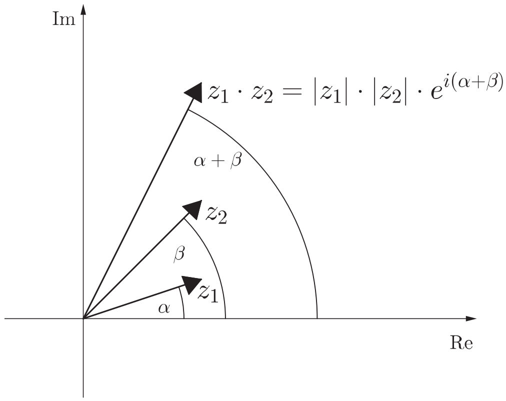

Abbildung 1.5 Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 \cdot z_2$

Ich stelle die beiden Darstellungsformen der komplexen Zahlen – nämlich als zweidimensionale Vektoren mit reellen Einträgen und durch die legendären Polarkoordinaten – gegenüber. Zur Darstellung der Multiplikation mittels der Polarkoordinaten siehe auch Abbildung 1.5. Am Ende gebe ich noch einen kleinen Ausblick in die Welt *jenseits* der bereits sehr mächtigen komplexen Zahlen: Wir sprechen über Quaternionen und Oktonionen. Dies aber auch nur ganz kurz, um Ihnen zu zeigen, was in der Mathematik alles so möglich ist und worüber sich Physiker in der Quantenphysik freuen.

Im achten Kapitel sprechen wir über hilfreiche Überlebenstaktiken im Umgang mit Vektorräumen. Damit Sie dort nicht untergehen, brauchen Sie Werkzeuge, um Vektoren in ihrem natürlichen Lebensraum analysieren zu können: Wir sprechen über Basen und warum diese überhaupt (allgemein) existieren. Des Weiteren sehen wir, dass man Vektoren verschiedener Basen gegenseitig austauschen und Mengen linear unabhängiger Vektoren zu Basen ergänzen kann.
Um Basen zu verstehen, müssen Sie unbedingt verstanden haben, was hinter den Begriffen von Erzeugbarkeit und linearer Unabhängigkeit steckt: In meinen Vorlesungen spüre ich an dieser Stelle oft ein trügerisches Scheinverständnis, was Sie unbedingt abgelegt haben sollten. Betrachen Sie dazu auch Abbildung 1.6. Mit solchen Analysen wird außerdem auch klar, weshalb ein Vektorraum zwar verschiedene Basen haben kann, wohl aber nur eine (eindeutige) Dimension als *die* Anzahl der Elemente *einer* Basis!

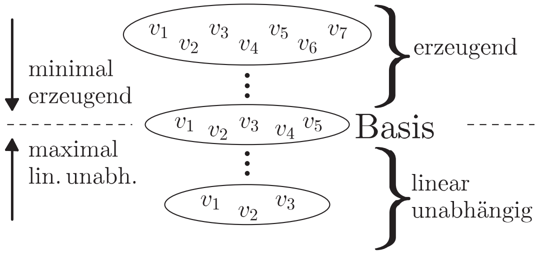

Abbildung 1.6 Basen als Optimum zweier Begriffe

Im neunten Kapitel sprechen wir über Abbildungen zwischen Vektorräumen, die Vektoren anderen Vektoren linear zuordnen: Linearität bedeutet, dass das Bild der Summe von zwei Vektoren gleich der Summe der Bilder dieser Vektoren ist. Analoges gilt für das Skalieren von Vektoren. Wir führen zur Analyse solcher Abbildungen Kerne und Bilder ein und erkennen, dass diese Unterräume sind. Siehe dazu auch Abbildung 1.7.

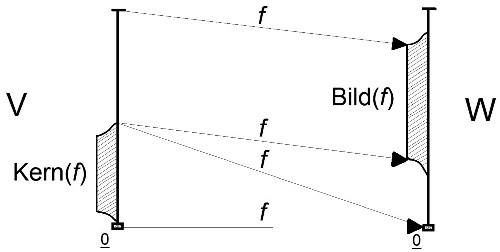

Abbildung 1.7 Kern und Bild einer linearen Abbildung

In diesem Kapitel gibt es ein mathematisches Feuerwerk nach dem anderen: Wir erkennen, dass lineare Abbildungen, nur auf einer Basis des Urbildraumes angegeben, bereits wohldefiniert und dadurch schon eindeutig sind. Außerdem sind n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume sofort zum $\mathbb{K}^n$ isomorph. Und schließlich haben wir den Dimensionssatz, auch Bild-Kern-Satz genannt, der besagt, dass Rang plus Defekt einer linearen Abbildung gleich der Dimension des Urbildraumes ist.

Im zehnten Kapitel lernen wir die Welt der Matrizen kennen. Matrizen werden als schematische und auf das wesentliche konzentrierte Darstellungen von Homomorphismen motiviert. Wir erkennen, dass es für jeden Homomorphismus genau eine darstellende Matrix gibt. Diese Bijektion zwischen den beiden Welten können wir zu einem Isomorphismus erweitern: Dazu haben wir die Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen eingeführt sowie anschließend noch die Matrizenmultiplikation als Pendant zur Hintereinanderausführung von Abbildungen. Siehe dazu auch Abbildung 1.8. Am Ende des Kapitels führen wir die Inverse einer Matrix ein, sofern diese existiert.

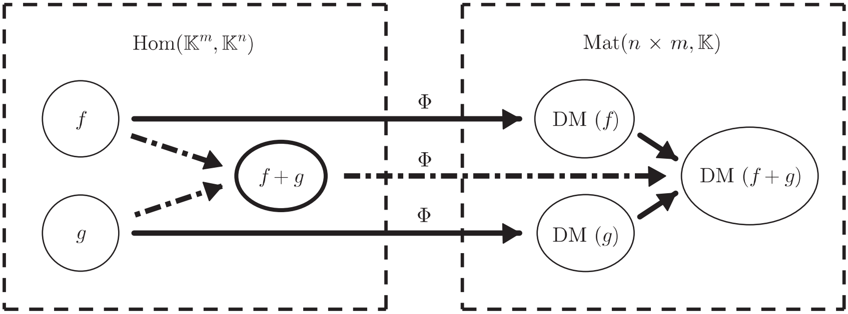

Abbildung 1.8 Isomorphismus zwischen den Welten: lineare Abbildungen und Matrizen

Im elften Kapitel zeige ich Ihnen Anwendungen der Matrizentheorie: Zunächst überlegen wir uns, wie die darstellenden Matrizen von Spiegelungen und Drehungen in der reellen Ebene aussehen. Siehe dazu beispielsweise eine Analyse der Winkel beim Spiegeln des zweiten Einheitsvektors in Abbildung 1.9. Anschließend befassen wir uns kurz mit den so genannten Überführungsmatrizen in allgemeinen Produktionsprozessen.
Am Ende des Kapitels befassen wir uns mit den so genannten elementaren Umformungen, die Sie aus dem Gauß-Algorithmus kennen. Für solche Gauß-Operationen führen wir jeweils eine passende Matrix ein, die eine beliebige Matrix mittels Linksmultiplikation derart manipuliert, wie Sie es auch per Gleichungsumformung getan hätten, wäre diese Matrix eine Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Das brauchen wir im letzten Kapitel für das Invertieren von Matrizen.

Im zwölften Kapitel schließen wir den Bogen und ernten die Früchte der Analyse aus dem gesamten Buch: Wir interpretieren die Koeffizienten in einem linearen Gleichungssystem als Matrix, Matrizen als lineare Abbildungen und Homomorphismen durch ihre Darstellungen als Matrizen. Wir wandeln zwi-

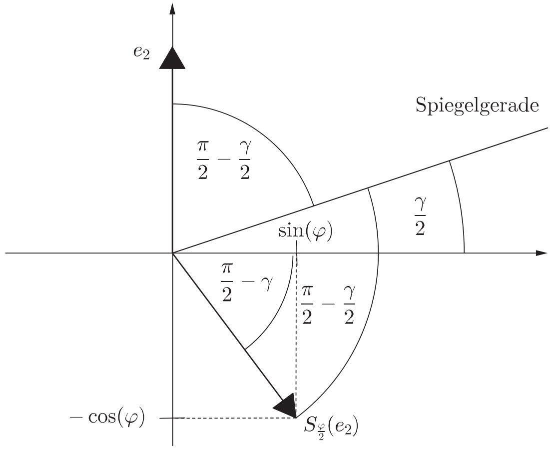

Abbildung 1.9 Spiegelung des zweiten Einheitsvektors an der gegebenen Spiegelgeraden

schen den Welten umher und wählen eine, je nachdem welche gerade besser passt und unser Problem schneller löst.
Insbesondere befassen wir uns mit der Geometrie von Lösungsmengen, homogener und inhomogener linearer Gleichungssysteme: Wolken und Luftballons – mit Wolken um den Koordinatenursprung als Metapher für die Unterräume, die Lösungsmengen von homogenen Systemen darstellen. Und mit Luftballons als am Nullpunkt verankerte, aber um einen Vektor verschobene Unterräume, die gerade den Lösungsmengen von inhomogenen Gleichungssystemen entsprechen. Solche geometrischen Luftballons sehen Sie auch in Abbildung 1.10. Schließlich lernen Sie mithilfe der elementaren Umformun-

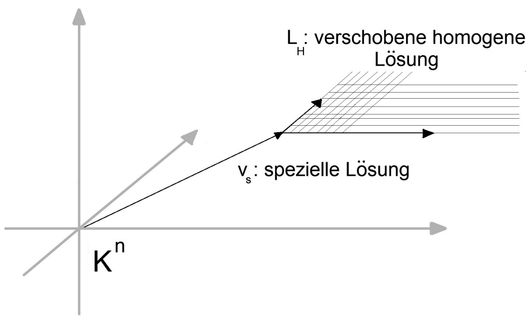

Abbildung 1.10 Um einen Vektor verschobene Unterräume: Affine Unterräume

gen und mit den ganzen Sätzen aus dem Vollen schöpfend, wie man algorithmisch und ganz praxisnah Matrizen mittels des Gauß-Algorithmus invertieren kann.

Das war's – und bitte nehmen Sie diese Gedanken ernst. Hier ist eine Menge Theorie enthalten, die Sie für diesen zweiten Teil benötigen. Ich werde, falls es mir nötig erscheint, direkte Verweise auf den ersten Teil angeben, damit Sie genau wissen, wo Sie Lücken nachlesen können.
Sie fühlen sich gut? Sind bereit, mehr lineare Algebra zu lernen und wollen endlich Eigenwerte berechnen, Matrizen diagonalisieren, trigonalisieren oder deren Jordanform bestimmen? Ebenso möchten Sie später in allgemeinen Vektorräumen Längen und Winkel messen, wie auch schon in der reellen Ebene? Sehr gut. Dann können Sie beruhigt weiterlesen.

Aufgabe 1.1

Beschreiben Sie geometrisch alle Unterräume des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 1.2

Geben Sie im Vektorraum der reellen Polynome eine Darstellung des Polynoms $p(x) = 2x^3 + x - 5$ als Linearkombination der folgenden Vektoren an:

$$q_1(x) = 2, \quad q_2(x) = x^2 + x, \quad q_3(x) = 4x^3 - 7, \quad q_4(x) = 3x^2 + 4,$$
$$q_5(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1.$$

Aufgabe 1.3

Es sei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.
Für ein fest gewähltes $a \in \mathbb{R}$ sei $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Vorschrift

$$f_a(e_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad f_a(e_2) := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad f_a(e_3) := \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Berechnen Sie den Rang und den Defekt von f_a.

Aufgabe 1.4

Betrachten Sie die beiden folgenden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es unendlich viele lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt, die die Bedingungen $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllen.

Aufgabe 1.5

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathrm{DM}(F)$ für die lineare Abbildung $F\colon \mathtt{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathtt{Pol}_2(\mathbb{R})$, wobei $\mathtt{Pol}_2(\mathbb{R})$ die Menge der Polynome vom Grade höchstens 2 (als Abbildungen) mit reellen Koeffizienten und der Unbekannten x bezeichnet. Die Standardbasis dieses Raumes, bestehend aus den Monomen, könnte hier nützlich sein. Die Abbildung ist bereits eindeutig beschrieben durch:

$$F(2x^2 + 5x) = 3x + 3 \qquad F\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 6x^2 + 1 \qquad F(26) = 78.$$

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie, für welche Parameter $s, t \in \mathbb{R}$ die folgenden Matrizen invertierbar sind (und warum). Berechnen Sie gegebenenfalls die inversen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} s & s^2 & s^3 \\ 1 & s & -s \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.7

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A, 0)$.

(b) Geben Sie Rang und Defekt der Matrix A an.
(c) Ist die lineare Abbildung A injektiv? Ist sie surjektiv?

Auf einen Blick ...

- Kapitel 1: Zahlbereiche und die mathematische Grundsprache
- Kapitel 2: Mathematik als Sprache logisch betrachtet
- Kapitel 3: Von linearen Gleichungssystemen zum Gauß-Algorithmus
- Kapitel 4: Vektorräume axiomatisch einführen
- Kapitel 5: Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen reellen Raum
- Kapitel 6: In Gruppen, Ringen und Körpern formal rechnen lernen
- Kapitel 7: Mit komplexen Zahlen rechnen und Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen
- Kapitel 8: Linearkombinationen, Basen und Dimensionen in Vektorräumen bestimmen
- Kapitel 9: Den Dimensionssatz für lineare Abbildungen sowie den Isomorphiesatz für die Pfeilwelten zu schätzen lernen
- Kapitel 10: Mit Matrizen rechnen und diese als lineare Abbildungen erkennen lernen
- Kapitel 11: Drehungen und Spiegelungen als Matrix zu analysieren lernen
- Kapitel 12: Der Wandel zwischen den drei Welten: Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und lineare Abbildungen